



可允许度量下有限能量辛涡旋的渐近行为

献给钱敏教授 90 华诞

陈柏辉¹, 王百灵^{2*}, 王蕊^{3†}

1. 四川大学数学学院, 长江数学中心, 成都 610064;

2. Department of Mathematics, Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia;

3. Department of Mathematics, University of California at Irvine, Irvine, CA 92697-3875, USA

E-mail: bohui@cs.wisc.edu, bai-ling.wang@anu.edu.au, ruiwang@berkeley.edu

收稿日期: 2017-10-23; 接受日期: 2019-09-02; 网络出版日期: 2020-03-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431001, 11821001 和 11890663) 资助项目

摘要 假设 (X, ω) 是一个具有紧致单连通 Lie 群 G Hamilton 作用的紧致光滑辛流形. 本文证明只要 Riemann 面的柱形端口具有一个比标准柱形度量增长速度快的线性度量, 那么任何一个有限能量辛涡旋将以指数衰减的速度收敛到辛流形 X 在正则值辛约化的扭曲分支或非扭曲分支上. 本文结果无需假设群 G 在正则水平集上的作用是自由的. 因此, 它直接推广了 Ziltener 在群作用自由的假设下得出的相关结果. 本文结果在作者关于量子化 Kirwan 同态的系列工作中有重要应用.

关键词 辛约化 Hamilton Gromov-Witten 理论 辛涡旋方程 渐近行为 可允许度量

MSC (2010) 主题分类 53D20, 53D45

1 引言和主要结果

假设 (X, ω) 是一个紧致光滑辛流形. G 是一个连通紧 Lie 群, 它的 Lie 代数用 $\mathfrak{g}$ 表示. 称群 G 以 Hamilton 的方式作用在辛流形 (X, ω) 上并以函数 $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}$ 作为矩映射 (moment map), 如果它们满足:

(1) 群 G 在 X 上的作用是光滑的, 下文将用

$$\ell: G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \ell_g(x) =: gx$$

来表示这个作用;

†当前地址: Department of Mathematics, University of California at Berkeley, Berkeley, CA 94720-3840, USA.

英文引用格式: Chen B H, Wang B-L, Wang R. The asymptotic behavior of finite energy symplectic vortices with admissible metrics (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1–28, doi: [10.1360/N012017-00235](https://doi.org/10.1360/N012017-00235)

(2) 矩映射 $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}$ 是一个恰当 (proper) 的光滑映射, 并且关于 G 在 X 上的作用以及 G 在 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的共轭作用 (adjoint action) 是 G - 等变的 (G -equivariant), 即

$$\mu(\ell_g(x)) = \text{Ad}_g(\mu(x)), \quad \text{对于任意 } g \in G, \quad x \in X;$$

(3) 群 G 作用称为 Hamilton 的, 如果 $\iota_{X_\xi}\omega = \langle d\mu(\cdot), \xi \rangle$, 其中 X_ξ 表示元素 $\xi \in \mathfrak{g}$ 在 X 生成的无穷小向量场, 即

$$X_\xi(x) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \ell_{\exp(\epsilon\xi)}(x),$$

而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的共轭作用不变的正定内积.

从 Hamilton 作用的定义可知, 对于同一个 Hamilton 作用, 矩映射并非唯一确定, 而是可以用任意 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的中心元素来平移得到的. 本文固定一个矩映射 μ , 并且只考虑其在零正则值 (regular value) 的辛约化 (symplectic reduction). 但明显地, 本文中的所有结果可应用于任何中心正则值处的辛约化.

根据定义, 零点水平集 (level set) $\mu^{-1}(0)$ 是紧致并且 G - 不变的. 而零点为正则值的假设进一步保证了水平集 $\mu^{-1}(0)$ 是 X 的余维数为 $\dim G$ 的紧致光滑子流形, 并且群 G 局部自由 (locally free) 地作用于其上. 由此得到 $(\mu^{-1}(0), \omega|_{\mu^{-1}(0)})$ 是 (X, ω) 的余迷向子流形 (coisotropic submanifold), 并且 $\ker \omega|_{\mu^{-1}(0)}$ 是无穷小 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 作用生成的子切丛. 因此, 商空间 $M := \mu^{-1}(0)/G$ 就具有了辛轨形 (symplectic orbifold) 结构. 在文献中, M 一般称为 Marsden-Weinstein 辛约化或简称为辛约化.

为了在辛流形 (X, ω) 以及它的辛约化 M 上建立 HGW (Hamiltonian-Gromov-Witten) 理论或者相关的 Floer 理论, 我们需要引入一个相容于群 G 作用的近复结构 J . 本文选择并固定一个 G - 不变并且与辛结构相容的近复结构. 由群 G 的紧性以及任意辛流形相容近复结构的存在性易知, 这样的近复结构一定存在. 进而, 这个近复结构 J 诱导了辛轨形 M 上的相容近复结构. 从现在起, 我们使用六元组 $(X, \omega, J, G, \mu, M)$ 来表示以上描述的几何结构. 用 $(\bar{\omega}, \bar{J})$ 来表示辛约化 M 上的近 Kähler 轨形结构.

21 世纪初, Chen 和 Ruan [1] 引入了辛轨形的 GW (Gromov-Witten) 理论, 这一理论现在一般被称为量子 Chen-Ruan 轨形理论 (quantum Chen-Ruan orbifold theory). 它是一个关于近复轨形的惯性 (inertia) 轨形的理论. 也就是说, 它不仅涵盖了近复轨形本身的信息, 即非扭曲分支 (untwisted sector) 部分的信息, 也包括了扭曲分支 (twisted sector) 部分的信息. 事实上, 任何关于辛轨形的模空间理论都必须将扭曲分支部分考虑进去, 这就需要证明, 任何一个模空间中的元素都能够以适当的方式收敛到辛轨形的扭曲分支或非扭曲分支 (关于考虑扭曲分支的重要性, 也可以在可类比轨形 GW 理论的 Fan-Jarvis-Ruan-Witten 理论 [2] 中被清晰地看到).

文献 [3] 利用标准柱形度量下辛涡旋构成的模空间的 L^2 理论为辛约化轨形 $(M, \bar{\omega})$ 建立了一个新的 (指不同于 GW 方式定义的量子上同调环) 量子轨形上同调环结构. 特别地, 模空间构造中重要的一步是证明一个在端口具有标准柱形度量的有限能量辛涡旋在以适当的规范变换后会以指数衰减的方式收敛到辛约化的扭曲分支或非扭曲分支上. 进而, 研究它与 M 上的 GW 理论的关系就成为了一个很有意义的课题. 本文推广以上渐近收敛结果至更为一般的情形, 即包括所有可以在每个半柱形端口 $[0, \infty) \times S^1$ 被写作

$$e^{2bt}(dt^2 + d\theta^2), \quad b \geq 0, \quad \theta \in S^1$$

的 Kähler 度量. 本文将这样的度量称为可允许 (admissible) 的度量.

称 $X \times \mathfrak{g}$ 中的具有形式

$$x_\infty = (\exp(-\theta\eta_\infty)z_0, \eta_\infty), \quad z_0 \in \mu^{-1}(0), \quad \eta_\infty \in \mathfrak{g}$$

的闭路 (loop) 为一个具有常值联络的临界闭路 (critical loop) (参见定义 4.1). 它可等同于 M 的扭曲分支或非扭曲分支中的一个元素. 本文中, 我们证明了下述定理.

定理 1.1 假设 $(P, w) = (P, u, A)$ 是定义在具有可允许度量 h 的有 k 个孔 (puncture) 的 Riemann 曲面 (Σ, j) 上的一个有限能量辛涡旋, 则存在规范变换 $\Phi \in \mathcal{G}_P$ 和 k 个常值联络临界闭路 $x_\infty^i = (z_\infty^i, \eta_\infty^i)$, 以及仅依赖于几何结构 $(X, \omega, G, \mu, J, M)$ 的常数 $\delta_i > 0, i = 1, \dots, k$, 使得 $\Phi \cdot w = (\Phi^*u, \Phi^*A)$ 在孔邻域柱坐标下满足时间规范 (temporal), 并且对于任意 $\theta \in S^1$ 有如下估计: 存在常数 $C > 0$, 使得

$$(1) |d_{\Phi^*A}\Phi^*u(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t};$$

$$(2) |\mu(\Phi^*u)(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t - bt};$$

$$(3) |F_{\Phi^*A}(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t + bt};$$

$$(4) \|\text{dist}(\Phi \cdot u(t, \cdot), z_\infty(\cdot))\|_{L^p(S^1)} + \|\Phi^*A(t, \cdot) - \eta_\infty(\cdot)\|_{L^p(S^1)} \leq Ce^{-(\delta + b(\frac{2}{p} - 1))t}, \text{ 只要 } b, p \text{ 和 } \delta \text{ 满足 } p \geq 2 \text{ 并且 } \delta + b(\frac{2}{p} - 1) > 0.$$

在上述表达中, 我们使用了 $z_\infty, \eta_\infty, \delta$ 和 b 来代表相应的具有下标 i ($i = 1, \dots, k$) 的闭路、联络、指数常数和度量常数.

更进一步, 此处的 δ_i ($i = 1, \dots, k$) 可以被取作任何小于 $\frac{1}{|\text{Hol}_{\eta_i}|}$ 的正数, 其中 $|\text{Hol}_{\eta_i}|$ 表示联络形式 η_i 的和乐元 (holonomy) 在 G 中的阶数 (order).

由此, 我们证明了任何一个具有可允许度量的有限能量辛涡旋在一定的规范变换后都会在每个半柱形端口以指数衰减的方式渐近收敛到辛约化的扭曲分支或非扭曲分支中的点. 其衰减的指数可取至任何一个小于形式 Hessian 算子第一非零特征值的正数 (关于这一点, 详见命题 4.1). 关于此定理更详细的叙述以及其他相关结果, 参见命题 4.1、6.1 和推论 6.1.

从技术的观点看, 本文改进了文献 [4, 5] 中的证明技术, 并在此基础上推广了以下已有结果.

(1) 它去掉了文献 [4, 5] 渐近性质研究中关于群作用必须是自由的这一约束条件 (Kähler 流形或 $\mathbb{C}^n$ 中仿射 (affine) 辛涡旋的相应结果在文献 [6, 第 4 和 5 节] 中有简略描述. 本文的处理与之不同).

(2) 它将文献 [3] 中的渐近收敛性结果推广为包含更为广泛的端口度量. 在本文中, 这对应于将 $b = 0$ 的情形推广到任意 $b \geq 0$ 的情形, 其中, 仿射 (affine) 涡旋对应于 $b = 1$ 情形.

一般说来, “平移不变 (translation invariant) 的进化型 (evolution type) 椭圆偏微分方程的有限能量解在 Morse-Bott 条件下指数收敛” 这一结果为专家所熟知. 对于我们现在考虑的方程来说, 平移不变性对应于标准柱形度量情形, 也就是 $b = 0$ 的情形. 对于这种情形, 标准的做法是, 首先依靠平移不变性获得一个一致收敛的平移子列, 然后借助 Morse-Bott 条件获得指数收敛估计. 但是在更为一般的 $b > 0$ 情形下, 方程不再是平移不变的, 这种一般方法就失去了可行性. 在本文的证明过程中, 我们力图展现一种证明此类进化型椭圆方程指数收敛的普适方法. 特别地, 它的证明包括以下两个要素: 能量密度函数的先验估计和 Morse-Bott 条件. 本文避免了对这两个要素的重复使用 (这点与文献 [4, 5] 中的证明策略有所不同). 本文的整体方法可以推广到其他具有 Morse-Bott 条件的进化型椭圆方程.

从应用的观点看, 定理 1.1 是本文作者在文献 [3] 中提出的构造量子 Kirwan 同态的必要一步. 另外, 本文中对于辛约化几何结构的研究对理解辛约化相关的模空间构造起到了重要作用. 这些将在作者的后续工作中得以体现.

注 1.1 (辛涡旋在辛拓扑研究中的相关历史简要回顾) 使用辛涡旋研究具有 Hamilton 作用的辛流形的辛拓扑性质起始于 Cieliebak 等 [7] 和 Mundet-i-Riera [8, 9] 在 21 世纪初的开创性工作. Gaio 和

Salamon^[10] 提出了利用辛涡旋模空间构造量子 Kirwan 同态的纲要. 这一提议随后在 Ziltener^[11] 对辛流形和 Woodward^[12-14] 对代数流形的研究中得以发展. 更多辛涡旋相关工作参见文献 [15-18] 以及其中列举的文献.

