第0卷第0期 数学学报中文版 Vol.0, No.0
201x年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 201x

文章编号: 0583-1431(20xx)0x-0xxx-0x **文献标识码: A**

辛轨形群胚的辛邻域定理

杜承勇

四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610068
E-mail: cyd9966@hotmail.com

陈柏辉

四川大学数学学院、长江数学中心 成都 610064
E-mail: bohui@cs.wisc.edu

王蕊

Department of Mathematics, University of California Irvine CA 92697-3875
Email: ruiw10@math.uci.edu

摘　要 在本文中, 我们给出一种几何的子轨形群胚的定义, 并给出了判定子轨形群胚的依据. 然后我们证明了紧子轨形群胚的轨形管状邻域、紧辛子轨形群胚的辛邻域和紧 Lagrangian 子轨形群胚的 Lagrangian 邻域的存在性.

关键词 子轨形群胚; 轨形管状邻域; 辛子轨形群胚; 辛邻域; Lagrangian 邻域
MR(2010)主题分类 57R18; 57R17; 57N40
中图分类 O186.1

Symplectic neighborhood theorem for symplectic orbifold groupoids

Cheng-Yong DU

School of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068*, China*
E-mail: *cyd9966@hotmail.com*

Bohui CHEN

School of Mathematics and Yangtze Center of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064*, China*
E-mail: bohui@cs.wisc.edu

Rui WANG

Department of Mathematics, University of California, Irvine, CA, 92697-3875*, USA*
Email : *ruiw10@math.uci.edu*

Abstract In this paper, we give a geometric definition of sub-orbifold groupoid, and a criterion for determining a sub-orbifold groupoid. Then we prove the existence of

收稿日期: 200x-xx-xx; 接受日期: 200x-xx-xx
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11501393; 1107117; 11221101); 四川省教育厅资助科研项目(15ZB0027)
通讯作者: 陈柏辉

orbifold tubular neighborhoods of compact sub-orbifold groupoids, the existence of symplectic neighborhoods of compact symplectic sub-orbifold groupoids in symplectic orbifold groupoids, and, the existence of Lagrangian neighborhoods of compact Lagrangian sub-orbifold groupoids.

Keywords sub-orbifold groupoid; orbifold tubular neighborhood; symplectic sub-orbifold groupoid; symplectic neighborhood; Lagrangian neighborhood

MR(2010) Subject Classification 57R18; 57R17; 57N40

Chinese Library Classification O186.1

1 引言

轨形（orbifold）是流形的一种推广. 它最早由 I. Satake[12] 在 1956 年引入. 一个仿紧, Hausdorff 拓扑空间 X 上的轨形坐标卡（orbifold chart）是一个四元组 $(\tilde{U}, G, \phi, U)$. 其中 $\tilde{U}$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开集; G 是一个有限群, 光滑有效地作用在 $\tilde{U}$ 上; U 是 X 中一个开集; $\pi : \tilde{U} \to U$ 是一个连续映射, 并诱导一个同胚 $\tilde{U}/G \to U$. X 上一个轨形图册（orbifold atlas）是一族满足一定相容性条件的轨形坐标卡 $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}_i, G_i, \phi_i, U_i) | i \in I\}$. 一个轨形图册的等价类就给了 X 一个轨形结构. 1997 年, Moerdijk-Pronk[8] 发现可以用轨形群胚（orbifold groupoid）来研究轨形. 他们证明了轨形与有效的（effective）轨形群胚之间的对应关系, 即从轨形图册可以得到有效的轨形群胚, 反之从有效的轨形群胚可以得到轨形图册. 而且等价的轨形图册对应于 Morita 等价的轨形群胚. 这一结果使得我们可以利用轨形群胚来研究轨形的几何与拓扑.

在本世纪初 Chen-Ruan[4, 5]构造出了辛轨形的 Gromov-Witten 理论. 这一理论是目前国际上非常活跃的研究领域. 经过这十来年的发展, 人们发现轨形群胚比轨形图册更适合用来研究轨形, 特别是在研究轨形的 Gromov-Witten 理论的时候. 为了研究轨形的 Gromov-Witten 理论, 我们需要弄清楚一些辛轨形群胚的基本的辛拓扑性质. 这就是本文的出发点.

本文直接从轨形群胚的角度来研究轨形的几何. 我们首先考虑子轨形群胚的概念. 轨形群胚是一类特殊的群胚, 因此我们可以从纯代数的观点来考虑子轨形群胚的定义（参见 [6, 7]）. 不过轨形群胚作为轨形对应的几何体, 纯代数的定义不能很好的契合这一对应. 因此我们应该有一个更几何的子轨形群胚的概念. 一个标准的模型是轨形丛的零截面, 这给我们一个很好的参考. 我们由此出发找到一个合理的子轨形群胚的定义（定义 3.2）. 给定一个轨形群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 后, 我们发现它的具有相同轨道空间的子轨形群胚都是 Morita 等价的（定理 3.9、推论 3.11）. 而且, 每一个这样的子轨形群胚的 Morita 等价类里面有一个最大的, 即满子轨形群胚（定义 3.8）. 由此我们还给出判断一个 G_0 的光滑流形能否决定一个子轨形群胚的判断准则（定理 3.13 和定理 3.14）.

然后我们考虑子轨形的管状邻域. 我们发现, 对于一个特定的轨形群 G 胚和它的一个子轨形群胚 H, 即使子轨形群胚是紧的（即轨道空间 $|\mathsf{H}|$ 是紧的）, 我们也无法得到一个理想的管状邻域, 即各处的宽度一致的管状邻域（例 5.3）. 不过, 我们总能找到一个 Morita 等价的子轨形群胚 $\mathsf{K} \subset \mathsf{G}$ 使得 K 有理想的管状邻域（定理 5.4）. 我们还考虑辛轨形群胚和辛子轨形群胚, 并证明了在 Morita 等价意义下辛子轨形群胚的辛邻域的存在性（定理 7.6）,

和 Lagrangian 子轨形群胚的 Lagrangian 邻域的存在性（定理 7.8）. 这些结果在辛轨形群胚的辛手术和 Gromov-Witten 理论中将会有重要应用.

本文的结构如下. 我们在第 2 节回忆轨形群胚的定义和性质, 在第 3 节给出子轨形群胚的定义, 讨论它们的性质, 在第 4 节回忆轨形群胚上向量丛, 轨形群胚的切丛, 和子轨形群胚的法丛等概念. 然后我们在第 5 节证明了紧子轨形群胚的轨形管状邻域的存在性, 在第 6 节给出了轨形管状邻域的一个应用, 得到轨形群胚上的同伦公式. 最后我们利用第 5、6 节的结果在第 7 节讨论了紧辛子轨形群胚的辛邻域的存在性和紧 Lagrangian 子轨形群胚的 Lagrangian 邻域的存在性.

2 轨形群胚

本节介绍一下轨形群胚的定义、性质以及它们之间的 Morita 等价关系. 这些概念和性质可见文 [1, 6–9].

定义 2.1 一个群胚（groupoid）$\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 是一个小范畴, 且其中所有态射都可逆. 它带有以下 5 个结构映射:

（1）源映射 $s: G_1 \to G_1$ 和目标映射 $t: G_1 \to G_0$;

（2）复合映射 $m: G_1 \times_{(s,G_0,t)} G_1 \to G_1$;

（3）单位映射 $u: G_0 \to G_1$;

（4）逆映射 $i: G_1 \to G_1$.

如果 $g \in \mathrm{Hom}(x, y) \subset G_1$, 则 $s(g) = x, t(g) = y$. 我们将其记为 $g: x \to y$, 并称之为箭头. 如果 $s(g) = t(h)$, 我们记 $m(g, h) = gh$. 对于 $x \in G_0$ 我们记 $u(x) = 1_x$. 对 $g \in G_1$, 我们记 $i(g) = g^{-1}$. 这 5 个结构映射满足以下公理:

$$s(1_x) = t(1_x) = x, s(g^{-1}) = t(g), t(g^{-1}) = s(g);$$
$$s(gh) = s(h), t(gh) = t(g), g(hk) = (gh)k;$$
$$g1_x = 1_y g = g, g^{-1}g = 1_x, gg^{-1} = 1_y, \quad \forall\, g: x \to y.$$

定义 2.2 我们称 G 是一个李群胚（Lie groupoid）, 如果 G_0 和 G_1 都是光滑流形, 所有结构映射都是光滑映射, 并且 s, t 都是淹没（submersion）.

定义 2.3 一个李群胚 G 被称为轨形群胚（orbifold groupoid）, 如果映射 $(s, t): G_1 \to G_0 \times G_0$ 是恰当的（proper）, 且 s, t 都是局部微分同胚. 此时 $\dim G_0 = \dim G_1$. 我们称这个数为 G 的维数.

定义 2.4 给定一个轨形群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 和任意一点 $x \in G_0$, 我们称 $G_x \triangleq s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$ 为 x 的局部群. 这是一个有限群.

给定一个李群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$, 在 G_0 上有一个关系 “$\sim$” 定义为

$$x \sim y, \text{ 如果存在 } g \in G_1 \text{ 使得 } g: x \to y.$$

这是一个等价关系.

定义 2.5 G 的粗空间（coarse space）或者轨道空间（orbit space）定义为

$$|\mathsf{G}| \triangleq G_0/\sim.$$

记从 G_0 到 $|\mathsf{G}|$ 的投射为 $\pi: G_0 \to |\mathsf{G}|$. 我们称 G 是紧的, 如果 $|\mathsf{G}|$ 是一个紧的拓扑空间.