在文献 [3] 中, 本文作者提出了一种与文献 [10] 不同的量子化 Kirwan 同态的方法. 尽管本文的结果是这一系列工作中必要的一步, 但我们指出, 此结果具有独立意义, 并对上述其他方法依旧适用. 这也是我们将其从中分离并独立成文的原因.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节引入可允许度量下有限能量辛涡旋的定义. 第 3 节使用等变 Darboux 定理, 建立正则水平集 $\mu^{-1}(0)$ 附近的辛正规形式定理. 第 4 节解释临界闭路空间的结构, 并将其与辛约化 M 的惯性轨形建立联系. 第 5 节基于第 3 节中引入的辛正规形式定理, 对于每个给定的映射, 引入一个作用量函数并得到相应的等周不等式估计 (isoperimetric inequality). 之后, 在映射是辛涡旋时, 我们将此函数与 Yang-Mills-Higgs 能量函数建立联系. 完成这些准备工作后, 我们得到可允许度量下有限能量辛涡旋能量密度函数的指数衰减估计. 具体的导出被放置于第 6 节. 第 6 节给出定理 1.1 的证明, 并在命题 6.1 中提供另一种有用的表达方式.

本文使用的符号约定如下:

- 对于 Lie 群 G , 它的 Lie 代数 $\mathfrak{g} = T_e G$ 上的结构被定义为左平移不变向量场的 Lie 括号. 任何 G 主丛都是右作用主丛, 即群 G 以右作用于其上.
- 群 G 从左作用于 X 上, 并记作 ℓ_g . 此作用的切映射记作 $\ell_{g*} : T_x X \rightarrow T_{gx} X$.
- 我们用 $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ 表示 Lie 群 G 的指数映射. 它的无穷小 Lie 代数作用被如下定义: 对于任意 $\xi \in \mathfrak{g}$, 有

$$X_\xi(x) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \exp(\epsilon\xi)x.$$

注意到如此定义下有

$$[X_\xi(x), X_\eta(x)] = -X_{[\xi, \eta]}(x).$$

- 以 $\text{Aut}(P)$ 表示 G -主丛 P 的规范变换群. 任意 $\Phi \in \text{Aut}(P)$ 以拉回的方式作用在 G -等变映射 $u_G : P \rightarrow X$ 和联络形式 A 构成的映射对上, 即

$$\Phi \cdot (u_G, A) = (\Phi^* u_G, \Phi^* A).$$

特别地, 当主丛 $P \cong D \times G$ 是平凡丛时 (本文中 D 代表一个曲面或 S^1), Φ 可以被等同于映射 $g : D \rightarrow G$, 而 (u_G, A) 映射对可以被等同于 $(u, \eta) \in C^\infty(D, X) \times \Omega^1(D, \mathfrak{g})$. 此时规范作用写作

$$g \cdot (u, \eta) = (\ell_{g^{-1}}(u), \text{Ad}_{g^{-1}}\eta + g^{-1}dg).$$

规范群 $\text{Aut}(P)$ 的 Lie 代数为 $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$, 即关于共轭作用 $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ 的共轭丛 $\mathfrak{g}_P$ 的截面构成的空间. Lie 代数元素 $\xi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ 在 (u, η) 处的无穷小作用由 $(-X_\xi, d\xi + [\eta, \xi])$ 给出.

2 具有可允许度量的有限能量辛涡旋

2.1 具有可允许度量的辛涡旋

假设 (Σ, j) 是一个亏格为 g_Σ 的具有 k 个顺序标记点 (ordered marked points) 的光滑闭 Riemann 曲面. 我们用 $(\dot{\Sigma}, j)$ 表示去掉这些标记点后的带孔 Riemann 面.

定义 2.1 一个带孔 Riemann 面 $(\dot{\Sigma}, j)$ 上的 Kähler 度量 h 称作可允许的 (admissible), 如果 Σ 上的每个标记点 p_i ($i = 1, \dots, k$) 都有一个邻域 U_i , 使得端口的 Kähler 结构 $(E_i := U_i \setminus \{p_i\}, j, h|_{E_i})$ 等距微分同胚于 $([0, \infty) \times S^1, j_0, e^{2b_i t}(dt^2 + d\theta^2))$, $b_i \geq 0$. 此处, 我们用 j_0 表示柱形 (cylinder) 上的标准复结构, 即

$$j_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad j_0\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad t \in [0, \infty), \quad \theta \in S^1.$$

假设 P 是一个 $\dot{\Sigma}$ 上的 G -主丛. 我们用 $C_G^\infty(P, X)$ 表示从 P 到 X 的所有光滑 G -等变映射构成的集合. 用 $\mathcal{A}(P)$ 表示 P 上的所有的联络构成的集合. 用 $Y = P \times_G X$ 表示 $\dot{\Sigma}$ 上空间 X 的配丛 (associated bundle), 用 $\mathfrak{g}_P := P \times_G \mathfrak{g}$ 表示共轭丛 (adjoint bundle). 我们可以将 $C_G^\infty(P, X)$ 与所有 $Y \rightarrow \dot{\Sigma}$ 的光滑截面构成的集合等同, 将 $\mathcal{A}(P)$ 等同于以 $\Omega^1(\dot{\Sigma}, \mathfrak{g}_P)$ 为模型的仿射空间.

一个联络 $A \in \mathcal{A}(P)$ 会诱导如下切丛的分解:

$$TY = H_AP \oplus (P \times_G TX),$$

其中 $H_AP := \ker A$ 是 TP 的水平分布 (horizontal distribution), TX 上的群 G 作用由 G 在 X 上的作用诱导而来. 我们用 Π_A 表示从投射 $\pi_A: TY \rightarrow P \times_G TX$ 诱导而来的 TY 上的自同态 (endomorphism). 由于近复结构 J 是群 G -作用不变的, 向量丛 $P \times_G TX \rightarrow \dot{\Sigma}$ 具有由 J 诱导而来的复结构. 下文仍旧用符号 J 来表示这个复结构. 使用联络 A 将 Riemann 面 $\dot{\Sigma}$ 上的复结构 j 提升为水平分布 (horizontal distribution) H_AP 上的复结构 j_A , 流形 Y 就因此具有了近复结构

$$J_A := j_A \oplus J.$$

对于任意映射 $u_G \in C_G^\infty(P, X)$, 我们用 u 表示其相应的丛 $Y \rightarrow \dot{\Sigma}$ 的截面. 映射 u_G 的 A 扭转切映射 (twisted tangent map) 被定义为 $\dot{\Sigma}$ 上 u^*TY 值的 1-形式

$$d_A u := \Pi_A \circ du.$$

用 $\bar{\partial}_A u$ 表示 $d_A u$ 关于复结构 (j, J_A) 的 $(0, 1)$ 部分. 在下文中, 我们将不区分 u_G 和 u .

注 2.1 $P|_U = U \times G$ 在局部全纯坐标 $t + is$ 下的平凡化下, 可以写成

$$d_A u\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + X_{A(\frac{\partial}{\partial t})}, \quad d_A u\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial u}{\partial s} + X_{A(\frac{\partial}{\partial s})},$$

并且

$$\begin{aligned} \partial_A u &= \frac{1}{2}(d_A u - J \circ d_A u \circ j) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + X_{A(\frac{\partial}{\partial t})}\right) - J\left(\frac{\partial u}{\partial s} + X_{A(\frac{\partial}{\partial s})}\right)\right]dt \\ &\quad + \frac{1}{2}J\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + X_{A(\frac{\partial}{\partial t})}\right) - J\left(\frac{\partial u}{\partial s} + X_{A(\frac{\partial}{\partial s})}\right)\right]ds, \\ \bar{\partial}_A u &= \frac{1}{2}(d_A u + J \circ d_A u \circ j) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + X_{A(\frac{\partial}{\partial t})}\right) + J\left(\frac{\partial u}{\partial s} + X_{A(\frac{\partial}{\partial s})}\right)\right]dt \\ &\quad + \frac{1}{2}J\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + X_{A(\frac{\partial}{\partial t})}\right) + J\left(\frac{\partial u}{\partial s} + X_{A(\frac{\partial}{\partial s})}\right)\right]ds. \end{aligned}$$

定义 2.2 一个 $(\dot{\Sigma}, j, h)$ 上的辛涡旋由一个 $\dot{\Sigma}$ 上的光滑 G 主丛 P 以及一对满足下述非线性偏微分方程的映射 $w := (u, A) \in C_G^\infty(P, X) \times \mathcal{A}(P)$ 组成:

$$\bar{\partial}_A u = 0, \quad (2.1)$$

$$F_A + *_h \mu(u) = 0, \quad (2.2)$$

其中 $*_h$ 是关于 $\dot{\Sigma}$ 上 Kähler 度量 h 的 Hodge-* 算子.

如果进一步假设 h 是可允许的, 那么称 (P, w) 是一个具有可允许度量的辛涡旋.

2.2 Yang-Mills-Higgs (YMH) 能量泛函

Yang-Mills-Higgs (YMH) 能量是一个以 $\dot{\Sigma}$ 上的 G -主丛和映射 $w = (u, A) \in C_G^\infty(P, X) \times \mathcal{A}(P)$ 为变量的泛函. 它的定义为

$$\begin{aligned} E(P, u, A) &:= \int_{\dot{\Sigma}} e(P, u, A) \nu_h, \\ e(P, u, A) &:= \frac{1}{2}(|d_A u|_h^2 + |F_A|_h^2 + |\mu \circ u|_h^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 ν_h 是 $(\dot{\Sigma}, h)$ 的体积形式, $|\cdot|_h$ 表示由 Kähler 度量 h 以及目标流形 X 的度量诱导的范数. 只要没有发生混淆的可能, 我们在下文中将省略 YMH 而直接称之为能量. 函数 $e(P, u, A) : \dot{\Sigma} \rightarrow [0, \infty)$ 称为能量密度函数.

等式

$$e(P, u, A) \nu_h = \left(|\bar{\partial}_A u|_h^2 + \frac{1}{2} |F_A + *_h \mu(u)|_h^2 \right) \nu_h + (u^* \omega - d\langle \mu(u), A \rangle) \quad (2.4)$$

刻画了能量密度函数最重要的性质. 它从以下两个方面暗示了 YMH 能量泛函是研究辛涡旋的正确泛函:

(1) 能量密度函数 (2.4) 中的第一项 $(|\bar{\partial}_A u|_h^2 + \frac{1}{2} |F_A + *_h \mu(u)|_h^2) \nu_h$ 为 0, 当且仅当 (P, u, A) 是 $(\dot{\Sigma}, j, h)$ 上的辛涡旋;

(2) 能量密度函数 (2.4) 中第二项 $u^* \omega - d\langle \mu(u), A \rangle$ 的积分, 在 (P, w) 有一个恰当的渐近行为时, 是一个拓扑不变量, 对应于等变第一 Chern 数 (例如, 本文中所证明的渐近收敛结果就是一个恰当的渐近行为).

等式 (2.4) 的导出主要依赖于如下两个等式. 它们的具体导出过程可参见文献 [7, 命题 3.1].

引理 2.1 (1) $|d_A u|_h^2 = |\partial_A u|_h^2 + |\bar{\partial}_A u|_h^2$;

(2) $u^* \omega - d\langle \mu \circ u, A \rangle = \frac{1}{2}(|\partial_A u|_h^2 - |\bar{\partial}_A u|_h^2) \nu_h - \langle F_A, *_h(\mu \circ u) \rangle$.

下文中, 称 (P, w) 是一个有限能量辛涡旋, 如果它的能量 $E(P, w)$ 是一个有限数.

2.3 规范变换

从现在起, 取定一个 Riemann 曲面 $(\dot{\Sigma}, j)$ 并选定一个 Kähler 度量 h . 进一步, 取定一个 G 主丛 $P \rightarrow \dot{\Sigma}$. 下文中, 我们将 P 从 (P, w) 中省略.

我们用 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_P$ 表示主丛 P 的规范变换群, 并记

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_P := C_G^\infty(P, X) \times \mathcal{A}(P).$$

主丛 P 上的规范变换诱导了 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的作用

$$\Phi \cdot w = (\Phi^* u, \Phi^* A).$$

关于此规范群作用, 我们有如下明显的引理.

引理 2.2 对于任意 $w \in \mathcal{B}$ 和任意 $\Phi \in \mathcal{G}$, 有

- (1) $E(\Phi \cdot w) = E(w)$;
- (2) $\Phi \cdot w$ 是一个辛涡旋当且仅当 w 是一个辛涡旋.

假设 (P, u, A) 是一个 $(\dot{\Sigma}, j, h)$ 上定义的辛涡旋. 每个端口 E_i 同胚于半柱形 $[0, \infty) \times S^1$, $i = 1, \dots, k$, 其中 k 是端口的数目. 我们可以对 $P|_{E_i} \rightarrow E_i$ 取一个平凡化, 并且在这个平凡化后, $P|_{E_i}$ 上的联络形式可以被写作

$$A_i = A_{i,1}(t, \theta) dt + A_{i,2}(t, \theta) d\theta, \quad (t, \theta) \in [0, \infty) \times S^1,$$

其中

$$A_{i,1}, A_{i,2} : [0, \infty) \times S^1 \rightarrow \mathfrak{g}.$$

常微分方程理论保证我们总可以找到 (唯一的) 光滑规范变换 $\Phi_i \in \mathcal{G}_{P|_{E_i}} \cong C^\infty([0, \infty) \times S^1, G)$ 和映射 $\eta_i : [0, \infty) \times S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$, 使得

$$\Phi_i^* A_i = \eta_i(t, \theta) d\theta, \quad \Phi_i(0, \cdot) \equiv e.$$

这样的联络形式 $\eta(t, \theta) d\theta$ 称为 $[0, \infty) \times S^1$ 上的满足时间规范 (temporal gauged) 的联络. 继而我们构造规范变换 $\Phi \in \mathcal{G}_P$ 使其限制在每个端口是 Φ_i . 因此得到, 对于每个联络 $A \in \mathcal{A}(P)$, 都存在某个规范变换使得 A 在每个端口附近是时间规范的. 如果 $w = (u, A)$ 是一个辛涡旋并且 A 在每个端口附近是时间规范的, 则称 w 是一个时间规范辛涡旋.

3 水平集 $\mu^{-1}(0)$ 附近的正规形式

下面描述一个辛流形 (X, ω) 在水平集 $\mu^{-1}(0)$ 的一个足够小的 G 不变邻域上的辛正规形式. 它的引入将帮助我们更好地理解第 4 节中定义的形式 Hessian 算子和第 5 节定义的局部泛函. 本节结果可以由文献 [19, 命题 2.5] 中更一般的结果推出. 为了方便读者并固定符号, 我们给出自洽的表述与证明.

对于 X 中的每个点 x , 为强调其作为线性算子, 我们用 $L_x : \mathfrak{g} \rightarrow T_x X$ 来表示 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的无穷小作用, 即

$$L_x(\xi) := X_\xi(x).$$

注意到零是矩映射正则值的假设使得切空间 $T_z \mu^{-1}(0)$ 在任意点 $z \in \mu^{-1}(0)$ 具有一个分解. 我们将此熟知的结论在下面的引理中表述, 目的在于澄清下文所需的符号.

引理 3.1 假设 0 是矩映射 μ 的正则值, 那么对于任意 $z \in \mu^{-1}(0)$, L_z 是单射, 并且

$$T_z \mu^{-1}(0) = \ker d_z \mu = (\text{im}(JL_z))^\perp,$$

其中 $\perp$ 表示关于 X 上度量 $\omega(\cdot, J\cdot)$ 的正交补投影. 进一步, $T_z \mu^{-1}(0)$ 有 G 不变分解

$$T_z \mu^{-1}(0) = \text{im}(L_z) \oplus H_z, \tag{3.1}$$

其中

$$H_z := \ker(d_z \mu \circ J) = (\text{im}(L_z))^\perp \cap T_z \mu^{-1}(0).$$

我们使用 $\text{pr}_G : T_z \mu^{-1}(0) \rightarrow \text{im}(L_z)$ 来表示分解 (3.1) 诱导的投影映射. 现在考虑向量丛

$$N := \text{im}(JL) \rightarrow \mu^{-1}(0),$$

并用 N^ϵ 表示其在零截面附近的邻域. 此处 $0 < \epsilon < \inf_{z \in \mu^{-1}(0)} i_z$, i_z 表示度量 $\omega(\cdot, J\cdot)$ 诱导的指数映射的单射半径. 注意到矩映射 μ 的恰当性 (properness) 使得 $\inf_{z \in \mu^{-1}(0)} i_z > 0$.

Levi-Civita 联络诱导的指数映射 $\exp^\nabla$ 定义了局部微分同胚

$$\exp^\nabla : N^\epsilon \rightarrow X, \quad JL_z(\xi) \mapsto \exp_z^\nabla(JL_z(\xi)).$$

我们用 $\mathcal{U}^\epsilon \subset X$ 来表示它的像集. 特别地, 零截面的像集是 $\mu^{-1}(0) \subset \mathcal{U}^\epsilon$. 在这个微分同胚下, 由于近 Kähler 结构的 G -不变性, $g \in G$ 在 X 上的作用被表达为

$$g(z, JL_z(\xi)) = (gz, JL_{gz}(\text{Ad}_g(\xi))). \quad (3.2)$$

适当地缩小 ϵ , 我们可以进一步假设 $\mathcal{U}^\epsilon$ (和 N^ϵ) 是 G 不变的.

用指数映射拉回, 我们可以将 $(\mathcal{U}^\epsilon := \exp^\nabla(N^\epsilon), \omega|_{\mathcal{U}^\epsilon}, G, \mu|_{\mathcal{U}^\epsilon}, J)$ 与

$$(N^\epsilon, (\exp^\nabla)^*(\omega|_{\mathcal{U}^\epsilon}), G, (\exp^\nabla)^*(\mu|_{\mathcal{U}^\epsilon}), (\exp^\nabla)^*J)$$

等同. 为了简化符号, 我们省略掉拉回 $(\exp^\nabla)^*$ 并使用 $(N^\epsilon, \omega, G, \mu, J)$ 来表示邻域 N^ϵ 的结构.

现在在 N^ϵ 上构造一个辛结构. 用 $\mathcal{F}_G$ 表示 $\mu^{-1}(0)$ 上由分布 $\text{im}(L)$ 定义的叶状结构, 并且注意到存在一个自然的丛映射

$$\iota_G : \text{im}(JL) \rightarrow T^*\mathcal{F}_G, \quad \iota_G(z, JL_z(\xi)) = \iota_{JL(\xi)}\omega|_z := (z, \omega(JL_z(\xi), \cdot)).$$

用此映射来拉回 $T^*\mathcal{F}_G$ 的典范辛 2-形式 $d\Theta_G$, 得到

$$\Omega_G := \iota_G^*(d\Theta_G) \in \Omega^2(\text{im}(JL)).$$

定义 N^ϵ 上的一个 2-形式

$$\omega_0 := \pi^*\omega|_{\mu^{-1}(0)} + \Omega_G.$$

从它的构造方法, 我们有如下引理.

引理 3.2 (1) $\omega_0|_{\mu^{-1}(0)} = \omega|_{\mu^{-1}(0)}$. 因此只要 ϵ 足够小, ω_0 就是 N^ϵ 上的一个辛形式;

(2) 群 G -作用在 N^ϵ 关于辛结构 ω_0 是 Hamilton 的, 并且它的能量映射 μ_0 满足 $\mu_0(JL_z(\xi)) = \xi$.

称 $(N^\epsilon, \omega_0, G, \mu_0)$ 是水平集 $\mu^{-1}(0)$ 附近的一个正规形式. 关于正规形式, 有如下等变 Weinstein-Darboux 定理.

命题 3.1 对于足够小的 $\epsilon > 0$, 存在一个 G -等变微分同胚 $\phi : N^\epsilon \rightarrow N^\epsilon$, 使得

$$\phi^*\omega = \omega_0, \quad \phi^*\mu = \mu_0, \quad \phi|_{\mu^{-1}(0)} = \text{id}_{\mu^{-1}(0)}, \quad (3.3)$$

$$d\phi|_{TN^\epsilon|_{\mu^{-1}(0)}} = \text{id}|_{TN^\epsilon|_{\mu^{-1}(0)}}. \quad (3.4)$$

证明 等式 (3.3) 直接来自于等变 Weinstein-Darboux 定理 (参见文献 [20]), 而 (3.4) 依赖于当前的辛约化条件. 现在给出 (3.4) 的证明.

取 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, \dim(G)}$. 由于在 $\mu^{-1}(0)$ 上, $\phi^*\mu = \mu_0$, 我们可以找到光滑函数 $f_i: \mathcal{U}^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \dim(G)$, 使其满足 $f_i|_{\mu^{-1}(0)} \equiv 1$ 并且

$$\langle \phi^*\mu, \xi_i \rangle = f_i \langle \mu_0, \xi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, \dim(G).$$

对等式两边取微分, 可得

$$\langle \phi^*d\mu, \xi_i \rangle = d\langle \phi^*\mu, \xi_i \rangle = \langle \mu_0, \xi_i \rangle df_i + f_i \langle d\mu_0, \xi_i \rangle.$$

当限制在 $\mu^{-1}(0) = \mu_0^{-1}(0)$ 上时, 右边第一项为 0, 第二项则变为 $\langle d\mu_0, \xi_i \rangle$. 由此得到

$$\phi^*d\mu|_{\mu^{-1}(0)} = d\mu_0|_{\mu^{-1}(0)},$$

并因为 $d_z\mu$ 限制在 $\text{im}(JL)$ 上是线性同构, 进一步得到

$$d\phi|_{TN^\epsilon|_{\mu^{-1}(0)}} = \text{id}|_{TN^\epsilon|_{\mu^{-1}(0)}}.$$

证毕. □

只要我们可以确保 u 进入到 $\mu^{-1}(0)$ 的邻域 N^ϵ , 命题 3.1 就允许我们考虑 (ϕ^*u, A) 并假设目标空间具有形式 $(N^\epsilon, \omega_0, G, \phi^*J, \mu_0)$. 这里特别说明, 等式 (3.4) 保证了在 $\mu^{-1}(0)$ 上, $\phi^*J = J$. 在第 5 节, 当我们在此正规形式下处理我们的问题时, 我们认为所有的映射都被 ϕ 拉回, 因此将省略 ϕ .

4 S^1 上的规范理论

4.1 规范闭路与和乐元

考虑 S^1 上一个固定的 G 主丛 P_{S^1} . 注意到, 由于 G 是连通的, 因此, P_{S^1} 总是平凡的. 记 $\mathcal{B}_{S^1} := C_c^\infty(P_{S^1}, X) \times \mathcal{A}(P_{S^1})$, 并注意到, 在取定一个平凡化以后, 它可以与 $X \times \mathfrak{g}$ 的光滑闭路空间等同. 我们用 $\mathcal{G}_{S^1}$ 表示主丛 P_{S^1} 的规范变换群, 而它则可以与 G 的光滑闭路空间等同. 我们使用符号 LX 、 LG 和 $L\mathfrak{g}$ 分别表示 X 、 G 和 $\mathfrak{g}$ 的光滑闭路空间, 用 L_0G 表示基点正规变换群 (based gauge group), 也就是其元素满足 $g(0) = e$ 的 LG 的正规子群.

规范变换群 LG 以

$$g \cdot y = g \cdot (x, \eta) = (g^{-1}x, \text{Ad}_{g^{-1}}\eta + g^{-1}\dot{g})$$

的方式作用在 $LX \times L\mathfrak{g}$ 上. 对于一个取定的 $g \in LG$, 它的切映射是

$$dg|_y(v, \xi) = ((\ell_{g^{-1}})_*(v), \text{Ad}_{g^{-1}}\xi),$$

其中 $v \in C^\infty(S^1, TX)$ $\xi \in L\mathfrak{g}$.

规范群 LG 的 Lie 代数可以等同于 $T_e(LG) = L\mathfrak{g}$. 它的无穷小作用为

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\exp(\epsilon\tau) \cdot y) = (-X_\tau(x), \dot{\tau} + [\eta, \tau]), \quad (4.1)$$

其中 $\dot{\tau}$ 代表 $\frac{d\tau}{d\theta}$. 根据常微分方程解的唯一性, 基点规范群 L_0G 自由地作用在 $L\mathfrak{g}$ 上, 因此也就自由地作用在整个 $LX \times L\mathfrak{g}$ 上. 作为共知事实, 这个作用的轨道空间事实上是群 G , 并且商映射将每个联络映射到它的和乐元. 为后文使用方便, 我们将这个构造明确地写出来.

考虑水平路径 $\Psi : [0, 2\pi] \rightarrow G$, 它满足方程

$$d_\eta \Psi = \Psi' + \eta \Psi = 0, \quad \Psi(0) = e. \quad (4.2)$$

这是一个线性常微分方程组, 因此具有唯一解 $\Psi_\eta : [0, 2\pi] \rightarrow G$, 其中群元素 $\Psi_\eta(1) =: \text{Hol}_\eta$ 是联络 η 的和乐元. 注意到 $\Psi_{g \cdot \eta} = g^{-1} \Psi_\eta$, 特别地, 这说明和乐元是 $L_0 G$ - 不变的.

由于假设 Lie 群 G 是紧致连通的, 它的指数映射是满射. 我们可以选择 $\log \text{Hol}_\eta \in \mathfrak{g}$, 使得

$$\exp(\log \text{Hol}_\eta) = \text{Hol}_\eta.$$

定义基点规范变换

$$h_\eta(\theta) := \Psi_\eta(\theta) \exp(-\theta \log \text{Hol}_\eta) \in L_0 G. \quad (4.3)$$

由此可得

$$\begin{aligned} h'_\eta + \eta h_\eta - h_\eta \eta &= 0, \\ h_{g \cdot \eta}(\theta) &= g^{-1}(\theta) h_\eta(\theta), \\ h_\eta \cdot \eta &= -\log(\text{Hol}_\eta), \end{aligned}$$

其中 ηh_η 和 $h_\eta \eta$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 Lie 群 G 上的左和右作用, 不应与规范作用混淆. 特别地, 它将 η 映射至具有相同和乐元的常值联络 $-\log(\text{Hol}_\eta)$. 这个常值联络并非唯一.