例 2.6 例如, 一个有限群 G 光滑作用在一个流形 M 上, 我们可以得到一个轨形群胚:

$$G \ltimes M \triangleq (M, G \times M).$$

它的源映射和目标映射为 $s(g,m)=m, t(g,m)=g\cdot m$. 其它的 3 个结构映射是显然的. 直接验证即知这是一个轨形群胚.

定义 2.7 假设 G 和 H 是两个李群胚. 一个态射 $\phi:\mathsf{H}\to\mathsf{G}$ 是一个由 2 个光滑映射 $\phi_0: H_0\to G_0$ 和 $\phi_0: H_1\to G_1$ 组成的函子, 即它们与各自的结构映射交换. 如果 ϕ_0,ϕ_1 都是微分同胚, 就称 $\phi=(\phi_0,\phi_1)$ 为同构, 记为 $\phi:\mathsf{H}\cong\mathsf{G}$.

两个李群胚之间的态射 $\phi:\mathsf{H}\to\mathsf{G}$ 被称为等价, 如果

(i) 定义在流形的纤维积 $G_1\times_{(s,G_0,\phi_0)}H_0\triangleq\{(g,y)|g\in G_1, y\in H_0, s(g)=\phi_0(y)\}$ 上的映射

$$t\pi_1: G_1\times_{(s,G_0,\phi_0)}H_0\to G_0$$

是一个满的淹没.

(ii) 映射框

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "(s,t)"'] & G_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ H_0\times H_0 \arrow[r, "\phi_0\times\phi_0"] & G_0\times G_0 \end{tikzcd}$$

是一个纤维积.

引理 2.8 ([1]) 如果 $\phi:\mathsf{G}\to\mathsf{H}$ 是一个轨形群胚之间的等价, 那么 ϕ_0 是局部微分胚, 且诱导一个轨道空间上的同胚 $|\phi|:|\mathsf{G}|\to|\mathsf{H}|$.

定义 2.9 两个李群胚 G 和 H 被称为是 Morita 等价, 如果存在第 3 个李群胚 K 和两个李群胚等价 $\mathsf{G}\xleftarrow{\psi}\mathsf{K}\xrightarrow{\phi}\mathsf{H}$.

这是一个李群胚之间的等价关系, 也可限制在轨形群胚上得到一个轨形群胚之间的等价关系. 不过在说两个轨形群胚 Morita 等价时我们也允许中间的第 3 个是一般的李群胚.

3 子轨形群胚

在这一节我们讨论子轨形群胚的定义和性质.

3.1 子轨形群胚的定义

我们首先看一个引理.

引理 3.1 设 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 是一个轨形群胚, 而且 H_0 是 G_0 的一个余维为 k 的光滑子流形. 如果

$$H_1\triangleq s^{-1}(H_0)\cap t^{-1}(H_0)$$

也是 G_1 的一个余维为 k 的光滑子流形, 那么在将 G 的结构映射限制在 H_0, H_1 上后, 我们得到一个轨形群胚 $\mathsf{H}=(H_0,H_1)$.

证明 证明包含两步.

(1) H 是群胚. 因为 $H_1=s^{-1}(H_0)\cap t^{-1}(H_0)$, 我们可以将 $s,t: G_1\to G_0$ 限制在 H_1 上得到 $s'=s|_{H_1}: H_1\to H_0$ 和 $t'=t|_{H_1}: H_1\to H_0$. 我们同样可以将 u 限制在 H_0 上得到

$u' = u|_{H_0} : H_0 \to H_1$, 限制 i 在 H_1 上得到 $i' = i|_{H_1} : H_1 \to H_1$. 因为 $H_1 \times_{H_0} H_1 \subset G_1 \times_{G_0} G_1$, 我们有 $m' : H_1 \times_{H_0} H_1 \to H_1$. 直接验证即知, 带上这些结构映射后, $\mathsf{H} = (H_1 \rightrightarrows H_0)$ 成为一个群胚.

(2) H 是轨形群胚. 由假设我们只需验证 H 的源映射和目标映射 s', t' 是局部微分同胚. 任取一点 $g \in H_1$, 有一个 g 的邻域 $U_g \subset G_1$ 使得 $s : U_g \rightrightarrows U_x$ 是微分同胚, 其中 $x = s(g)$. 因为 s 是局部微分同胚, 所以 $s^{-1}(H_0)$ 是 G_1 的余维为 k 的光滑子流形. 而 $H_1 \subset s^{-1}(H_0)$ 也具有余维数 k, 所以我们可以收缩 U_g 使它满足 $U_g \cap s^{-1}(H_0) \subset H_1$. 那么 $s' : U_g \cap s^{-1}(H_0) \to U_x \cap H_0$ 就是微分同胚. 所以 $s' : H_1 \to H_0$ 是局部微分同胚. 同理可证 $t' : H_1 \to H_0$ 也是局部微分同胚. 证毕. □

定义 3.2 我们称引理 3.1 中得到的轨形群胚 $\mathsf{H} = (H_0, H_1)$ 是 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 的子轨形群胚（sub-orbifold groupoid）.

注 3.3 由定义可知, 如果 H 是 G 的子轨形群胚, 那么对任意的 $x \in H_0$, 它在 G 中的局部群 G_x 和它在 H 中的局部群 H_x 满足 $G_x = H_x$. 这也是我们的定义与通常的子群胚（作为子范畴）的定义的不同之处.

例 3.4 如果 $H_0 = \{x\}$, 则 $\mathsf{x} \triangleq (x, x \times G_x)$ 是 G 的子轨形群胚. 我们称它为 G 中的点.

例 3.5 任给一个 G_0 中开光滑子流形 U_0, $\mathsf{U} = \big(U_0, U_1 = s^{-1}(U_0) \cap t^{-1}(U_0)\big)$ 是 G 的子轨形群胚. 我们将它记为 $\mathsf{G}|_{U_0}$. 我们称它为 G 的开子轨形群胚.

开子轨形群胚与轨形群胚的局部模型有关.

命题 3.6 ([1, 8]) 给定一个轨形群胚 G 及任意一点 $x \in G_0$, 总存在一个 x 的开邻域 $U_x \subset G_0$ 使得 $s^{-1}(U_x) = t^{-1}(U_x) = \coprod_{g \in G_x} W_g$, $s, t : W_g \to U_x$ 都是微分同胚, 而且 $\mathsf{G}|_{U_x} \cong G_x \ltimes U_x$.

3.2 满子轨形群胚

子轨形群胚中有一类特殊的子轨形群胚.

定义 3.7 我们称 G_0 的子集 H_0 是 G-封闭的, 如果 $s^{-1}(H_0) = t^{-1}(H_0)$.

如果 H_0 是一个 G-封闭的 G_0 的余维 k 的光滑子流形, 那么由于 s, t 是局部微分同胚, $H_1 = s^{-1}(H_0) = t^{-1}(H_0)$ 是一个 G_1 的余维 k 的光滑子流形, 从而 $\mathsf{H} = (H_0, H_1)$ 是 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 的一个子轨形群胚.

定义 3.8 一个 G 的子轨形群胚 $\mathsf{H} = (H_0, H_1)$ 被称为是满子轨形群胚（full sub-orbifold groupoid）, 如果 H_0 是 G-封闭的.

定理 3.9 假设 H 是一个 G 的满子轨形群胚. 如果 K 也是 G 的子轨形群胚, 且满足 $\pi(H_0) = |\mathsf{H}| = \pi(K_0) = |\mathsf{K}| \subset |\mathsf{G}|$, 则 $K_0 \subset H_0, K_1 \subset H_1$. 记这两个包含映射为 i_0, i_1, 则 $i = (i_0, i_1) : \mathsf{K} \to \mathsf{H}$ 是一个轨形群胚之间的等价.

证明 假设 $x \in K_0$, 且 $\pi(x) = |x| \in |\mathsf{K}| = |\mathsf{H}|$, 那么存在一个 $y \in H_0$ 使得 $\pi(y) = |y| = |x|$. 因此在 G 中, 存在一个箭头 $g \in G_1$ 使得 $g : x \to y$. 因为 H_0 是 G-封闭的, 所以 $x \in H_0$, 且 $g \in H_1$. 因此 $K_0 \subset H_0$. 这表明 $K_1 \subset s^{-1}(K_0) \subset s^{-1}(H_0) = H_1$. 显然

$$i_0(s(g)) = s(g) = s(i_1(g)), \quad i_0(t(g)) = t(g) = t(i_1(g)).$$

因此我们得到一个态射 $i = (i_0, i_1) : \mathsf{K} \to \mathsf{H}$. 下面我们证明 i 是一个等价.

注意到

$$H_1 \times_{(s,i_0)} K_0 \cong s^{-1}(K_0)$$

是一个光滑流形. 而且映射 $t\pi_1 : H_1 \times_{K_0} K_0 \to H_0$ 即是 $t : s^{-1}(K_0) \to H_0$. 这显然是一个满射. 任取一个 $g \in s^{-1}(K_0)$ 使得 $g : x \to y$. 那么存在一个 g 的开邻域 $U_g \subset G_1$ 使得 $s : U_g \to s(U_g)$ 和 $t : U_g \to t(U_g)$ 都是微分同胚. 因此 $t : U_g \cap s^{-1}(K_0) \to t(U_g \cap s^{-1}(K_0))$ 是一个微分同胚. 由于 $\dim \mathsf{H} = \dim \mathsf{K}$, $K_1 \subset H_1$, 通过缩小 U_g 我们有 $t(U_g \cap s^{-1}(K_0)) = t(U_g) \cap H_0$. 因此 $t : s^{-1}(K_0) \to H_0$ 也是局部微分同胚. 从而 $t\pi_1 : H_1 \times_{K_0} K_0 \to H_0$ 是满淹没.

最后可以直接验证

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "(s,t)"'] & H_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ K_0 \times K_0 \arrow[r, "i_0 \times i_0"] & H_0 \times H_0 \end{tikzcd}$$

是一个纤维积. 证毕. □

注 3.10 我们也可以利用群胚的纤维积（参见[1]）的定义及性质来证明这个结论.

我们有如下推论

推论 3.11 G 的所有具有相同轨道空间的子轨形群胚都是互相 Morita 等价的.

定义 3.12 假设 H 是 G 的子轨形群胚, 我们记 G 的所有具有轨道空间 $|\mathsf{H}|$ 的子轨形群胚的集合为 $\mathfrak{M}(\mathsf{H}, \mathsf{G})$.

3.3 判定子轨形群胚

我们下面讨论: 对于一个轨形群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$, 任意给定一个 G_0 的光滑子流形 H_0, 是否能得到一个子轨形群胚. 子轨形群胚与群作用的不变子流形有密切关系.

定理 3.13 假设 $H_0 \subset G_0$ 是光滑子流形. 那么 $\mathsf{H} = \big(H_0, s^{-1}(H_0) \cap t^{-1}(H_0)\big)$ 是 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 的子轨形群胚当且仅当对于任意一点 $x \in H_0$, 以及它的一个充分小的形如命题 3.6 中的开邻域 $U_x \subset G_0$, $H_0 \cap U_x$ 是 U_x 在 G_x 作用下的不变子流形.

证明 充分性. 局部上由命题 3.6 我们有 $\mathsf{G}|_{U_x} \cong G_x \ltimes U_x = (U_x, G_x \times U_x)$. 由 [9] 知, 我们可以通过坐标变换使得 G_x 在 $U_x \subset \mathbb{R}^n$ 上的作用为线性作用. 令 $V_x = U_x \cap H_0$. 如果有某个 $g \in G_x$ 使得 $g \cdot V_x \not\subseteq V_x$. 那么在 $g \times U_x$ 中

$$\big(s^{-1}(V_x) \cap t^{-1}(V_x)\big) \cap \big(g \times U_x\big) = (g \times V_x) \cap (g \times (g^{-1} \cdot V_x))$$

与 H_0 维数不一致. 这与 H 是子轨形群胚矛盾.

必要性. 我们只需要证明 $H_1 \triangleq s^{-1}(H_0) \cap t^{-1}(H_0)$ 是 G_1 的光滑子流形. 任给一个 $g \in H_1, g : x \to y, x, y \in H_0$, 我们可以分别取充分小的 x, y 和 g 的开邻域 U_x, U_y 和 U_g 使得 $s : U_g \to U_x, t : U_g \to U_y$ 是微分同胚,且 $V_x = H_0 \cap U_x$ 和 $V_y = H_0 \cap U_y$ 分别是 U_x, U_y 各自在 G_x, G_y 作用下的不变子流形. 而且 $t \circ s^{-1} : U_x \to U_y$ 是 $g^{-1}(\cdot)g : G_x \to G_y$ 等变的. 因此我们有

$$s^{-1}(V_x) = t^{-1}(V_y) \subset U_g.$$

因此 $H_1 \cap U_g = s^{-1}(V_x) = t^{-1}(V_y)$ 为 U_g 的光滑子流形. 由 g 的任意性知 H_1 是 G_1 的光滑子流形, 且余维数与 H_0 一致. 所以 H 是 G 的子轨形群胚. 证毕. □

定理 3.14 给定一个 G_0 的光滑子流形 H_0. $\mathsf{H} = \big(H_0, s^{-1}(H_0) \cap t^{-1}(H_0)\big)$ 是 G 的子轨形群胚当且仅当 $\pi^{-1}(|\mathsf{H}|)$ 是 G_0 的光滑子流形. 其中 $|\mathsf{H}| = \pi(H_0)$.

证明 令 $K_0 \triangleq \pi^{-1}(|\mathsf{H}|)$, 那么显然 K_0 是 G-封闭的, 且 $H_0 \subset K_0$.

必要性. 假设 H 是 G 的子轨形群胚. 我们下面证明 K_0 是 G_0 的光滑子流形. 任给一点 $x \in K_0 \setminus H_0$. 我们只需要证明存在它的一个 G_0 中开邻域 U_x 使得 $K_0 \cap U_x$ 是 U_x 的子流形.

我们首先可以取一个 $y \in H_0$ 使得存在箭头 $g : y \to x$. 我么给 x 取一个形如命题 3.6 的开邻域 U_x. 那么通过缩小 U_x 我们可以找到一个 y 的形如命题 3.6 中的邻域 U_y 以及一个通过 g 而得到的微分同胚 $t \circ s^{-1} : U_y \to U_x$. 而且此微分同胚是 $g(\cdot)g^{-1} : G_y \to G_x$ 等变的. 那么 $K_0 \cap U_x \cong H_0 \cap U_y$ 是 U_x 的光滑子流形.

充分性. 如果 K_0 是 G_0 的光滑子流形, 那么 $\mathsf{K} = (K_0, K_1 = s^{-1}(K_0))$ 是 G 的满子轨形群胚. 而 $s^{-1}(H_0), t^{-1}(H_0)$ 都是 K_1 的余维为 0 的子流形. 所以 $H_1 = s^{-1}(H_0) \cap t^{-1}(H_0)$ 是与 H_0 有相同余维的 G_1 的光滑子流形. 因此 $\mathsf{H} = (H_0, H_1)$ 是 G 的子轨形群胚. 证毕. □

4 轨形群胚上的向量丛

这一节我们考虑轨形群胚上的向量丛. 内容可参见 [1].

4.1 轨形丛

给定一个轨形群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$ 和一个 G_0 上的向量丛 $\pi_0 : E_0 \to G_0$, 我们可以得到两个 G_1 上的向量丛 $\pi_s : s^*E_0 \to G_1, \pi_t : t^*E_0 \to G_1$.

定义 4.1 给定一个丛 $\mathrm{Hom}(s^*E_0, t^*E_0) \to G_1$ 的截面 σ. 我们说 (E_0, σ) 是一个 G 上的*轨形向量丛*(*轨形丛*), 如果对任意的 $g \in G_1$, $\sigma(g) : E_{0s(g)} \to E_{0,t(g)}$ 是线性同构, 而且 $\sigma(g_1 g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)$.

从 σ 我们可以得到

$$E_1 \triangleq \{(v, w) \in s^*E_0 \times t^*E_0 | \sigma(\pi_s(v))(v) = w\} \cong \{(v, \sigma(g)) | v \in E_{0,s(g)}\}.$$

这是一个光滑的向量丛 $E_1 \to G_0$. 我们有显然的源映射 $s : E_1 \to E_0$, $s(v, w) = v$, 和目标映射 $t : E_1 \to E_0$, $t(v, w) = w$ 以及其它的 3 个结构映射. 可以直接验证带上这些结构映射 $\mathsf{E} = (E_0, E_1)$ 是一个轨形群胚. 而且我们有态射

$$\mathsf{E} = (E_0, E_1) \to \mathsf{G} = (G_0, G_1).$$

因此轨形丛就是一对满足一定相容性的向量丛. 在为了强调 σ 时我们就将丛记为 (E_0, σ).

定义 4.2 给定一个轨形丛 $\mathsf{E} = (E_0, E_1) \to \mathsf{G} = (G_0, G_1)$. 如果有两个向量丛 $E_i \to G_i$ 的截面 ξ_i 满足 $\xi_1 = s^*\xi_0 = t^*\xi_0$, 我们就称 $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ 是 $\mathsf{E} \to \mathsf{G}$ 的截面. 这等价于说 ξ_0 是 σ -不变的. 记 E 的截面的空间为 $\Gamma(\mathsf{E})$. 显然 G 是 E 的 0-截面.

定义 4.3 给定两个轨形丛 $\mathsf{E}^1 = (E_0^1, E_1^1) \to \mathsf{G}, \mathsf{E}^2 = (E_0^2, E_1^2) \to \mathsf{G}$. 一个*轨形丛映射* $f = (f_0, f_1) : \mathsf{E}^1 \to \mathsf{E}^2$ 是一个轨形群胚的态射且 $f_i : E_i^1 \to E_i^2$ 是流形上丛映射. 一个轨形丛映射自然诱导一个 0-截面之间的轨形态射 $\bar{f} : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$. 一个轨形丛态射 $f = (f_0, f_1) : \mathsf{E}^1 \to \mathsf{E}^2$ 被称为是*轨形丛同构*如果 f_0, f_1 都是丛同构且 $\bar{f} = id_{\mathsf{G}}$.

定义 4.4 给定一个轨形丛 $\mathsf{E} = (E_0, \sigma) \to \mathsf{G}$ 以及一个 $E_0 \to G_0$ 的子丛. 如果 σ 能够限制成为 $\mathrm{Hom}(s^*F_0, t^*F_0) \to G_1$ 的一个截面 σ_{F}, 我们就称 $(F_0, \sigma_{\mathsf{F}})$ 是 E 的*子轨形丛*, 并记为

$\mathsf{F}=(F_0,\sigma_{\mathsf{F}})$.

从 $\mathsf{F}=(F_0,\sigma_{\mathsf{F}})$ 我们可以得到 $\mathsf{F}=(F_0,F_1)$.

引理 4.5 $\mathsf{F}=(F_0,F_1)$ 是 $\mathsf{E}=(E_0,E_1)$ 的子轨形群胚.