下面的记号将会在第 5 节用到.

注 4.1 考虑 G 上的 $L_0 G$ - 主丛 $L\mathfrak{g}$. 对于任意一个光滑路径 $h : (a, b) \rightarrow G$, 我们总可以取一个只有有限个不连续点的分段光滑的 $L\mathfrak{g}$ 常值闭路路径 $\eta : (a, b) \rightarrow \mathfrak{g}$, 使得

$$\exp(\eta(t)) = h(t).$$

我们用 $\text{Log}(h)$ 来表示这样一个选择, 虽然这个选择并非唯一, 也不是典范的.

现在来计算 LG 在 $\mathcal{B}_{S^1} = LX \times L\mathfrak{g}$ 上作用的横截片 (slice). 由于 X 的度量和 Lie 代数上的共轭不变正定内积都是 G - 不变的, 因此, 它诱导了 $\mathcal{B}_{S^1}$ 上 LG - 不变的 L^2 度量

$$\|(v, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{S^1} (|v|^2 + |\xi|^2) d\theta,$$

其中 $y = (x, \eta) \in \mathcal{B}_{S^1}$, $(v, \xi) \in T_y \mathcal{B}_{S^1} = \Gamma(S^1, x^* TX) \times L\mathfrak{g}$.

定义一个 L^2 分解

$$T_y \mathcal{B}_{S^1} = \mathcal{V}_y \oplus T_y(\mathcal{G}_{S^1} \cdot y),$$

其中 $\mathcal{G}_{S^1} \cdot y$ 表示经 $y = (x, \eta) \in \mathcal{B}_{S^1}$ 的规范作用轨道, 而 $\mathcal{V}_y$ 表示 $T_y(\mathcal{G}_{S^1} \cdot y)$ 的 L^2 - 正交补. 我们用 $\Pi_{\mathcal{V}_y}$ 表示到 $\mathcal{V}_y$ 的投影.

引理 4.1 对任意 $y = (x, \eta) \in \mathcal{B}_{S^1}$, 有

$$\mathcal{V}_y = \{(v, \xi) \in \Gamma(S^1, x^* TX) \times L\mathfrak{g} \mid d\mu \circ J(v) + \dot{\xi} + [\eta, \xi] = 0\},$$

并且它是 $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ - 不变, 其中 $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ 表示 y 处的迷向群 (isotropy group). 它同构于 $G_{x(0)}$ 的一个子群, 因此只要 $G_{x(0)}$ 是有限群, $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ 即是有限的.

证明 对于 $y = (x, \eta) \in \mathcal{B}_{S^1}$, 我们已知无穷小 $\tau \in \text{Lie}(\mathcal{G}_{S^1})$ 在 y 点的作用可以写作 $(-X_\tau(x), \dot{\tau} + [\eta, \tau])$. 因此有 $(v, \xi) \in \mathcal{V}_y$, 当且仅当对任意 $\tau \in \text{Lie}(\mathcal{G}_{S^1})$, 有

$$\int_{S^1} (\omega(-X_\tau(x), Jv) + \langle \dot{\tau} + [\eta, \tau], \xi \rangle) d\theta = 0.$$

使用度量的 G -不变性, 这进一步等价于, 对于任意 $\tau \in \text{Lie}(\mathcal{G}_{S^1})$, 有

$$\int_{S^1} \langle d\mu \circ J(v) + \dot{\xi} + [\eta, \xi], \tau \rangle d\theta = 0.$$

因此,

$$d\mu \circ J(v) + \dot{\xi} + [\eta, \xi] = 0.$$

由于 $\mathcal{B}_{S^1}$ 上的 L_2 度量是 $\mathcal{G}_{S^1}$ 不变的, 我们得到 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}_{S^1} \cdot y$ 是一个 $\mathcal{G}_{S^1}$ -等变丛, 并且 $\mathcal{V}_y$ 是 $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ -不变的.

为了计算迷向群 $\mathcal{G}_{S^1}(y)$, 注意到对于任意 $g \in LG$, g 保持 $y = (x, \eta)$ 当且仅当

$$g(s) \in G_{x(s)}, \quad g' + \eta g - g\eta = 0, \quad s \in [0, 1].$$

根据常微分方程初值问题解的唯一性, 我们得到群同态

$$\mathcal{G}_{S^1}(y) \mapsto G_{x(0)}, \quad g \mapsto g(0)$$

是单射. 因此, $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ 是 $G_{x(0)}$ 的子群. 注意到在上述推导中, $0 \in S^1$ 可以被换作任意 $\theta \in S^1$. $\square$

在正则水平集 $\mu^{-1}(0)$ 附近, 我们总可以找到某个小常数 $\epsilon_{\text{reg}} > 0$, 使得 $\mu^{-1}(0)$ 的 ϵ_{reg} 邻域是 G -不变的而同时其上的 G 作用是局部自由的. 由此得到

$$\mathcal{B}_{S^1, \epsilon_{\text{reg}}} := \{y = (x, \eta) \in LX \times L\mathfrak{g} \mid \text{dist}(x, \mu^{-1}(0)) < \epsilon_{\text{reg}}\}$$

是 LG -规范作用不变的. 并且由上述引理, LG -规范作用是局部自由的.

更进一步, 我们可以取 ϵ_{reg} 足够小使得 $\mathcal{B}_{S^1, \epsilon_{\text{reg}}}$ 上的 LG 作用的迷向群一一对应于共轭类

$$\{\mu^{-1}(0)_{(H)}/G \mid (H) \in \Lambda\}$$

的一个子集, 其中 Λ 表示 G 在 $\mu^{-1}(0)$ 上作用的迷向群的共轭类集合. 注意到, G 和 $\mu^{-1}(0)$ 的紧性确保了 Λ 是一个有限集.

对于每个 $x \in \mu^{-1}(0)$, 定义

$$d_{x,G} := \inf_{\substack{k, k' \in G_x \\ k \neq k'}} \text{dist}_G(k, k'),$$

其中 dist_G 表示从共轭不变正定内积诱导的 G 上度量. 由于 G 上的共轭不变度量是 G -共轭作用不变的, 因此, d_x 在每个 G_x 的共轭类里都是常值. 再根据上边讨论得出的轨道类型的有限性, 我们得到数

$$d_{\mu^{-1}(0), G} := \inf_{x \in \mu^{-1}(0)} d_{x,G} > 0. \quad (4.4)$$

我们将在第 5 节用到这个结论.

4.2 临界闭路

定义 4.1 一个闭路 $y = (x, \eta) \in LX \times L\mathfrak{g}$ 称为一个临界闭路, 如果它满足下面两个方程:

$$\mu \circ x \equiv 0, \quad \dot{x} + X_\eta(x) = 0.$$

我们用 $\text{Crit} \subset LX \times L\mathfrak{g}$ 表示由所有临界闭路构成的集合.

考虑在 $y = (x, \eta) \in LX \times L\mathfrak{g}$ 处纤维为

$$\mathcal{E}_{S^1}|_y = \Gamma(S^1, x^*TX \oplus \mathfrak{g})$$

的向量丛 $\mathcal{E}_{S^1} \rightarrow \mathcal{B}_{S^1}$. 定义截面

$$\tilde{\Upsilon}(y) := (\Upsilon(y), \mu(x)) := (\dot{x} + X_\eta(x), \mu(x)).$$

根据定义可知, $\text{Crit} = \tilde{\Upsilon}^{-1}(0)$.

引理 4.2 截面 $\tilde{\Upsilon}$ 是规范等变的, 即对于任意 $g \in LG$ 和 $y = (x, \eta)$, 有

$$\tilde{\Upsilon}(g \cdot y) = ((\ell_{g^{-1}})_*(\Upsilon(y)), \text{Ad}_{g^{-1}}\mu).$$

因此, Crit 是 LG - 不变的.

证明 因为 μ 是 G - 等变的, 所以有 $\mu(g^{-1}x) = \text{Ad}_{g^{-1}}\mu(x)$. 由此,

$$\begin{aligned} \Upsilon(g \cdot y) &= \frac{d}{d\theta}(g^{-1}x) + X_{g^{-1}\dot{g} + \text{Ad}_{g^{-1}}\eta}(g^{-1}x) \\ &= [(\ell_{g^{-1}})_*(\dot{x}) - X_{g^{-1}\dot{g}}(g^{-1}x)] + X_{g^{-1}\dot{g} + \text{Ad}_{g^{-1}}\eta}(g^{-1}x) \\ &= (\ell_{g^{-1}})_*(\dot{x} + X_\eta(x)) \\ &= (\ell_{g^{-1}})_*(\Upsilon(y)). \end{aligned}$$

证毕. □

引理 4.3 如果 $y = (z, \eta) \in \text{Crit}$, 那么迷向群 $\mathcal{G}_{S^1}(y) \cong C_{G_{z(0)}}(\text{Hol}_\eta)$ 是 Hol_η 在 $G_{z(0)}$ 中的中心化子, 即 $G_{z(0)} \cap C(\text{Hol}_\eta)$. 特别地, 它是有限的, 并且同构被

$$C_{G_{z(0)}}(\text{Hol}_\eta) \rightarrow \mathcal{G}_{S^1}(y), \quad g_0 \mapsto g(\theta) = h_\eta(\theta)g_0h_\eta^{-1}(\theta)$$

给出, 其中 h_η 由 (4.3) 定义.

证明 由引理 4.1, 注意到对于任意 $g \in \mathcal{G}_{S^1}(y)$, 方程 $g' + \eta g - g\eta = 0$ 等价于对于任意一个满足 (4.2) 的 $\Psi: [0, 2\pi] \rightarrow G$, 有

$$\text{Ad}_{\Psi_\eta^{-1}(s)}g(s) \equiv g(0).$$

因此有 $g(1) = \Psi_\eta(1)g(0)(\Psi_\eta(1))^{-1}$, 并且 $g \in LG$ 是方程 $g' + \eta g - g\eta = 0$ 的解, 当且仅当

$$\Psi_\eta(1)g(0)(\Psi_\eta(1))^{-1} = g(0),$$

即

$$\text{Ad}_{\text{Hol}_\eta}g(0) = g(0).$$

另一方面, 注意到只要 $g \in LG$ 保持 η , 即满足方程 $g' + \eta g - g\eta = 0$, 它自动地保持 z , 只要 $(z, \eta) \in \text{Crit}$. 进一步给定 $g_0 \in G_{z(0)}$, 通过直接计算, 可得

$$g(\theta) = h_\eta(\theta)g_0h_\eta^{-1}(\theta)$$

是一个解, 并且是唯一的解. 引理得证. $\square$

引理 4.4 假设 $y = (z, \eta) \in \text{Crit}$ 有常值联络 $\eta \equiv \eta_0$, 则截面 $\tilde{\Upsilon}$ 在 y 点的线性化为

$$D_y \tilde{\Upsilon}(v, \xi) = (D_y \Upsilon(v, \xi), d_z \mu(v)),$$

其中

$$\begin{aligned} D_y \Upsilon(v, \xi)(\theta) &= (\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v + X_{\xi(\theta)})(z(\theta)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_{-s*} v(z(\theta + s)) + X_{\xi(\theta)}(z(\theta)), \end{aligned}$$

$v \in C^\infty(S^1, z^*TX) = T_z(LX)$, $\xi \in L\mathfrak{g} = T_\eta \mathfrak{g}$, $\theta \in S^1$. φ 是向量场 $-X_{\eta_0}$ 的流.

特别地, 当 $\eta_0 = 0$ 时,

$$D_y \Upsilon(v, \xi)(\theta) = \dot{v}(\theta) + X_{\xi(\theta)}(z(\theta)).$$

证明 很明显, $D_y \tilde{\Upsilon} = (D_y \Upsilon, d_z \mu)$. 现在来计算 $D_y \Upsilon$. 为方便计算, 我们使用一个 X 上的无挠的仿射联络 ∇ . 但是只要 y 是一个常值联络临界闭路, 所得的结果与 ∇ 的选择无关.