因此子轨形丛的另一种看法就是 $E_0\to G_0, E_1\to G_1$ 的两个子丛 F_0,F_1. 它们组成了 E 的子轨形群胚 $\mathsf{F}=(F_0,F_1)$. 这样就称 $\mathsf{F}=(F_0,F_1)$ 是 E 的子轨形丛.

如果 F 是 $\mathsf{E}=(E_0,\sigma)$ 的子轨形丛. 那么 σ 保持 $F_0\subset E_0$. 因此我们有丛

$$\mathrm{Hom}(s^*(E_0/F_0),t^*(E_0/F_0))\to G_1$$

的截面 $[\sigma]$. 这样 $[\sigma]$ 和 E_0/F_0 就形成一个轨形丛.

定义 4.6 我们称 $(E_0/F_0,[\sigma])$ 为 E 关于子轨形丛 F 的商轨形丛, 并记之为 E/F.

显然我们有 $\mathsf{E}/\mathsf{F}=(E_0/F_0,E_1/F_1)$.

4.2 切丛和法丛

下面我们讨论轨形群胚的切丛, 子轨形群胚的法丛.

定义 4.7 假设 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 是轨形群胚. 它的切丛 $\mathsf{TG}\to\mathsf{G}$ 定义为

$$TG_1 \underset{dt}{\overset{ds}{\rightrightarrows}} TG_0$$

其中 $ds(g,v)=(s(g),ds_g(v))$, $dt(g,v)=(t(g),dt_g(v))$. 相应的丛 $\mathrm{Hom}(s^*TG_0,t^*TG_0)\to G_1$ 的截面为

$$\sigma_{\mathsf{TG}}(g)(g,v)=(g,dt_g\circ ds_g^{-1}(v)),\forall\ g\in G_1 \text{ 和 } v\ \in T_{s(g)}G_0.$$

定义 4.8 假设 H 是 G 的子轨形群胚. 它在 G 中的法丛定义为

$$\mathsf{N}_{\mathsf{H}}\triangleq(\ N_{1,\mathsf{H}}=TG_1|_{H_1}/TH_1 \underset{[dt]}{\overset{[ds]}{\rightrightarrows}} N_{0,\mathsf{H}}=TG_0|_{H_0}/TH_0\ )=\mathsf{TG}|_{\mathsf{H}}/\mathsf{TH},$$

其中 $[d_gs]([v])=[d_gs(v)],[d_gt]([v])=[d_gt(v)]$. 相应的丛 $\mathrm{Hom}(s^*N_{0,\mathsf{H}},t^*N_{1,\mathsf{H}})\to H_1$ 的截面是

$$\sigma_{\mathsf{N}_{\mathsf{H}}}(g)(g,[v])=(g,[d_gt\circ d_gs^{-1}(v)])=(g,[d_gt]\circ[d_gs]^{-1}([v])),\ \forall\ g\in G_1 \text{ 和 } [v]\ \in N_{s(g)}H_0.$$

5 管状邻域定理

我们首先给出轨形群胚 G 上的黎曼度量的定义.

定义 5.1 G 上的一个黎曼度量(或度量)是一个 G_0 上的 G_1-不变的度量 η, 即 $s^*\eta=t^*\eta$ 也是 G_1 上的黎曼度量. 等价的说, G 上的度量是一对 G_0 和 G_1 上的度量 (η_0,η_1), 满足 $s^*\eta_0=t^*\eta_0=\eta_1$.

Pflaum-Posthuma-Tang[10]对一类更广的李群胚构造了一类度量. 他们的结果表明

定理 5.2 ([10]) 任意一个轨形群胚 G 上总存在黎曼度量.

接下来我们考虑管状邻域.

假设 H 是 G 的子轨形群胚. 一个好的管状邻域应该满足下面的性质. 即是说, 对任意的 $g:x\to y,x,y\in H_0$, 此邻域在 x 和 y 处的宽度应该一致, 也即是说管状邻域的宽度在 H_0 的每个点的轨道上应该是常值. 然而一般地当 H 是满子轨形群胚时, 我们无法做到这一点. 不过通过找 G 中与 H 等价的子轨形群胚我们可以做到这一点.

例 5.3 令 D_i 为 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 $\frac{1}{i}$ 的圆盘, $i\in\mathbb{N}_{\geq 1}$. 令

$$G_0=\coprod_{i\geq 1}D_i,\quad G_1=\coprod_{i,j\geq 1}D_i\cap D_j.$$

我们有显然的源映射 $s:\coprod_{i,j}D_i\cap D_j\to\coprod_i D_i$ 将 $D_i\cap D_j$ 中元映到 D_i 中, 和目标映射 $t:\coprod_{i,j}D_i\cap D_j\to\coprod_i D_i$ 将 $D_i\cap D_j$ 中元映到 D_j 中, 以及其余 3 个显然的结构映射使得 (G_0,G_1) 成为一个轨形群胚. 事实上, 这个轨形群胚表示的是光滑流形: D_1. 标准的欧式度量给出了这个轨形群胚上一个黎曼度量.

记 D_i 中原点为 0_i. 则 $H_0=\coprod_i\{0_i\}$ 是一个 G_1-封闭的 G_0 的光滑子流形. 它给出一个 G 的满子轨形群胚

$$\mathsf{H}=(H_0,H_1=\coprod_{i,j}\{0_i,0_j\}).$$

显然这个子轨形只包含一个轨道, 然而这个轨道上的点的邻域没有一致的宽度.

我们可以取另一个子轨形群胚

$$\mathsf{K}=(\{0_1\},\{0_1,0_1\}).$$

显然 $\mathsf{K}\in\mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G})$. 而且 K 中轨道只含有一个点, 因此它有具有一致宽度的邻域.

我们可以将这一结果推广到一般情况.

定理 5.4 (轨形管状邻域定理) 假设 H 是 G 的余维数 $k\geq 1$ 的紧的子轨形群胚, $\eta=(\eta_0,\eta_1)$ 是 G 上黎曼度量. 那么一定存在一个子轨形群胚 $\mathsf{K}\in\mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G})$, 使得, 在 G 中存在一个 K 的开邻域 U, 以及一个保度量的微分同胚

$$\phi:D_\epsilon\mathsf{N}_{\mathsf{K}}\to\mathsf{U}.\tag{5.1}$$

其中, ϵ 是个正常数, $D_\epsilon\mathsf{N}_{\mathsf{K}}$ 是 K 的法丛 N_{K} 的半径为 ϵ 的圆盘丛. 我们还有一个收缩映射 $\rho:\mathsf{U}\to\mathsf{K}$ 及一个交换图

$$\begin{tikzcd} D_\epsilon\mathsf{N}_{\mathsf{K}} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathsf{U} \arrow[dl, "\rho"] \\ & \mathsf{K}. & \end{tikzcd}\tag{5.2}$$

证明 记 H 在 G 中的法丛为 N_{H}. 和流形情形类似, 我们可以通过度量 $\eta=(\eta_0,\eta_1)$ 将它等同于 $\mathsf{E}=\mathsf{TG}|_{\mathsf{H}}$ 的子丛, 即 TH 的正交补. 事实上, 令

$$N_i\triangleq\{v\in TG_i|\eta_i(v,w)=0,\forall w\in TH_i\},\quad i=0,1.$$

则由 $s^*\eta_0=t^*\eta_0=\eta_1$ 知 $\mathsf{N}\triangleq(N_1\rightrightarrows N_0)$ 是 E 的子丛, 且同构于法丛 N_{H}. 我们可以将 E 上的度量限制在 N 上, 并记之为 $\eta_{\mathsf{N}}=(\eta_{0,\mathsf{N}},\eta_{1,\mathsf{N}})$. 将 N 写成 $(N_0,\sigma_{\mathsf{N}})$, 那么度量 $\eta_{0,\mathsf{N}}$ 就是 σ_{N}-不变的. 显然我们可以将 H 等同于 N 的0-截面.

我们可以将 η 限制在 H 上得到 H 上的一个度量. 任给一点 $x\in H_0$, 我们可以找到一个常数 $\epsilon_x>0$ 和一个 H_0 中半径为 ϵ_x 的测地球 V_x, 以及一个开邻域 $x\in U_x\subset G_0$, 使得

$$\exp:B_x\triangleq D_{\epsilon_x}(N_0|_{V_x})\to U_x\supsetneq V_x\tag{5.3}$$

为微分同胚, 其中 $B_x\triangleq D_{\epsilon_x}(N_0|_{V_x})$ 是丛 $N_0|_{V_x}$ 半径为 ϵ_x 的圆盘丛.

由于 G 是轨形群胚, 由命题 3.6 知,对任意的 $x\in H_0$, 总存在一个它的 G_0 中的邻域 U_x', 使得 x 局部群 G_x 可以作用在 U_x' 上, 而且 $\mathsf{G}|_{U_x'}\cong G_x\ltimes U_x'$. 因此通过缩小 (5.3) 中的 ϵ_x, V_x 和 U_x, 我们可以假设这些 ϵ_x, V_x, U_x 满足

(1) $\exp: B_x\triangleq D_{\epsilon_x}(N_0|_{V_x})\to U_x\supsetneq V_x$ 是微分同胚,

(2) G_x 光滑作用在 U_x 上, 且 $\mathsf{G}|_{U_x}\cong G_x\ltimes U_x$.

令 V_x' 为 H_0 中以 x 为中心, $\epsilon_x/2$ 为半径的测地球, B_x' 为 $N_0|_{V_x'}$ 的半径为 $\epsilon_x/2$ 的圆盘丛. 我们记 B_x' 在指数映射 $\exp$ 下的像为 $U_x'\subset U_x$.