对于任意 $v \in C^\infty(S^1, z^*TX) = T_z(LX)$, $\xi \in L\mathfrak{g} = T_\eta \mathfrak{g}$, 有

$$D_y \Upsilon(v, \xi)(\theta) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1}(\Upsilon(z_\epsilon, \eta_\epsilon)(\theta)) \in T_{z(\theta)}X, \quad \theta \in S^1,$$

其中

$$z_\epsilon(\theta) := \exp_{z(\theta)}^\nabla(\epsilon v(\theta)), \quad \eta_\epsilon(\theta) := \eta(\theta) + \epsilon \xi(\theta).$$

平行移动 Par 和指数映射 $\exp^\nabla$ 均由仿射联络 ∇ 定义. 进一步, 由 Υ 的表达, $D_y \Upsilon(v, \xi)(\theta)$ 包含的两项可以利用联络的无挠性质计算如下:

$$\begin{aligned} \text{第一项} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1} \left(\frac{d}{d\theta} \exp_{z(\theta)}^\nabla(\epsilon v(\theta)) \right) = \frac{Dv}{d\theta}, \\ \text{第二项} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1} X_{\eta(\theta) + \epsilon \xi(\theta)}(\exp_{z(\theta)}^\nabla(\epsilon v(\theta))) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1} (X_{\eta(\theta)}(\Phi(\theta, \epsilon))) + \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1} (X_{\xi(\theta)}(\Phi(\theta, \epsilon))) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Par}_{z(\theta), z_\epsilon(\theta)}^{-1} (X_{\eta(\theta)}(\Phi(\theta, \epsilon))) + X_{\xi(\theta)}(\Phi(\theta, \epsilon)). \end{aligned}$$

下面计算上式第二项中的第一项. 将 $X_{\eta(\theta)}(\Phi(\theta, \epsilon))$ 视作向量场 $X_{\eta(\epsilon)}$ 在 ϵ -路径 $\Phi(\theta, \epsilon) = \exp_{z(\theta)}^\nabla(\epsilon v(\theta))$ 上的限制, 我们可以将这一项写作

$$(\nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}} X_{\eta(\theta)})(\Phi(\theta, 0)).$$

应用联络 ∇ 的无挠性, 我们可以将这一项进一步写作

$$\left(\nabla_{X_\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} \right)(\Phi(\theta, 0)) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)} \right](\Phi(\theta, 0)).$$

同时注意到

$$\begin{cases} \dot{z}(\theta) + X_{\eta(\theta)}(z(\theta)) = 0, \\ z(\theta) = \Phi(\theta, 0), \\ \left. \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon} \right|_{\Phi(\theta, 0)} = v(\theta). \end{cases}$$

这就是 $-\frac{Dv}{d\theta} + [\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)}](\Phi(\theta, 0))$. 因此,

$$\text{第二项} = -\frac{Dv}{d\theta} + X_{\xi(\theta)}(z(\theta)) + \left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)} \right] \Big|_{\epsilon=0} (z(\theta)).$$

以上 $\frac{Dv}{d\theta}$ 表示沿曲线 z 的向量场 v 的协变导数, $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}$ 表示向量场 $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}$ 关于

$$\Phi(\theta, \epsilon) := \exp_{z(\theta)}^{\nabla}(\epsilon v(\theta))$$

的局部扩张. 将其求和, 可得

$$D_y \Upsilon(v, \xi)(\theta) = \left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)} \right] \Big|_{\epsilon=0} + X_{\xi(\theta)}(z(\theta)).$$

特别地, 当 $\eta \equiv \eta_0$ 是常值时, Lie 括号项 $[\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)}] \Big|_{\epsilon=0}$ 可以被写作 Lie 导数

$$\left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \epsilon}, X_{\eta(\theta)} \right] \Big|_{\epsilon=0} = (\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v)(z(\theta)).$$

这是由于 $\varphi_t(z(\theta)) := z(\theta + t)$ 是向量场 $-X_{\eta_0}$ 初值为 $z(\theta)$ 的流.

进一步, 我们可以写出

$$(\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v)(z(\theta)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_{-s*} v(z(\theta + s)).$$

推导完毕. □

下面的引理将帮助我们得到 $\ker D_y \widetilde{\Upsilon}$ 的结构.

引理 4.5 若沿 z 的向量场 v 由 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 生成, 即对于 $\zeta : I \rightarrow \mathfrak{g}$ 在某个区间或者整个 S^1 , 有

$$v(\theta) = X_{\zeta(\theta)}(z(\theta)),$$

则

$$(\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v)(z(\theta)) = X_{[\eta_0, \zeta(\theta)]}(z(\theta)) + X_{\frac{d\zeta}{d\theta}}(z(\theta)).$$

证明 我们继续沿用引理 4.4 证明中的符号. 注意到对于现在的情形, 初值为 $z \in X$ 的向量场 $-X_{\eta_0}$ 的流可以被显式地写作

$$\varphi_t(z) = \exp(-t\eta_0)z, \quad t \in \mathbb{R},$$

因此可以如下计算 $(\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v)(z(\theta))$.

首先,

$$\varphi_{-s*} v(z(\theta + s)) = \varphi_{-s*} [X_{\zeta(\theta+s)}(z(\theta + s))]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} [\exp(s\eta_0)\exp(\epsilon\zeta(\theta+s))z(\theta+s)] \\
 &= X_{\exp(s\eta_0)\zeta(\theta+s)\exp(-s\eta_0)}(z(\theta)).
 \end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}}v)(z(\theta)) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_{-s*}v(z(\theta+s)) \\
 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\exp(s\eta_0)\zeta(\theta+s)\exp(-s\eta_0)}(z(\theta)) \\
 &= X_{\frac{d}{ds}\zeta}(z(\theta)) + X_{[\eta_0, \zeta(\theta)]}(z(\theta)).
 \end{aligned}$$

引理证毕. □

下述命题是文献 [3] 中的一个重要观察, 这里重新叙述如下并给出一个略有不同的证明.

命题 4.1 假设 $y = (z, \eta) \in \text{Crit}$ 是一个 $\eta \equiv \eta_0$ 的常值联络临界闭路.

(1) 空间

$$\mathcal{X}(y) := \{\mathcal{X}_\tau = (-X_\tau, \dot{\tau} + [\eta, \tau]) \mid \tau \in \text{Lie}(LG) = L\mathfrak{g}\}$$

(即由 $\text{Lie}(LG)$ 无穷小作用生成的向量场, 参见 (4.1)), 存在于空间 $\ker D_y \tilde{\Upsilon}$ 中. 考虑如下分解:

$$\ker D_y \tilde{\Upsilon} = \mathcal{X}(y) \oplus (\ker D_y \tilde{\Upsilon} \cap \mathcal{V}_y),$$

则 $\ker D_y \tilde{\Upsilon} \cap \mathcal{V}_y$ 同构于轨形 M 的扭曲分支或非扭曲分支 $M^{(\text{Hol}(\eta_0))}$ 在 $[z(0)]$ 点的切空间. 其同构的显式表达在命题证明中给出.

(2) 以 $W^{1,2}(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g}) \subset L^2(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g})$ 为定义域的形式 Hessian 算子

$$\begin{aligned}
 \text{Hess}_y(v, \xi) &:= (J\Upsilon(v, \xi), d_z\mu(v)), \\
 \text{Hess}_y &: L^2(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g}) \rightarrow L^2(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g})
 \end{aligned}$$

是无界本征自共轭算子. 更进一步, Hess_y 限制在 $\mathcal{V}_y$ 的 L^2 -完备化上也是本征自共轭算子.

(3) 限制在 $L^2(\mathcal{V}_y)$ 上的 Hess_y 的谱只有简单实特征值, 并且在集合 $\{\frac{k}{|\text{Hol}_{\eta}|} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 中取值.

证明 (1) 结论 $\mathcal{X}(y) \subset \ker D_y \tilde{\Upsilon}$ 由引理 4.5 可以立刻得到.

下面注意到元素 $(v, \xi) \in \ker D_y \tilde{\Upsilon} \cap \mathcal{V}_y$ 满足下述三个方程:

- (i) $\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}}v + X_{\xi(\theta)} = 0$;
- (ii) $d_z\mu(v) = 0$;
- (iii) $d\mu \circ J(v) + \dot{\xi} + [\eta_0, \xi] = 0$.

由于 0 是矩映射 μ 的正则值, 由方程 (ii) 可推出 $v \in T\mu^{-1}(0)$. 为了使几何图像更加清晰, 我们将证明分为平凡和乐元和非平凡和乐元两种情形进行讨论.

平凡和乐元情形 这种情形下, $\eta_0 = 0$, 并且方程 (i) 和 (iii) 变为

$$\dot{v} + X_{\xi(\theta)} = 0, \quad d_z\mu(v) = 0.$$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mu^{-1}(0)$ 上的无穷小自由作用以及向量场定义在闭环 S^1 上的要求使得 ξ 必须为 0. 同时第二个方程显示 $v \in \ker d_z\mu \circ J = H_y$.

由此得到, 这样的向量对 (v, ξ) 对应于一个轨形 M 的非扭曲分支切空间中的向量.

非平凡和乐元情形 如前, 我们用 $\varphi_t(z) = \exp(-t\eta_0)z$ 表示向量场 $-X_{\eta_0}$ 生成的初值为 z 的流. 定义

$$\tilde{v} : S^1 \rightarrow T_{z(0)}\mu^{-1}(0), \quad \tilde{v}(t) = \varphi_{-t,*}(v(t)).$$

此处由于 $\mu^{-1}(0)$ 是 G -不变的, 因此, $\tilde{v}$ 存在于子空间 $T_{z(0)}\mu^{-1}(0)$ 中. 切空间 $T_{z(0)}\mu^{-1}(0)$ 可以分解为

$$T_{z(0)}\mu^{-1}(0) = X_{\mathfrak{g}}(z(0)) \oplus H(z(0)),$$

其中 $X_{\mathfrak{g}}$ 表示无穷小 $\mathfrak{g}$ 作用生成的子空间, 而 $H = \ker d\mu \circ J$ 如前定义. 利用这个分解, 将 $\tilde{v}$ 写作 $\tilde{v} = \tilde{v}_G + \tilde{v}_H$. 利用 μ 的 G -等变性和 J 的 G -不变性, 得到

$$\begin{aligned} v_H(\theta) &:= \varphi_{\theta,*}\tilde{v}_H(\theta) \in H(z(\theta)), \\ v_G(\theta) &:= \varphi_{\theta,*}\tilde{v}_G(\theta) \in X_{\mathfrak{g}}(z(\theta)), \quad \theta \in S^1. \end{aligned}$$

因此, 再由方程 (i), 我们得到 $\frac{d}{d\theta}\tilde{v}_H = 0$, 故 $\tilde{v}_H \equiv \tilde{v}(0)$. 根据 φ_t 的表达, 这意味着

$$v_H(0) = d\text{Hol}_{\eta_0}(v_H(0)).$$

故 $v_H(0)$ 存在于 Hol_{η_0} 不动点集 $\mu^{-1}(0)^{\text{Hol}_{\eta_0}}$ 的切空间中.

下面证明 $v_G \equiv 0$ 并且 $\xi \equiv 0$. 应用零是正则值的事实, 我们可以取某 $\zeta : S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$ 使得 $v_G(\theta)$ 可以被写作 $v_G(\theta) = X_{\zeta(\theta)}$. 应用引理 4.5, 方程 (i) 被写为

$$X_{\frac{d}{d\theta}\zeta(\theta)} + X_{[\eta_0, \zeta(\theta)]} + X_{\xi(\theta)} = 0.$$

这等价于

$$\frac{d}{d\theta}\zeta(\theta) + [\eta_0, \zeta(\theta)] + \xi(\theta) = 0. \quad (4.5)$$

考虑 $L^2(S^1)$ 内积,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^1} \left\langle \xi(\theta), \frac{d}{d\theta}\zeta(\theta) + [\eta_0, \zeta(\theta)] + \xi(\theta) \right\rangle d\theta \\ &= - \int_{S^1} \left\langle \zeta(\theta), \frac{d}{d\theta}\xi(\theta) + [\eta_0, \xi(\theta)] \right\rangle d\theta + \|\xi\|_{L^2(S^1)}^2. \end{aligned}$$

根据横截片 (slice) 方程 (iii), 上述方程变为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^1} \langle \zeta(\theta), d\mu \circ J(X_{\zeta(\theta)}) \rangle d\theta + \|\xi\|_{L^2(S^1)}^2 \\ &= \|X_{\zeta(\theta)}\|_{L^2(S^1, X)}^2 + \|\xi\|_{L^2(S^1)}^2, \end{aligned}$$

因此得到 ζ 和 ξ 均为 0.

从 $D_y \tilde{\Upsilon}$ 的表达, 我们清晰地看到 $\ker D_y \tilde{\Upsilon} \cap \mathcal{V}_y$ 是 $\mathcal{G}_{S^1}(y)$ -不变的. 进一步应用引理 4.1(2) 中的

$$\mathcal{G}_{S^1}(y) \cong C_{G_{z(0)}}(\text{Hol}_{\eta}),$$

我们完成了第一个陈述的证明.