记到轨道空间的投射为 $\pi: G_0\to|\mathsf{G}|$. 任给一个轨道空间中的点 $|x|\in|\mathsf{H}|$, 我们可以取一个原象 $x\in H_0$, 这样我们就得到一对 x 的邻域 $x\in V_x'\subset U_x'$. 因此我们有一个 $|\mathsf{H}|$ 的开覆盖: $\{|V_x'|=\pi(V_x')\}$, 以及 $|\mathsf{H}|$ 在 $|\mathsf{G}|$ 中的一个开邻域的覆盖 $\{|U_x'|=\pi(U_x')\}$. 由假设, $|\mathsf{H}|$ 是紧的, 因此我们得到一个 $|\mathsf{H}|$ 的有限开覆盖 $\mathcal{V}=\{|V_{x_\alpha}'||\alpha\in\mathcal{A}\}$ 和它在 $|\mathsf{G}|$ 中的邻域的一个有限开覆盖 $\mathcal{U}=\{|U_{x_\alpha}'||\alpha\in\mathcal{A}\}$. 这里 $\#\mathcal{A}<\infty$.

取

$$\epsilon=\min\{\epsilon_{x_\alpha}/2|\alpha\in\mathcal{A}\}.$$

令

$$K_0=\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}U_{x_\alpha}'\right)\cap H_0=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}V_{x_\alpha}'.$$

那么显然 K_0 是 G_0 的光滑子流行且 $\mathsf{K}=\big(K_0,K_1=s^{-1}(K_0)\cap t^{-1}(K_0)\big)$ 是 G 的子轨形群胚. 从上面的构造我们知道 $|\mathsf{K}|=|\mathsf{H}|$, 因此 $\mathsf{K}\in\mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G})$.

由于 $\mathcal{U}$ 是有限开覆盖, 我们有

$$\#\pi^{-1}|x|\cap K_0<\infty,\ \text{且}\ \ \#s^{-1}(\pi^{-1}|x|)\cap K_1<\infty,\quad\forall\ \ |x|\in|\mathsf{H}|=|\mathsf{K}|.$$

现在我们将丛 $\mathsf{N_H}$ 限制在 K 上. 得到的丛即是 K 在 G 中的法丛 $\mathsf{N_K}$. 我们也将 N 限制在 K 上. 将得到的丛记为 $\mathsf{N}'=(N_0',N_1')=(N_0',\sigma_{\mathsf{K}})$. 则 $\mathsf{N}'\cong\mathsf{N_K}$.

由上面的构造知指数映射 $\exp$ 给出了 N_0' 的 0-截面的邻域

$$D_\epsilon N_0'=\{(x,v)\in N_0'|\sqrt{\eta_0(v,v)}<\epsilon,\ x\in K_0\}$$

到 K_0 在 G_0 中的某个邻域 U_0 的微分同胚. 而且 $U_0\subset\cup_{\alpha\in\mathcal{A}}U_{x_\alpha}'$. 令 $U_1\triangleq s^{-1}(U_0)\cap t^{-1}(U_0)$. 那么由例 3.5 知 $\mathsf{U}=(U_0,U_1)$ 是 G 的开子轨形群胚.

任给一个 $g\in K_1$, $g:x\mapsto y$, N_1' 在 g 上的纤维为

$$N_{1,g}'=\{v\in T_gG_1|\eta_1(v,w)=0,\forall\ w\in T_gK_1=T_gH_1\}.$$

考虑 N_1' 的半径为 ϵ 的圆盘丛

$$D_\epsilon N_1'\triangleq\{v\in N_{1,g}'|\sqrt{\eta_1(v,v)}<\epsilon,g\in K_1\}.$$

记 N' 的源映射和目标映射为 $s_{\mathsf{N}'},t_{\mathsf{N}'}$. 因为 $\mathsf{G}|_{U_x'}\cong G_x\ltimes U_x'$, 而且度量 η 是 σ_{K}-不变的, 所以

$$D_\epsilon N_1'=s_{\mathsf{N}'}^{-1}(D_\epsilon N_0')\cap t_{\mathsf{N}'}^{-1}(D_\epsilon N_0').$$

因此 $D_\epsilon\mathsf{N}'=(D_\epsilon N_0',D_\epsilon N_1')$ 是 N' 的一个子轨形群胚.

由我们的构造可知指数映射在 $D_\epsilon N_0'$ 和 $D_\epsilon N_1'$ 上都有定义. 直接验证可知

$$\exp(s(g),d_gs(w))=s(\exp(g,w)),\qquad\exp(t(g),d_gt(w))=t(\exp(g,w)).$$

从而指数映射给了我们一个态射

$$\exp : D_\epsilon \mathsf{N}' \to \mathsf{U}.$$

而且这是一个同构.

我们也可以取 $D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{K}$. 它与 $D_\epsilon \mathsf{N}'$ 同构. 记此同构为 $f : D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{K} \to D_\epsilon \mathsf{N}'$. 我们得到同构

$$\phi \triangleq \exp \circ f : D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{K} \to \mathsf{U}.$$

我们还有从投射 $p : \mathsf{N}_\mathsf{K} \to \mathsf{K}$ 和包含关系 $D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{K} \subset \mathsf{N}_\mathsf{K}$, 从而我们有 $p : D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{K} \to \mathsf{K}$. 那么从 ϕ 我们得到

$$\rho = p \circ \phi^{-1} : \mathsf{U} \to \mathsf{K}.$$

因此我们得到交换图 (5.2). 证毕. □

定义 5.5 我们称如上构造出的 K 在 G 中的邻域为*轨形(群胚)管状邻域*.

6 同伦公式

给定一个轨形群胚 $\mathsf{G} = (G_0, G_1)$. 我们也可以定义它的*余切丛* $\mathsf{T}^*\mathsf{G}$. 我们取 G_0 的余切丛 $T^*G_0 \longrightarrow G_0$, 和同态丛 $\mathrm{Hom}(s^*T^*G_0, t^*T^*G_0) \to G_1$ 的截面

$$\sigma_{\mathsf{T}^*\mathsf{G}}(g) = (t_g^*)^{-1} \circ s_g^*.$$

那么 G 的余切丛为 $\mathsf{T}^*\mathsf{G} = (T^*G_0, \sigma_{\mathsf{T}^*\mathsf{G}})$.

类似的, 对于 $0 \le k \le \dim \mathsf{G}$, 我们可以定义*外积丛* $\wedge^k \mathsf{T}^*\mathsf{G}$. 我们仍然有如下的等同

$$\wedge^k \mathsf{T}^*\mathsf{G} = (\ \wedge^k T^*G_1 \underset{\wedge^k (t^{-1})^*}{\overset{\wedge^k (s^{-1})^*}{\rightrightarrows}} \wedge^k T^*G_0\ ).$$

我们用 $\Omega^k(\mathsf{G})$ 来记从 $\wedge^k \mathsf{T}^*\mathsf{G}$ 的截面的空间. 称它里面的元素为*轨形 k-形式*. 一个轨形 k-形式是一对通常的 k-形式 $(\omega_0, \omega_1) \in \Omega^k(G_0) \times \Omega^k(G_1)$, 满足 $s^*\omega_0 = t^*\omega_0 = \omega_1$. 我们称这样的 ω_0 为 *G-不变 k-形式*. 因此

$$\begin{aligned}\Omega^k(\mathsf{G}) &= \{(\omega_0, \omega_1) \in \Omega^k(G_0) \times \Omega^k(G_1) | s^*\omega_0 = t^*\omega_0 = \omega_1 \in \Omega^k(G_1)\} \\ &= \{\omega_0 \in \Omega^k(G_0) | s^*\omega_0 = t^*\omega_0\}.\end{aligned}$$

通常的外微分算子 d 也可以作用在 $\Omega^*(\mathsf{G})$ 上:

$$d : \Omega^k(\mathsf{G}) \to \Omega^{k+1}(\mathsf{G}).$$

我们也有 $d^2 = 0$. G 的 de Rham 上同调群定义为

$$H^k_{dR}(\mathsf{G}) \triangleq \frac{\ker(d : \Omega^k(\mathsf{G}) \to \Omega^{k+1}(\mathsf{G}))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(\mathsf{G}) \to \Omega^k(\mathsf{G}))}$$

轨形情形的同伦公式与流形情形类似. 假设 H 是 G 的子轨形群胚, 且带有轨形管状邻域 $\mathsf{U} = (U_0, U_1)$, 即在取定一个度量后, 存在一个正常数 ϵ 使得 $\mathsf{U} \cong D_\epsilon \mathsf{N}_\mathsf{H}$.

定理 6.1 如果 $\omega = (\omega_0, \omega_1)$ 是一个 U 上的闭 k-形式, 即 $d\omega_i = 0, i = 0, 1$. 而且 $\omega(\mathsf{x}) = 0, \forall\, \mathsf{x} = (x, G_x) \in \mathsf{H}$, 那么 ω 是恰当的, 即是说, 存在一个 $\mu \in \Omega^{k-1}(\mathsf{U})$ 使得 $\omega = d\mu$. 更重要的是, 我们可以选取 μ 使得 $\mu(\mathsf{x}) = 0$, $\forall\, \mathsf{x} \in \mathsf{H}$.

这里 $\mu(\mathsf{x})=0$ 等价于 $\mu_0(x)=0$. 因为由 G-不变性, 自然有 $\mu_1(g)=0, \forall\, g\in U_1$.