(2) 选取任意两个 $(v_i, \xi_i) \in W^{1,2}(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g})$, $i = 1, 2$, 计算

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess}_y(v_1, \xi_1), (v_2, \xi_2) \rangle &= \int_{S^1} \langle J(\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v_1 + X_{\xi_1}), v_2 \rangle + \int_{S^1} \langle d_z \mu(v_1), \xi_2 \rangle \\ &= - \int_{S^1} \langle \mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v_1, Jv_2 \rangle - \int_{S^1} \langle X_{\xi_1}, Jv_2 \rangle + \int_{S^1} \langle d_z \mu(v_1), \xi_2 \rangle \\ &= - \int_{S^1} d\langle v_1, Jv_2 \rangle + \int_{S^1} \langle v_1, J\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v_2 \rangle - \int_{S^1} \langle X_{\xi_1}, Jv_2 \rangle + \int_{S^1} \langle d_z \mu(v_1), \xi_2 \rangle \\ &= 0 + \int_{S^1} \langle v_1, J\mathcal{L}_{-X_{\eta_0}} v_2 \rangle - \int_{S^1} \langle \xi_1, d_z \mu(v_2) \rangle + \int_{S^1} \langle \xi_2, d_z \mu(v_2) \rangle \\ &= \langle \text{Hess}_y(v_1, \xi_1), (v_2, \xi_2) \rangle. \end{aligned}$$

上述推导中, 我们使用了度量和近复结构 J 的 G 不变性以及 z 是向量场 $-X_{\eta_0}$ 的流 (因为 $(z, \eta_0) \in \text{Crit}$).

因此, Hess_y 是对称的, 并且在稠密定义域 $W^{1,2}(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g})$ 上,

$$\text{Hess}_y : W^{1,2}(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g}) \rightarrow L^2(S^1, z^*TX \oplus \mathfrak{g})$$

是自共轭的. 这就证明了 Hess_y 是本征自共轭的.

由命题 4.1(1) $\mathcal{X}_y \subset \ker \text{Hess}_y$, 并且上述推导得到 Hess_y 是自共轭算子, 我们得到 $\mathcal{V}_y$ 的 L^2 -完备化是 Hess_y -不变的. 因此, Hess_y 在 $\mathcal{V}_y$ 的 L^2 -完备化上也是本征自共轭的.

(3) 考虑截面

$$v = (v_H, X_\zeta(z), JX_\alpha(z)) : S^1 \rightarrow z^*H \oplus \text{im}(L_z) \oplus \text{im}(JL_z), \quad \zeta, \alpha : S^1 \rightarrow \mathfrak{g},$$

并注意到 $L^2(S^1, z^*H)$ 和 $L^2(S^1, \text{im}(L_z) \oplus \text{im}(JL_z)) \oplus L\mathfrak{g}$ 是两个 Hess_y 不变子空间. 在 $L^2(S^1, z^*H)$ 上, 我们有

$$\text{Hess}_y(v_H) = J \frac{d}{d\theta} \tilde{v}_H.$$

它的谱集只包括简单实特征值 $\{\frac{k}{|\text{Hol}_\eta|} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ —这是因为它的 $|\text{Hol}_\eta|$ 重覆盖提升共轭于自共轭算子

$$\frac{\sqrt{-1}}{|\text{Hol}_\eta|} \frac{d}{d\theta} : L^2(S^1, \mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} H}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} H}).$$

下面为了更好地理解 $L^2(S^1, \text{im}(L_z) \oplus \text{im}(JL_z)) \oplus L\mathfrak{g}$ 上的部分, 我们利用第 3 节引入的正规形式. 首先将 Hess_y 写作如下表达:

$$\text{Hess}_y(X_\zeta(z), JX_\alpha(z), \xi) = (-X_{\frac{d}{d\theta} \alpha + [\eta_0, \alpha(\theta)] + \xi(\theta)}, JX_{\frac{d}{d\theta} \zeta + [\eta_0, \zeta(\theta)] + \xi(\theta)}, d\mu \circ J(X_\alpha)(z)).$$

继而通过正规形式, 我们有

$$d\mu \circ J(X_\zeta) = \zeta.$$

使用 $-X_\eta$ 的流将每个向量拉回, 我们得到下述简单的表达:

$$\widetilde{\text{Hess}_y}(X_{\tilde{\zeta}}(z), JX_{\tilde{\alpha}}(z), \tilde{\xi}) = (-X_{\frac{d}{d\theta} \tilde{\alpha} + \tilde{\xi}(\theta)}, JX_{\frac{d}{d\theta} \tilde{\zeta} + \tilde{\xi}(\theta)}, \tilde{\alpha}).$$

因此, Hessian 算子可以被等同于

$$(\tilde{\zeta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\xi}) \mapsto \left(-\frac{d}{d\theta} \tilde{\alpha} - \tilde{\xi}, \frac{d}{d\theta} \tilde{\zeta} + \tilde{\xi}, \tilde{\alpha} \right).$$

当限制在横截片 $\mathcal{V}_y$ 上时, 这是一个谱集为整数的一阶椭圆微分算子加上一个紧扰动. 因此考虑的被限制的 Hess_y 的谱集只包括 $\{\frac{k}{|\text{Hol}_\eta|} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 中的简单实特征值. 命题证毕. $\square$

注 4.2 在文献 [3] 中, 本文作者定义了一个 S^1 值作用泛函, 它的临界点对应于我们此处定义的限制闭路. 更进一步, 这个泛函是 $L_{\mathfrak{g}}$ 无穷小作用不变的. 从这个角度看, 上述计算得到的无穷小规范作用生成的向量场属于 $D_y \tilde{\Upsilon}$ 的核是可以期待的.

在本文中, 出于技术原因, 我们并没有直接使用这个泛函 (参见注 6.2). 但是在第 5 节定义的泛函, 在不严格意义上与这个泛函是一样的 (参见注 5.1).

5 $X \times \mathfrak{g}$ 上临界闭路附近的局部泛函

5.1 沿一条闭路路径的典范规范变换

给定一个定义在区间 $[t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$ 上的闭路路径

$$w = (u, \eta) : [t_0, \infty) \rightarrow L(X \times \mathfrak{g}),$$

并且假设 $\|\mu \circ u\|_{C^0([t_0, \infty) \times S^1)}$ 足够小. 我们可以在第 3 节引入的正规形式 $(N^\epsilon, \omega_0, G, J, \mu_0)$ 下考虑. 对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, 可以记

$$w(t) = (u(t), \eta(t)) = ((z(t), JL_{z(t)}\xi(t)), \eta(t)),$$

其中对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, $z(t)$ 是一个 $\mu^{-1}(0)$ 中的闭路, $\xi(t)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的闭路. 我们用 $y(t)$ 作如下表示:

$$y(t) := (z(t), \eta(t)) : S^1 \rightarrow \mu^{-1}(0) \times \mathfrak{g}, \quad t \in [t_0, \infty).$$

使用 (4.3) 附近的符号并用 $\tilde{w} = (\tilde{u}, \tilde{\eta})$ 表示 $L_0 G$ 规范变换后 $[t_0, \infty)$ 上的闭路, 即

$$\tilde{u}(t) := h_{\eta(t)} \cdot u(t) = (h_{\eta(t)}^{-1} z(t), JL_{h_{\eta(t)}^{-1} z(t)} (\text{Ad}_{h_{\eta(t)}^{-1}} \xi(t))),$$

$$\tilde{\eta}(t) := h_{\eta(t)} \cdot \eta(t) \equiv -\text{LogHol}_{\eta(t)}$$

(特别地, 注意到 $\tilde{u}(t, 0) = u(t, 0)$). 由引理 4.2 和度量的 G -不变性, 下面的引理是显然的.

引理 5.1 对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots$, 有

$$\|d_{\tilde{\eta}(t)} \tilde{u}(t)\|_{C^k(S^1)} = \|d_{\eta(t)} u(t)\|_{C^k(S^1)}.$$

同时, 我们有下列引理.

引理 5.2

$$\text{dist}(u(t, 0), \text{Hol}_{\eta(t)}^{-1} u(t, 0)) \leq \|d_{\eta(t)} u(t)\|_{C^0(S^1)}.$$

证明

$$\begin{aligned} \text{dist}(u(t, 0), \text{Hol}_{\eta(t)}^{-1} u(t, 0)) &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial s} (\Psi_{\eta(t)}^{-1}(s) u(t, s)) \right| ds \\ &= \int_0^1 \left| \ell_{\Psi_{\eta(t)}(s)*} \left(\frac{\partial u}{\partial s}(t, s) + X_{\eta(t)}(u(t, s)) \right) \right| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial s}(t, s) + X_{\eta(t)}(u(t, s)) \right| ds \\
 &\leq \|d_{\eta(t)}u(t)\|_{C^0(S^1)}.
 \end{aligned}$$

证毕. $\square$

由此获得了下面的关键引理. 它说明我们可以一致连续地扰动路径 $(\tilde{u}(t), \tilde{\eta}(t))$ 而获得一个它附近的临界闭路光滑路径.

引理 5.3 存在 $\epsilon > 0$, 使得只要对于任意 $t \in [t_0, \infty)$, $\|d_{\eta(t)}u(t)\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon$ 并且 $|\mu(u(t))| = |\xi(t)| \leq \epsilon$, 则存在唯一一个满足 $\exp(\eta_0(t)) \in G_{u(t,0)}$ 的光滑路径 $\eta_0 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{g}$, 满足

- (1) $\|\tilde{\eta}(t) - \eta_0(t)\|_{C^0([t_0, \infty))}$ 被 ϵ 控制;
- (2) 闭路 $\exp(\theta\eta_0(t))\tilde{u}(t, \theta)$ 位于初值点 $\tilde{u}(t, 0) = u(t, 0)$ 的单射半径以内.

证明 首先构造 $[t_0, \infty)$ 族的 η_0 . 由引理 5.2, 可得

$$\text{dist}_{G \cdot u(t,0)}(u(t, 0), \text{Hol}_{\eta(t)}^{-1}u(t, 0)) \leq \|d_{\eta(t)}u(t)\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon,$$

其中 $G \cdot u(t, 0)$ 表示 $\mu^{-1}(0)$ 中过 $u(t, 0)$ 的 G -轨道, $\text{dist}_{G \cdot u(t,0)}$ 由 $\mu^{-1}(0)$ 上的距离 dist 诱导而来. 不失一般性, 我们可以假设 $G \cdot u(t, 0)$ 等距于 $G/G_{u(t,0)}$, 并由此

$$\text{dist}_{G/G_{u(t,0)}}([e], [\text{Hol}_{\eta(t)}]) \leq \epsilon.$$

因此, 一定存在某个 $k_t \in G_{u(t,0)}$ 满足

$$\text{dist}_G(k_t, \text{Hol}_{\eta(t)}) \leq \epsilon.$$

进一步, 只要 $\epsilon < d_{\mu^{-1}(0), G}$, 其中

$$d_{\mu^{-1}(0), G} = \inf_{x \in \mu^{-1}(0)} d_{x, G},$$

而

$$d_{x, G} := \inf_{\substack{k, k' \in G_x \\ k \neq k'}} \text{dist}_G(k, k')$$

由等式 (4.4) 引入, 这样的 $k_t \in G_{u(t,0)}$ 则是唯一的.

现在来看 $[t_0, \infty)$ 族的 $\eta(t)$. 由于我们选择的 $\eta(t)$ 具有光滑的和乐元路径, 关于 t 只有有限个不连续点并分段光滑, 上述构造使得 k_t 关于 t 是光滑的, 并且同时由于 G 是连通紧 Lie 群, 我们可以进一步选择一个关于 t 光滑的联络族 $\eta_0(t)$, 使得对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, 有

$$\exp(\eta_0(t)) = k_t, \quad |\tilde{\eta}(t) - \eta_0(t)| \leq C \text{dist}_G(\text{Hol}_{\eta(t)}, k_t) \leq C\epsilon,$$

其中 C 是一个只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, J, \mu, M)$ 的常数. 由此, 引理 5.3(1) 证毕.

上述 η_0 构造同时显示

$$\exp(\theta\eta_0(t))\tilde{u}(t, \theta) = \exp(\theta(\tilde{\eta}(t) - \eta_0(t)))\Psi_{\eta(t)}^{-1}(\theta)u(t, \theta).$$

因此有估计

$$\text{dist}(\exp(\theta\eta_0(t))\tilde{u}(t, \theta), u(t, 0)) = \int_0^\theta \left| \frac{\partial}{\partial s} \exp(s\eta_0(t))\tilde{u}(t, s) \right| ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\theta \left| \frac{\partial}{\partial s} (\exp(s(\tilde{\eta}(t) - \eta_0(t))) \Psi_{\eta(t)}^{-1}(s) u(t, s)) \right| ds \\
 &\leq C' |\tilde{\eta}(t) - \eta_0(t)| |d_{\eta(t)} u(t, s)|,
 \end{aligned}$$

其中 C' 是只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, J, \mu, M)$ 的常数. 因此此距离被 ϵ^2 控制. 我们可以选择 ϵ 足够小, 使得对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, 在 $u(t, 0)$ 的单射半径内, $\tilde{u}(t)$ 存在. 证毕. $\square$

下面将半径为 r 的开圆盘和闭圆盘分别记作

$$D(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}, \quad \overline{D(r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\},$$

并将其边界记作

$$\partial D(r) = \overline{D(r)} \setminus D(r) = \{z \mid |z| = r\}.$$

根据已得的几个引理, 我们将在下面引理中构造一个函数 (事实上, 我们构造的是一个局部泛函), 它将在本文主要定理证明中发挥主要作用.