证明 由于 $\mathsf{U}\cong D_\epsilon \mathsf{N_H}$, 我们只需要在 $D_\epsilon \mathsf{N_H}$ 上考虑这个问题. 显然由沿纤维进行放缩即可得到 $D_\epsilon \mathsf{N_H}\cong \mathsf{N_H}$. 因此我们下面直接在 $\mathsf{N_H}=(N_0,N_1)$ 上考虑这一问题. 记 $\mathsf{N_H}$ 的源映射和目标映射为 s 和 t. 记轨形丛投射为 $\pi=(\pi_0,\pi_1):\mathsf{N_H}\to\mathsf{H}$. 记 H 作为 $\mathsf{N_H}$ 的0-截面的包含映射为 $i^0=(i^0_0,i^0_1):\mathsf{H}\to\mathsf{N_H}$.

注意到, 我们有一族轨形群胚同态

$$\rho^\tau=(\rho^\tau_0,\rho^\tau_1):\mathsf{N_H}\to\mathsf{N_H},\quad (v_0,v_1)\mapsto(\tau v_0,\tau v_1),\ 0\le\tau\le 1.$$

其中 ρ^τ_0 是从 $i_0\circ\pi_0$ 到 id_{N_0} 的固定 H_0 的同伦, 而 ρ^τ_1 是从 $i_1\circ\pi_1$ 到 id_{N_1} 的固定 H_1 的同伦.

这里 ρ^τ_0 给我们一个同伦算子

$$Q_0(\eta_0)\triangleq\int_0^1\rho_0^{\tau,*}(\iota_{v_0^\tau}\eta_0)d\tau,\quad \forall\,\eta_0\in\Omega^k(N_0),$$

其中 v^τ_0 是由 $\rho^\tau_0(p)$ 生成的向量场, 即 $v^\tau_0(p)=\frac{d}{dt}\rho^t_0(p)|_{t=\tau}$. 这样我们有

$$dQ_0(\eta_0)+Q_0(d\eta_0)=\rho_0^{1,*}\eta_0-\rho_0^{0,*}\eta_0=\eta_0-i_0^{0,*}\eta_0. \tag{6.1}$$

令 $\mu_0=Q_0(\omega_0)$. 由于 ω 在 H 为 0, μ_0 在 H_0 上也为 0. 将 μ_0 代入 (6.1). 由于 $d\omega=0$, ω 在 H 为 0, 我们得到

$$d\mu_0=dQ_0(\omega_0)=dQ_0(\omega_0)+Q_0(d\omega_0)=\omega_0-i_0^{0,*}\omega_0=\omega_0.$$

下面我们证明 μ_0 是 $\mathsf{N_H}$-不变的. 注意到 ρ^τ_1 也给我们一个同伦算子

$$Q_1(\eta_1)\triangleq\int_0^1\rho_1^{\tau,*}(\iota_{v_1^\tau}\eta_1)d\tau,\quad \forall\,\eta_1\in\Omega^k(N_1)$$

其中 v^τ_1 由 $v^\tau_1(p)=\frac{d}{dt}\rho^t_1(p)|_{t=\tau}$ 决定. 因为 ρ^τ 是轨形群胚的态射, 我们有

$$ds(v^\tau_1)=v^\tau_0=dt(v^\tau_1).$$

因此

$$\begin{aligned}s^*\mu_0&=\int_0^1 s^*\rho_0^{\tau,*}(\iota_{v_0^\tau}\omega_0)d\tau=\int_0^1(\rho^\tau_0\circ s)^*(\iota_{v_0^\tau}\omega_0)d\tau=\int_0^1(s\circ\rho^\tau_1)^*(\iota_{v_0^\tau}\omega_0)d\tau\\&=\int_0^1\rho_1^{\tau,*}s^*(\iota_{v_0^\tau}\omega_0)d\tau=\int_0^1\rho_1^{\tau,*}(\iota_{v_1^\tau}s^*\omega_0)d\tau=Q_1(s^*\omega_0).\end{aligned}$$

类似可得

$$t^*\mu_0=Q_1(t^*\omega_0).$$

因为 ω_0 是 N-不变的, 因此

$$s^*\mu_0=t^*\mu_0=Q_1(\omega_1).$$

所以 μ_0 决定了 N 上一个 $k-1$-形式 $\mu=(\mu_0,\mu_1)$, 且 $\mu_1=Q_1(\omega_1)$, $d\mu=\omega$. 而且由 μ_0 的定义知 $\mu(\mathsf{x})=0,\forall\,\mathsf{x}\in\mathsf{H}$. 证毕. □

7 辛邻域定理和 Lagrangian 邻域定理

在这一节我们考虑辛轨形群胚, 我们将辛流形情形的辛邻域定理和 Lagrangian 邻域定理推广到辛轨形群胚上.

7.1 辛轨形群胚

定义 7.1 给定一个轨形群胚 G. 我们称一个 G-不变 2-形式 ω_0 为一个 G 上的*辛形式*, 如果它是 G_0 上的辛形式. 这样我们也可得到一个 G_1 上的辛形式 $\omega_1 = s^*\omega_0 = t^*\omega_0$. 等价地, G 上的*辛形式*是一个轨形 2-形式 $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in \Omega^2(\mathsf{G})$, 使得 ω_0, ω_1 分别是 G_0, G_1 上的辛形式.

一个轨形群胚 G 配上一个辛形式 $\omega = (\omega_0, \omega_1)$ 即被称为*辛轨形群胚*. 我们将它记为 (G, ω), 或 (G, ω_0), 或简记为 G.

两个辛轨形群胚之间的态射 $\phi : (\mathsf{G}, \omega) \to (\mathsf{H}, \rho)$ 被称为是*辛态射*, 如果 $\phi^*(\rho) = \omega$.

定义 7.2 假设 H 是 (G, ω) 的子轨形群胚. 如果 $\omega|_{\mathsf{H}} \in \Omega^2(\mathsf{H})$ 是 H 上的辛形式, 我们就称 $(\mathsf{H}, \omega|_{\mathsf{H}})$是 G 的*辛子轨形群胚*. 如果 $\omega|_{\mathsf{H}} = 0$ 且 $\dim \mathsf{H} = \frac{\dim \mathsf{G}}{2}$, 我们就称 H 为 G 的 *Lagrangian 子轨形群胚*, 或简称为 *Lagrangian*.

给定一个 (G, ω) 的辛子轨形群胚 H, 我们可以将它的法丛等同为 TH^ω, 即 TH 在 TG 中关于辛形式的零化部分. 如此一来, TH^ω 的纤维上就会带有自然的辛形式. 我们称这样的丛为*辛轨形丛*. 我们称一个辛轨形丛之间保持纤维的辛形式的轨形丛态射为*辛轨形丛态射*.

命题 7.3 如果 $\phi : \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{H}$ 是一个轨形群胚等价, 且 (G, ω) 是一个辛轨形群胚, 那么在 H 上有一个诱导的辛形式 ω', 使 $\phi : (\mathsf{G}, \omega) \to (\mathsf{H}, \omega')$ 成为一个辛态射.

证明 由引理 2.8 知, 当 ϕ 是等价时 $\phi_0 : G_0 \longrightarrow H_0$ 是局部微分同胚, 且 $|\phi| : |\mathsf{G}| \longrightarrow |\mathsf{H}|$ 是同胚. 因此, 我们可以将 ω_0 推到 $\phi_0(G_0) \subset H_0$ 上得到一个 2-形式 ω_0'. 显然 ω_0' 在 $\phi_0(G_0)$ 上非退化且闭.

下面我们将 ω_0' 延拓到整个 H_0. 任给一个点 $x \in H_0 \setminus \phi_0(G_0)$, 因为 ϕ 是等价, 一定存在一个点 $y \in \phi_0(G_0)$ 及一个箭头 $h \in H_1$ 使得 $h : y \to x$. 而 H 是轨形群胚, 所以 s_{H}, t_{H} 是局部微分同胚, 因此 $s^*_{\mathsf{H},h}$ 和 $t^*_{\mathsf{H},h}$ 在余切空间上都是同构. 我们定义

$$\omega_0'(x) = (t^*_{\mathsf{H},h})^{-1} \circ s^*_{\mathsf{H},h}(\omega_0'(y)).$$

直接验证即知这个扩张与 h 的选取无关, 而且 ω_0' 是 H_0 上的辛形式. 因为 ω_0 是 G-不变的, 因此

$$s^*_{\mathsf{H}}\omega_0' = t^*_{\mathsf{H}}\omega_0'.$$

所以我们得到一个 H 上的辛形式 $\omega' = (\omega_0', \omega_1' = s^*_{\mathsf{H}}\omega_0')$. 显然此时 ϕ 成为辛态射. 证毕. □

7.2 辛邻域定理

接下来我们考虑辛邻域定理. 在前面我们已经看到, 轨形的管状邻域一般不一定存在. 因此这里我们只考虑紧辛子轨形群胚的情形. 并且我们预先假设轨形管状邻域的存在性.

要考虑辛邻域, 我们首先需要考虑轨形群胚上向量场（即切丛的截面）的流. 假设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \Gamma(\mathsf{TG})$ 是 G 上的向量场. 因此 $ds(\xi_1) = dt(\xi_1) = \xi_0$.