引理 5.4 假设 (u, η) 满足: 关于引理 5.3 中的 ϵ , 对于每个 $t \in [t_0, \infty)$ 都有 $\|d_{\eta(t)} u(t)\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon$ 和 $\|\mu(u(t))\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon$, 则对于每个 $t \in [t_0, \infty)$, 存在分段光滑的映射 $u_t : D(2) \rightarrow X$ 以 $u(t) = u_t|_{\partial D(2)}$ 作为边界限制, 满足如下 (1) 中要求.

- (1) (i) $u_t|_{\overline{D(1)}} \subset \mu^{-1}(0)$ 是光滑的并且 $u_t|_{\partial D(1)} = z(t)$;
- (ii) $u_t|_{\overline{D(2)} - D(1)}(s, \theta) = (z(t, \theta), (s-1)JL_{z(t, \theta)}(\xi(t, \theta)))$, 其中 (s, θ) 表示圆盘 $D(2)$ 上的极坐标.
- (2) 定义 $[t_0, \infty)$ 族在 $[0, 2\pi]$ 上的规范变换如下:

$$g_t : S^1 \rightarrow G, \quad g_t(\theta) := h_{\eta(t)}(\theta) \exp(-\theta \eta_0(t)),$$

则 $g_t^{-1}z(t, \cdot)$ 存在于 $z(t, 0)$ 的单射半径内.

使用上述 u_t , 对于 w , 定义函数 $\mathcal{L}_w : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_w(t) := - \int_{D(2)} u_t^* \omega + \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle d\theta, \quad (5.1)$$

则 $\mathcal{L}_w$ 关于 t 是光滑的, 并且满足下述等周不等式:

$$\mathcal{L}_w(t) \leq c_0 (\|d_{\eta(t)} u(t)\|_p^2 + c_1 \|\mu \circ u(t)\|_{\frac{p}{p-1}}^2), \quad (5.2)$$

其中 $c_0, c_1 > 0$ 是只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, \mu, J, M)$ 的常数, 常数 $1 \leq p \leq 2$.

证明 由引理 5.3, 对每个 $t \in [t_0, \infty)$, 闭路 $g_t^{-1}z(t, \cdot)$ 存在于 $z(t, 0)$ 的单射半径内, 因此是可缩的. 故可以取一个如下定义的位于单射半径内的光滑圆盘使其边界为闭路 $g_t^{-1}z(t, \cdot)$:

$$\bar{u}_t^1 : D(1) \rightarrow \mu^{-1}(0).$$

定义

$$\bar{u}_t^2|_{D(2) - D(1)}(s, \theta) = (g_t^{-1}z(t, \cdot), (s-1)JL_{g_t^{-1}z(t, \cdot)}(\text{Ad}_{g_t^{-1}}\xi(t, \theta))).$$

用 $\bar{u}_t$ 表示分段光滑的连接 $\bar{u}_t^1$ 和 $\bar{u}_t^2$ 的光滑映射. 我们得到 $u_t := g_t^{-1}\bar{u}_t : D(2) \rightarrow X$ 是分段光滑的映射, 并且对于每个 $t \in [t_0, \infty)$ 满足 (1) 中的两个条件.

下面证明 (5.1) 定义的函数 $\mathcal{L}_w : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足等周不等式 (5.2). 为此先证明如下引理.

引理 5.5

$$\mathcal{L}_w(t) = - \int_{D(2)} \bar{u}_t^* \omega + \int_{S^1} \langle \mu(\bar{u}(t, \theta)), (g_t^{-1} \cdot \eta)(t, \theta) \rangle d\theta. \quad (5.3)$$

证明 对于每个取定的 $t \in [t_0, \infty)$, 有如下计算:

$$\begin{aligned} \int_{D(2)} \bar{u}_t^* \omega - \int_{D(2)} u_t^* \omega &= \int_{D(2)} (g_t u_t)^* \omega - u_t^* \omega \\ &= - \int_{D(2)} d \langle \mu \circ u_t, g_t^{-1}(dg_t) \rangle \\ &= - \int_{\partial D(2)} \langle \mu \circ u(t, \cdot), g_t^{-1}(dg_t) \rangle. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} &\int_{S^1} \langle \mu(\bar{u}(t, \theta)), (g_t^{-1} \cdot \eta)(t, \theta) \rangle d\theta - \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle d\theta \\ &= \int_{S^1} \langle \mu(g_t u_t(\theta)), (g_t^{-1} \cdot \eta)(t, \theta) \rangle d\theta - \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle d\theta \\ &= \int_{S^1} \langle \text{Ad}_{g_t} \mu(u_t), \text{Ad}_{g_t} \eta - (dg_t) g_t^{-1} \rangle - \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle d\theta \\ &= \int_{S^1} (\langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle - \langle \mu(u(t, \theta)), g_t^{-1}(dg_t) \rangle) d\theta - \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), \eta(t, \theta) \rangle d\theta \\ &= - \int_{S^1} \langle \mu(u(t, \theta)), g_t^{-1}(dg_t) \rangle d\theta. \end{aligned}$$

引理得证. $\square$

由于等式 (5.3) 的右边与 $\bar{u}_t^1$ 的选取无关而只依赖于边界曲线 $\bar{z}_t$, 并注意到 $\bar{z}_t$ 关于 t 光滑, 因此, 函数 $\mathcal{L}_w$ 关于 t 是光滑的. 另一方面, 应用引理 5.5 和度量的 G -不变性, 我们只需要对 $\bar{u}_t$ 证明 (5.2). 这是因为 $d_{g \cdot \eta}(g^{-1}u) = \ell_{g^{-1}*}(d_\eta u)$, 并且 μ 是 G -等变的.

首先, 对 $\bar{u}(t, 0)$ 单射半径中的小圆盘, 有下面标准的辛等周不等式, 即对任意取定的 $1 \leq p \leq 2$, 有

$$- \int_{D(2)} \bar{u}_t^* \omega \leq c \|d\bar{u}_t|_{\partial D(2)}(\theta)\|_p^2. \quad (5.4)$$

对于另一项, 有估计

$$\int_{S^1} \langle \mu(\bar{u}(t, \theta)), (g_t \cdot \eta)(t, \theta) \rangle d\theta \leq c' \|\mu(\bar{u}_t)\|_{\frac{p}{p-1}}^2 + c' \|g_t \cdot \eta\|_p^2.$$

另一方面, 因为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 X 上的无穷小作用在 $\mu^{-1}(0)$ 附近是自由的, 所以有

$$\|g_t \cdot \eta\|_p^2 \leq \|X_{g_t \cdot \eta}(\bar{u}_t)\|_p^2.$$

当常数 c_0 和 c_1 足够大时, 有

$$- \int_{D(2)} \bar{u}_t^* \omega + \int_{S^1} \langle \mu(\bar{u}(t, \theta)), (g_t \cdot \eta)(t, \theta) \rangle d\theta \leq c_0 (\|d_{g_t \cdot \eta} \bar{u}_t|_{\partial D(2)}(\theta)\|_p^2 + c_1 \|\mu(\bar{u}_t)\|_{\frac{p}{p-1}}^2)$$

(此步证明可参见文献 [5, 第 368 页, 断言 3]).

由此我们完成了引理 5.4 的证明. $\square$

注 5.1 此处关于等周不等式 (5.2), 实际上可以像文献 [5] 一样得到最佳估计常数. 例如, (5.4) 中的常数 c 可以取作任何 $c > \frac{1}{4\pi}$. 同时模仿文献 [5] 中的相关方法, 我们也可以证明这里定义的函数 $\mathcal{L}$ 是一个局部泛函. 事实上, 这个泛函与作者在文献 [3] 中引入的泛函一致 (关于此泛函, 也可参见文献 [21, 22])—这是因为我们可以将闭路 $z(t_0, \cdot) : S^1 \rightarrow \mu^{-1}(0)$ 以及 $u_{t_0}|_{\overline{D(1)}}$ 作为参考闭路 (reference loop), 并同时注意到在同一同伦群中改变参考闭路不改变局部泛函. 由于本文并不需要此局部泛函, 我们将详细推导留给有兴趣的读者.

5.2 辛涡旋的能量等式

考虑引理 5.3 给定的 ϵ . 现在对满足

$$\|d_{\eta(t)}u(t)\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon, \quad \|\mu(u(t))\|_{C^0(S^1)} \leq \epsilon, \quad \text{任意 } t \in [t_0, \infty) \quad (5.5)$$

的映射对 $w = (u, \eta) : [t_0, \infty) \times S^1 \rightarrow X \times \mathfrak{g}$ 使用引理 5.4 构造函数

$$\mathcal{L}_w : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

则 $\mathcal{L}_w$ 满足等周不等式 (5.2). 特别地, 注意到不等式 (5.2) 中的常数均与 w 无关, 而只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, J, \mu, M)$.

现在进一步假设

$$u : [t_0, \infty) \times S^1 \rightarrow X, \quad \eta : [t_0, \infty) \times S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$$

的映射对 $w = (u, \eta)$ 是一个半柱形 $[t_0, \infty) \times S^1$ 上的时间规范辛涡旋, 则 $\mathcal{L}_w$ 和能量泛函将以下述命题方式相关.

命题 5.1 假设 $w = (u, \eta)$ 是一个时间规范辛涡旋并满足假设 (5.5), 则对任意 $[t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$, 有

$$E(w; [t_1, t_2] \times S^1) := \int_{[t_1, t_2] \times S^1} e(u, \eta) \nu_h = \mathcal{L}_w(t_1) - \mathcal{L}_w(t_2), \quad (5.6)$$

其中 $e(u, \eta)$ 是 (2.3) 定义的能量密度函数.

证明 用 $\tilde{u}$ 表示连接闭路 u_{t_1} 和 u_{t_2} 的一条由以下三部分 $\overline{u_{t_1}^2}$ 、 z_t 和 $u_{t_2}^2$ 组成的路径, 其中 u_t^2 在引理 5.4 的证明中被定义, u_t^2 的上横线表示将路径反向.

根据构造, u 和 $\tilde{u}$ 是相对于边界 $u(t_1, \cdot)$ 和 $u(t_2, \cdot)$ 同伦的. 由此, 从 (2.4) 得到

$$E(w; [t_1, t_2] \times S^1) = \int_{[t_1, t_2] \times S^1} \tilde{u}^* \omega - d\langle \mu(\tilde{u}), \eta \rangle.$$

另一方面, 逐一考虑构成 $\tilde{u}$ 的三部分 $\overline{u_{t_1}^2}$ 、 z_t 和 $u_{t_2}^2$, 我们有如下等式:

$$\begin{aligned} \int_{[t_1, t_2] \times S^1} \tilde{u}^* \omega - d\langle \mu(\tilde{u}), \eta \rangle &= \left[\mathcal{L}_w(t_1) - \left(\int_{D(1)} (\tilde{u}_{t_1}^1)^* \omega - d\langle \mu(\tilde{u}_{t_1}^1), \eta \rangle \right) \right] \\ &\quad + \left(\int_{D(1)} z^* \omega - d\langle \mu(z), \eta \rangle \right) \\ &\quad - \left[\mathcal{L}_w(t_2) - \left(\int_{D(1)} (\tilde{u}_{t_2}^1)^* \omega - d\langle \mu(\tilde{u}_{t_2}^1), \eta \rangle \right) \right] \\ &= \mathcal{L}_w(t_1) - \mathcal{L}_w(t_2) + \int_{S^2} (u^1)^* \omega, \end{aligned}$$

其中 $\bar{u}_{t_1}^1$ 和 $\bar{u}_{t_2}^1$ 同于引理 5.4 的证明中使用的符号, u^1 是一条连接闭路 $\bar{u}_{t_1}^1$ 、 z 和 $u_{t_2}^1$ 的路径.

注意到, 由引理 5.3 和 5.4 中定义的 $[t_0, \infty)$ 族 S^1 上规范变换, 可将 u^1 变换到可缩球面, 并且取值于水平集 $\mu^{-1}(0)$. 最后一项在上述规范变换下保持不变, 因此是 0. 命题证毕. $\square$

从命题 5.1 可知, 对于时间规范辛涡旋 w , 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}_w(t) =: \mathcal{L}_w(\infty)$ 存在 (注意, 到现在为止, 我们并不知道任何关于 w 的 C^0 收敛性). 进一步应用 (5.2), 我们得到下面结果.