我们考虑如下的 G_0 上的带柯西初始值的常微分方程

$$\frac{d}{d\tau}\phi_0(x,\tau) = \xi_0(\phi_0(x,\tau)), \quad \phi_0(x,0) = x, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad x \in G_0,$$

和 G_1 上的带柯西初始值的常微分方程

$$\frac{d}{d\tau}\phi_1(g,\tau) = \xi_1(\phi_1(g,\tau)), \quad \phi_1(g,0) = g, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad g \in G_1.$$

任意给定一个 $g\in G_1, g: x\to y$. 假设 $\gamma(\tau)$ 是 ξ_1 的以 g 为起始点的积分曲线, 即

$$\gamma(\tau)=\phi_1(g,\tau):(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow G_1,\ \gamma(0)=g.$$

这样我们得到 G_0 中一条过 x 的曲线 $\eta(\tau)=s(\gamma(\tau)),\eta(0)=x$. 而且

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau)=d_{\gamma(\tau)}s(\frac{d}{d\tau}\gamma(\tau))=d_{\gamma(\tau)}s(\xi_1(\gamma(\tau)))=\xi_0(s(\gamma(\tau)))=\xi_0(\eta(\tau)).$$

因此 $\eta(\tau)$ 是 X_0 的以 x 为初始点的积分曲线. 类似地, $t(\gamma(\tau))$ 是 X_0 的以 y 为初始点的积分曲线. 因此我们有

$$s\circ\phi_1(g,\tau)=\phi_0(s(g),\tau),\quad t\circ\phi_1(g,\tau)=\phi_0(t(g),\tau).$$

如此我们证明了下面的命题

命题 7.4 对充分小的 τ, $\phi_\tau=(\phi_{0,\tau},\phi_{1,\tau})$ 是 G 的自同构.

定理 7.5 (相对 Moser 定理) 假设 H 是 G 的余维 $k\geq 1$ 的紧子轨形群胚, 且带有轨形管状邻域 $\mathsf{U}\subset\mathsf{G}$. 如果有 G 上两个辛形式 ω^0 和 ω^1 使得

$$\omega^0|_{\mathsf{TG_x}}=\omega^1|_{\mathsf{TG_x}},\quad \forall \mathsf{x}\in\mathsf{H}.$$

那么存在一个 $\mathsf{K}\in\mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G}),\mathsf{K}\subset\mathsf{H}$ 以及两个更小的 K 的轨形管状邻域 $\mathsf{U}^0,\mathsf{U}^1\subset\mathsf{U}$ 以及一个同构 $\phi:\mathsf{U}^0\longrightarrow\mathsf{U}^1$ 使得

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{U}^0 \arrow[rr, "\phi"] & & \mathsf{U}^1 \\
& \mathsf{K} \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

交换, 且 $\phi^*\omega^1=\omega^0$.

证明 不妨假设,在 G 上某个度量 η 下 U 同构于的 H 的法丛 N 的半径为 ϵ 的圆盘丛 $D_\epsilon\mathsf{N}$. 这里我们仍将 N 等同于 TH 在 TG 中度量 η 下的正交补.

由假设, $\omega^0-\omega^1$ 是 U 上的闭形式, 且 $\omega^0(\mathsf{x})-\omega^1(\mathsf{x})=0,\forall\,\mathsf{x}\in\mathsf{H}$. 因此由同伦公式（参见定理 6.1）知, 存在一个 1-形式 $\mu\in\Omega^1(\mathsf{U})$ 使得 $d\mu=\omega^0-\omega^1$ 且 $\mu(\mathsf{x})=0,\forall\,\mathsf{x}\in\mathsf{H}$.

考虑一族 U 上的闭 2-形式 $\omega^\tau=(1-\tau)\omega^0+\tau\omega^1=\omega^0-\tau d\mu$. 由假设, $|\mathsf{H}|$ 是紧的, 且 $\forall\,\mathsf{x}\in\mathsf{H},\omega^0|_{\mathsf{TG_x}}=\omega^1|_{\mathsf{TG_x}}$, 因此存在一个 $0<\epsilon'<\epsilon$ 使得在 $\mathsf{U}'=(U_0',U_1')\cong D_{\epsilon'}\mathsf{N}$ 上这一族 2-形式 ω^τ 都是辛形式. 因此存在唯一的 U' 上的向量场 $\xi^\tau=(\xi_0^\tau,\xi_1^\tau)$ 使得

$$\iota_{\xi^\tau}\omega^\tau=-\mu.$$

特别地, 因为在 H 上 $\mu=0$, 所以在 H 上 $\xi^\tau=0$.

现在对每一个 $x\in H_0$, 都存在一个它的邻域 $U_x\subset U_0'\subset G_0$ 和一个它的邻域 $V_x\subset H_0$ 使得存在一个常数 $0<\epsilon_x<\epsilon'$ 及一个微分同胚

$$\exp: D_{\epsilon_x}N_0|_{V_x}\to U_x,$$

而且 ξ_0^τ 在 U_x 上的积分曲线对时间 $0\leq\tau\leq 1$ 都存在. 我们还可以缩小 U_x 使得 $\mathsf{G}|_{U_x}=G_x\ltimes U_x$. 这样 ξ_1^τ 在 $s^{-1}(U_x)\cap t^{-1}(U_x)$ 上的积分曲线也对时间 $0\leq\tau\leq 1$ 都存在.

这样 $\{|V_x||x\in H_0\}$ 形成了一个 $|\mathsf{H}|$ 的开覆盖. 由于 $|\mathsf{H}|$ 是紧的, 我们可以取一个有限子覆盖 $\{|V_{x_\alpha}|\alpha\in\mathcal{A}\}$. 令

$$\epsilon_K=\min\{\epsilon_{x_\alpha}\big|\alpha\in\mathcal{A}\}.$$

现在我们取

$$K_0 = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{x_\alpha}.$$

则我们有一个 $\mathsf{K} = \big(K_0, s^{-1}(K_0) \cap t^{-1}(K_0)\big) \in \mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G})$, 且 $\mathsf{K} \subset \mathsf{H}$. 我们可以将 N 限制在 K 上, 再取它的 ϵ_K 半径的圆盘丛 $D_{\epsilon_K}\mathsf{N}|_{\mathsf{K}}$. 通过指数映射, 我们可以得到 $\mathsf{U}^0 = \exp(D_{\epsilon_K}\mathsf{N}|_{\mathsf{K}}) \subset \mathsf{U}$. 而且此时向量场 $\xi^\tau|_{\mathsf{U}^0}$ 在 U^0 上有时长为 1 的积分曲线 $\rho^\tau, 0 \le \tau \le 1$.

令 $\phi = \rho^1, \mathsf{U}^1 = \rho^1(\mathsf{U}^0)$. 则有同构 $\phi: \mathsf{U}^0 \to \mathsf{U}^1$. ϕ 保持 K 不动, 且 $\phi^*\omega^1 = \omega^0$. 证毕. □

定理 7.6 (辛邻域定理) 对 $j = 0,1$, 令 (G^j, ω^j) 是两个辛轨形群胚, 且各自带一个实余维 $2k \ge 2$ 的紧辛子轨形群胚 H^j. 将它们的法丛分别记为 $\mathsf{N}^j = (\mathsf{TH}^j)^{\omega^j}$. 假设我们有一个辛轨形丛同构 $\Phi: \mathsf{N}^1 \to \mathsf{N}^2$, 且它诱导的 0-截面的轨形群胚态射为辛轨形群胚同构 $\phi: (\mathsf{H}^1, \omega^1|_{\mathsf{H}^1}) \to (\mathsf{H}^2, \omega^2|_{\mathsf{H}^2})$. 那么存在 $\mathsf{K}^j \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^j, \mathsf{G}^j), \mathsf{K}^j \subset \mathsf{H}^j$, 以及它们各自在 G^j 中的开邻域 U^j 和一个辛轨形同构 $\psi: (\mathsf{U}^1, \omega^1) \to (\mathsf{U}^2, \omega^2)$ 使得 $\psi|_{\mathsf{K}^1} = \phi|_{\mathsf{K}^1}$, 且在 $\mathsf{N}^1|_{\mathsf{K}^1}$ 上有 $d\psi = \Phi$.

证明 首先我们分别在 G^j 上各取一个黎曼度量 η^j. 因为 H^1 是紧子轨形群胚, 由定理 5.4 我们可以找到一个 $\mathsf{X}^1 \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^1, \mathsf{G}^1), \mathsf{X}^1 \subset \mathsf{H}^1$ 使得它带有轨形管状邻域 $\mathsf{W}^1_{\mathsf{X}}$ 及同构 $\exp^1: D_{\epsilon^1_{\mathsf{X}}}\mathsf{N}^1|_{\mathsf{X}^1} \to \mathsf{W}^1_{\mathsf{X}}$, 其中 ϵ^1_{X} 为正常数. 因为 $\phi: \mathsf{H}^1 \to \mathsf{H}^2$ 为同构, 记 $\mathsf{X}^2 = \phi(\mathsf{X}^1)$. 那么 $\mathsf{X}^2 \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^2, \mathsf{G}^2), \mathsf{X}^2 \subset \mathsf{H}^2$. 然后我们可以找到 $\mathsf{Y}^2 \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^2, \mathsf{G}^2), \mathsf{Y}^2 \subset \mathsf{X}^2 \subset \mathsf{H}^2$, 使得它带有轨形管状邻域 $\mathsf{W}^2_{\mathsf{Y}}$ 及同构 $\exp^2: D_{\epsilon^2_{\mathsf{Y}}}\mathsf{N}^2|_{\mathsf{Y}^2} \to \mathsf{W}^2_{\mathsf{Y}}$,其中 ϵ^2_{Y} 为正常数. 然后我们令 $\mathsf{Y}^1 = \phi^{-1}(\mathsf{Y}^2)$. 则 $\mathsf{Y}^1 \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^1, \mathsf{G}^1), \mathsf{Y}^1 \subset \mathsf{X}^1 \subset \mathsf{H}^1$, 且也带有轨形管状邻域 $\mathsf{V}^1_{\mathsf{Y}} = \exp^1(D_{\epsilon^1_{\mathsf{X}}}\mathsf{N}^1|_{\mathsf{Y}^1}) \subset \mathsf{W}^1_{\mathsf{X}}$.

通过适当缩小 ϵ^1_{X} 我们有轨形群胚嵌入

$$\varphi = \exp^2 \circ \Phi \circ (\exp^1)^{-1}: \mathsf{V}^1_{\mathsf{Y}} \hookrightarrow \mathsf{W}^2_{\mathsf{Y}}$$

使得 φ 的像是 $\mathsf{W}^2_{\mathsf{Y}}$ 中的开子轨形群胚, 且 φ 是 $\mathsf{V}^1_{\mathsf{Y}}$ 到它的像的同构. 由指数映射的构造知 $\varphi|_{\mathsf{Y}^1} = \phi|_{\mathsf{Y}^1}$, 且在 N^1 上 $d\varphi = \Phi$. 现在我们将 ω^2 用 φ 拉回到 $\mathsf{V}^1_{\mathsf{Y}}$ 上得到 $\varphi^*\omega^2$. 因为 Φ 为辛轨形丛同构, 我们有 $\omega^1(\mathsf{x}) = \varphi^*\omega^2(\mathsf{x}), \forall\, \mathsf{x} \in \mathsf{Y}^1$. 因此我们来到了定理 7.5 的情形. 因此我们可以找到 $\mathsf{K}^1 \in \mathfrak{M}(\mathsf{H}^1, \mathsf{G}^1), \mathsf{K}^1 \subset \mathsf{Y}^1 \subset \mathsf{H}^1$, 以及它的 2 个管状邻域 $\mathsf{U}^1, \mathsf{V}^2 \subset \mathsf{V}^1_{\mathsf{Y}}$ 和一个保持 K^1 不动的同构 $\rho: \mathsf{U}^1 \to \mathsf{V}^2$ 使得在 U^1 上

$$\rho^*(\varphi^*\omega^2) = \omega^1.$$

现在取 $\mathsf{U}^2 = \varphi(\mathsf{V}^2)$, 则我们有同构

$$\psi = \varphi \circ \rho: (\mathsf{U}^1, \omega^1) \to (\mathsf{U}^2, \omega^2),$$

且 $\psi|_{\mathsf{K}^1} = \varphi|_{\mathsf{K}^1} = \phi|_{\mathsf{K}^1}$.

又因为在 K^1 上 $\omega^1(\mathsf{x}) = \varphi^*\omega^2(\mathsf{x})$, 所以由定理 7.5 的证明可知在限制在 $\mathsf{N}^1|_{\mathsf{K}^1}$ 上之后 $d\rho = id$. 因此在 $\mathsf{N}^1|_{\mathsf{K}^1}$ 上我们有 $d\psi = \Phi$. 证毕. □

注 7.7 一个特殊的情形就是 $\mathsf{H} = \{\mathsf{x}\}$ 只是 G 中一个点, 那么得到的辛邻域实际上就是等变的 Darboux 定理.

7.3 Lagrangian 邻域定理

下面我们将 Weinstein 的 Lagrangian 邻域定理推广到轨形群胚上.

定理 7.8 (Lagrangian 邻域定理) 假设 H 是 G 的半维数的紧子轨形群胚. 包含映射记为 $i: \mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{G}$. 如果 ω^0 和 ω^1 是 G 上两个辛形式使得 $i^*\omega^0 = i^*\omega^1 = 0$, 即 H 分别是(G, ω^0) 和 (G, ω^1) 的 Lagrangian.

那么存在一个 $\mathsf{K} \in \mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G}), \mathsf{K} \subset \mathsf{H}$ 和它的两个轨形管状邻域 U^0 与 U^1 以及一个轨形群胚同构 $\phi : \mathsf{U}^0 \longrightarrow \mathsf{U}^1$ 使得

$$\begin{tikzcd} \mathsf{U}^0 \arrow[rr, "\phi"] & & \mathsf{U}^1 \\ & \mathsf{K} \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

交换, 且 $\phi^*\omega^1 = \omega^0$.

证明 我们首先在 G 上取一个黎曼度量. 对任一点 $\mathsf{x} \in \mathsf{H}$, 令 $\mathsf{V_x} = \mathsf{TG_x} = (TG_{0,x}, TG_{1,G_x})$, $\mathsf{U_x} = \mathsf{TH_x} = (TH_{0,x}, TH_{1,H_x})$. 注意到这里由子轨形群胚的定义有 $G_x = H_x$. 设 $\mathsf{W_x} = \mathsf{U_x^\perp}$ 是 $\mathsf{U_x}$ 在 $\mathsf{V_x}$ 中的正交补. 因为 $i^*\omega^0 = i^*\omega^1 = 0$, $\mathsf{U_x}$ 是 $(\mathsf{V_x}, \omega_{\mathsf{x}}^0)$ 与 $(\mathsf{V_x}, \omega_{\mathsf{x}}^1)$ 的线性 Lagrangian 子空间. 由标准的辛线性代数知存在一个标准的线性同构 $L_\mathsf{x} : \mathsf{TG_x} \longrightarrow \mathsf{TG_x}$ 满足 $L_\mathsf{x}|_{\mathsf{TH_x}} = Id_{\mathsf{TH_x}}$ 和 $L_\mathsf{x}^*\omega_\mathsf{x}^1 = \omega_\mathsf{x}^0$. 这里因为黎曼度量是 G-不变的, 因此原本辛线性代数给出的 $TG_{0,x}$ 的自同构能够做成 G_x-不变的, 因此我们能得到 L_x. 因为, 黎曼度量是光滑的, 所以 $\mathsf{U_x}$ 关于 x 光滑变化的, 从而 L_x 关于 x 也是光滑变化的.

因此我们得到一个光滑的轨形丛映射 $L : T\mathsf{G}|_\mathsf{H} \to T\mathsf{G}|_\mathsf{H}$, 且在子丛 $T\mathsf{H}$ 上是恒等, 还满足 $L^*\omega^1 = L^*\omega^0$. 因此由定理 7.5 和定理 7.6 的构造知, 存在一个 $\mathsf{K}' \in \mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G})$, $K' \subset \mathsf{H}$, 它的两个轨形管状邻域 $\mathsf{U}^{0'}$ 和 $\mathsf{U}^{1'}$, 以及一个轨形群胚的同构 $\psi : \mathsf{U}^{0'} \longrightarrow \mathsf{U}^1$ 使得 ψ 限制在 K' 上是恒等, 且对于任意 $\mathsf{x} \in \mathsf{K}'$ 在 $T\mathsf{G_x}$ 上有 $(\psi^*\omega^1)(\mathsf{x}) = \omega^0(\mathsf{x})$. 那么由定理 7.5 知, 存在一个 $\mathsf{K} \in \mathfrak{M}(\mathsf{H},\mathsf{G}), \mathsf{K} \subset \mathsf{K}' \subset \mathsf{H}$, 它的两个轨形管状邻域 $\mathsf{U}^{0''}$ 与 U^0, 以及一个保持 K 不变的轨形群胚同构 $\varphi : \mathsf{U}^{0''} \longrightarrow \mathsf{U}^0$ 使得 $\varphi^*\omega^0 = \psi^*\omega^1$, 其中 $\mathsf{U}^{0''} \subset \mathsf{U}^{0'}$.

现在我们令$\mathsf{U}^1 = \psi \circ \varphi^{-1}(\mathsf{U}^0)$. 那么 $\phi : \mathsf{U}^0 \longrightarrow \mathsf{U}^1$ 是一个保持 K 不变的轨形群胚同构, 而且

$$\phi^*\omega^1 = (\varphi^{-1})^*\psi^*\omega^1 = \omega^0.$$

证毕. □

注 7.9 事实上, 在构造辛邻域和 Lagrangian 邻域时, 我们还可以通过除去一些 G 中的点得到新的 $\mathsf{G}' \in \mathfrak{M}(\mathsf{G},\mathsf{G}), \mathsf{G}' \subset \mathsf{G}$, 使得上面定理中构造的 K 成为 G' 中的满子轨形群胚.

参 考 文 献

[1] Adem A., Leida J., Ruan Y., Orbifolds and stringy topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Cannas da Silva A., Lectures on symplectic geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[3] Chen B., Hu S., A de Rham model for Chen-Ruan cohomology ring of abelian orbifolds, *Math. Ann.*, 2006, **336**(1): 51–71.

[4] Chen W., Ruan Y., A new cohomology theory of orbifold, *Comm. Math. Phys.*, 2004, **248**(1): 1–31.

[5] Chen W., Ruan Y., Orbifold Gromov-Witten theory, *Cont. Math.*, 2002, **310**: 25–86.

[6] Mackenzie K. C. H., Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] Mackenzie K. C. H., General theory of Lie groupoids and Lie algebroids, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[8] Moerdijk I., Pronk D., Orbifolds, sheaves and groupoids, *K-theory*, 1997, **12** (1): 3–21.

[9] Moerdijk I., Pronk D., Simplcial cohomolgy of orbifolds, *Indag. Math. (N.S.)*, 1999, **10**(2): 269–293.

[10] Pflaum M. J., Posthuma H., Tang X., Geometry of orbit spaces of proper Lie groupoids, *J. Reine Angew. Math.*, 2014, **2014** (694):49–84.

[11] Warner F. W., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] Satake I., On a generalization of the notion of manifold, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1956, **42** (6): 359–363.