推论 5.1 在与命题 5.1 同样的假设下, $\mathcal{L}_w(\infty) = 0$.

在结束本节前, 我们强调目前为止我们尚未对端口半柱形 $[t_0, \infty) \times S^1$ 上的度量作任何要求.

6 渐近行为

本节将证明定理 1.1. 首先将它的表述分为下述两个命题.

命题 6.1 假设 $(P, w) = (P, u, A)$ 是定义在具有可允许度量 h 的有 k 个孔的 Riemann 曲面 (Σ, j) 上的一个有限能量辛涡旋, 那么存在某个规范变换 $\Phi \in \mathcal{G}_P$ 和 k 个临界闭路 $x_\infty^i = (z_\infty^i, \eta_\infty^i)$, $i = 1, \dots, k$, 以及只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, \mu, J, M)$ 的常数 $\delta > 0$, 使得 $\Phi \cdot w = (\Phi^*u, \Phi^*A)$ 在孔邻域柱坐标系下满足时间规范, 并且存在常数 $C > 0$, 使得对于任意 $\theta \in S^1$ 有如下估计:

- (1) $|d_{\Phi^*A}\Phi^*u(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t}$;
- (2) $|\mu(\Phi^*u)(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t - bt}$;
- (3) $|F_{\Phi^*A}(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t + bt}$;
- (4) $\text{dist}(\Phi \cdot u(t, \theta), z_\infty(\theta)) \leq Ce^{-\delta t}$;
- (5) $\|\Phi^*A(t, \cdot) - \eta_\infty(\cdot)\|_{L^p(S^1)} \leq Ce^{-(\delta + b(\frac{2}{p}-1))t}$, 只要 p, b 和 δ 满足 $p \geq 2$ 且 $\delta + b(\frac{2}{p}-1) > 0$.

这里使用 $z_\infty, \eta_\infty, \delta$ 和 b 代表相应具有下标 i ($i = 1, \dots, k$) 的闭路、联络形式、收敛常数和度量参数.

推论 6.1 在与命题 6.1 相同的假设下, 存在某规范变换 $\Phi \in \mathcal{G}_P$ 和 k 个常值联络临界闭路 $x_\infty^i = (z_\infty^i, \eta_\infty^i)$, $i = 1, \dots, k$, 以及只依赖于几何结构 $(X, \omega, G, \mu, J, M)$ 的常数 $\delta > 0$, 使得 $\Phi \cdot w = (\Phi^*u, \Phi^*A)$ 在孔邻域柱坐标系下满足时间规范, 并且存在常数 $C > 0$, 使得对于任意 $\theta \in S^1$ 有如下估计:

- (1) $|d_{\Phi^*A}\Phi^*u(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t}$;
- (2) $|\mu(\Phi^*u)(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t - bt}$;
- (3) $|F_{\Phi^*A}(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t + bt}$;
- (4) $\|\text{dist}(\Phi \cdot u(t, \cdot), z_\infty(\cdot))\|_{L^p(S^1)} + \|\Phi^*A(t, \cdot) - \eta_\infty(\cdot)\|_{L^p(S^1)} \leq Ce^{-(\delta + b(\frac{2}{p}-1))t}$, 只要 p, b 和 δ 满足 $p \geq 2$ 且 $\delta + b(\frac{2}{p}-1) > 0$.

这里使用 $z_\infty, \eta_\infty, \delta$ 和 b 代表相应具有下标 $i = 1, \dots, k$ 的闭路、联络形式、收敛常数和度量参数.

本节余下部分是以上两个命题的证明.

6.1 b 能量密度的指数衰减

首先注意到我们只需对半柱形端口证明定理 1.1. 故不失一般性, 假设 $w = (u, \eta)$ 是定义在 $[0, \infty) \times S^1$ 上的有限能量辛涡旋. 半柱形上的度量具有如下形式:

$$h = e^{2b(t)}(dt^2 + d\theta^2), \quad (t, \theta) \in [0, \infty) \times S^1.$$

定义 b 能量密度函数

$$e_b(w) : [0, \infty) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

$$e_b(w) = \frac{1}{2}(|d_\eta u|^2 + e^{-2b(t)}|F_\eta|^2 + e^{2b(t)}|\mu \circ u|^2), \quad (6.2)$$

其中 $|\cdot|$ 表示由标准度量 $dt^2 + d\theta^2$ 引入的范数. 因此, w 在 $[0, \infty) \times S^1$ 的能量可以写作

$$E(u, \eta) = \int_{[0, \infty) \times S^1} e_b(w) dt d\theta < \infty.$$

下面的引理来自于文献 [5, 引理 3.3]. 它的证明依赖于文献 [10, 第 9 节] 给出的能量先验估计. 注意到文献 [5, 引理 3.3] 和 [10, 第 9 节] 均假设群 G 作用于水平集 $\mu^{-1}(0)$ 上是自由的. 但是实际上它们的证明只需要 Lie 代数的无穷小作用是自由的. 因此无需任何更改, 我们可以将它用于现在的情形.

引理 6.1 存在只依赖于几何结构 (X, ω, G, μ) 的常数 $c > 0$, 使得任何 $[0, \infty) \times S^1$ 上关于度量

$$h = e^{2bt}(dt^2 + d\theta^2), \quad (t, \theta) \in [0, \infty) \times S^1, \quad b \geq 0$$

定义的有限能量时间规范辛涡旋 $w = (u, \eta)$ 都存在某 $t_0 > 1$, 使得它的 b 能量密度函数满足估计

$$e_b(w)(t, \theta) \leq cE(w; [t-1, t+1] \times S^1), \quad \text{只要 } t \geq t_0.$$

注 6.1 文献 [5, 引理 3.3] 关于度量的可允许条件比我们此处的更为宽泛. 我们的结论也可以放宽为相同假设. 这里只讨论具有线性指数项的共形度量, 即假设 $b(t) = bt$, $b \geq 0$, 因为这具有相对简单的陈述而对于我们需要的应用已经足够.

应用此引理并假设度量 h 是可允许的, 即 $b \geq 0$, 我们可以选取足够大的 t_0 , 使得 (5.5) 的假设被满足. 由此, 函数 $\mathcal{L}_w : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 可以用 (5.1) 定义.

现在应用命题 5.1 和算式 (5.2) (其中 $p = 2$), 我们得到如下估计:

$$\begin{aligned} E(w; [t, \infty)) &= \mathcal{L}_w(t) \\ &\leq c_0(\|d_\eta u(t)\|_{L^2(S^1)}^2 + c_1\|\mu \circ (u)(t)\|_{L^2(S^1)}^2) \\ &\leq \frac{1}{2\delta} \left(\frac{1}{2}\|d_\eta u(t)\|_{L^2(S^1)}^2 + e^{2b(t)}\|\mu \circ (u)(t)\|_{L^2(S^1)}^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2\delta} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \int_{S^1} e_b(w) d\theta dt \\ &= -\frac{1}{2\delta} \frac{d}{dt} E(w; [t, \infty)), \end{aligned}$$

其中 $\delta > 0$ 是某个被 c_0 和 c_1 决定的常数. 注意到第二步不等式的导出中, 我们用到了度量 h 是可允许的. 由此得到

$$E(w; [t, \infty)) \leq E(w)e^{-2\delta t}, \quad \text{只要 } t \geq t_0, \quad (6.3)$$

其中 $E(w)$ 表示 w 在区间 $[0, \infty) \times S^1$ 上的能量.

再次应用引理 6.1, 得到

$$|d_\eta u(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t}, \quad (6.4)$$

$$|\mu(u)(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t - bt}, \quad (6.5)$$

$$|F_\eta(t, \theta)| \leq Ce^{-\delta t + bt}, \quad (6.6)$$

其中 $C > 0$ 是依赖于几何结构 $(X, \omega, G, J, \mu, M)$ 和 $E(w)$ 初值的常数.

6.2 映射 w 到临界闭路的指数收敛

下面为了得到极限临界闭路, 即 C^0 下的收敛, 考虑如下平移序列. 对于任意满足 $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i \rightarrow \infty$ 的序列 $\{t_i\}$, $i \in \mathcal{I} = \mathbb{Z}$ 或 $i \in \mathcal{I} = \mathbb{R}$, 定义

$$w_i(t, \theta) = (u_i(t, \theta), \eta_i(t, \theta)), \quad t \in [-t_i, \infty).$$

简单计算得知, $\{w_i\}$ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + J(u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} + X_{\eta_i}(u_i) \right) &= 0, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + e^{2bt+2bt_i} \mu(u_i) &= 0, \quad (t, \theta) \in [-t_i, \infty) \times S^1. \end{aligned}$$

换句话说, 每个 w_i 都是一个 $([-t_i, \infty) \times S^1, j_0, e^{2b_i(t)}(dt^2 + d\theta^2))$, $b_i(t) = b(t + t_i)$ 上的时间规范辛涡旋. 更进一步, 它们具有一致的能量上界, 因为对于每个 i , 任何紧子集 $K \subset [-t_i, \infty)$ 上的能量

$$E_{b_i}(w_i|_{K \times S^1}) \leq E_b(w) \leq \infty.$$

这里用符号 E_{b_i} 来区分关于不同的度量 $e^{2b_i(t)}(dt^2 + d\theta^2)$ 的能量.

下述引理来自于文献 [10, 引理 9.3]. 为了方便使用, 我们使用柱形坐标表达 (事实上, 文献 [10, 引理 9.3] 也包括高阶 L^p 估计. 我们并没有将其列出, 因为本文结果并不需要这些估计).

引理 6.2 对于任意 $C_0 > 0$, 存在常数 $\epsilon_0 > 0$ 和 $c > 0$, 使得任何满足关于 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + X_\eta(u) \right) &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + e^{2bt} \epsilon^{-2} \mu(u) &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

且

$$\|d_\eta u\|_{L^\infty(K)} + \epsilon^{-1} \|\mu(u)\|_{L^\infty(K)} < C_0$$

的在 $K := [-2, 2] \times S^1$ 上定义的时间规范映射对 (u, η) , 有 $K_0 := [0, 1] \times S^1$, $2 \leq p \leq \infty$ 上的估计

$$\|\mu(u)\|_{L^p(K_0)} \leq c\epsilon^{\frac{2}{p}+1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(K)} + c\epsilon^{\frac{2}{p}} \|\mu(u)\|_{L^2(K)}. \quad (6.8)$$

此处所有的范数都是关于标准度量 $dt^2 + d\theta^2$ 的.

特别地, 如果 $b = 0$, ϵ_0 可以取作 1.

证明 我们将方程在 Euclid 坐标 $z = e^{t+i\theta}$ 下写出, 并将 $\lambda = e^{bt-t}$ 代入文献 [10, 引理 9.3] 中的不等式, 则立刻得到需要证明的不等式.

这里, ϵ 的指数保持文献 [10, 引理 9.3] 中的形式不变, 是因为这里考虑的区域 K 和 K_0 都是有界的, 这使得左边变换不会影响常数 c . 证毕. $\square$

现在取 $\epsilon = e^{-bt_i}$ 并应用 (6.8), 我们立即得到, 对于每个 w_i , 有

$$\|\mu(u_i)\|_{L^p(K_0)} \leq c e^{-(\delta + b(\frac{2}{p}+1))t_i}. \quad (6.9)$$

从现在起, 假设 $p \geq 2$ 并且

$$\delta' := \delta + b\left(\frac{2}{p} - 1\right) > 0.$$

首先得到关于 η_i ($i = 1, 2, \dots$) 的估计. 对于每个 $\theta \in S^1$, 有

$$\begin{aligned} |\eta_i(1, \theta) - \eta_i(0, \theta)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial t}(t, \theta) \right| dt \\ &\leq c_b \int_0^1 |e^{2bt_i} \mu(u_i)(t, \theta)| dt \\ &\leq c_b e^{2bt_i} \|\mu(u_i)(\cdot, \theta)\|_{L^p([0,1])}, \end{aligned}$$

其中 c_b 是依赖于 b 的常数. 上述推导中第二个不等式来自于 (6.7), 第三个不等式应用 Hölder 不等式. 注意到对于 $t_i = i$ ($i = 1, 2, \dots$), 有 $\eta_i(1, \theta) = \eta_{i+1}(0, \theta)$. 因此应用上面的估计得到

$$\begin{aligned} \|\eta_{i+1}(0, \cdot) - \eta_i(0, \cdot)\|_{L^p(S^1)} &= \left(\int_{S^1} |\eta_i(1, \theta) - \eta_i(0, \theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_b e^{2bt_i} \|\mu(u_i)\|_{L^p(K_0)} \\ &\leq c_b e^{-\delta' t_i}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式来自 (6.9). 由此, 当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\eta_i(0, \theta)$ 收敛到某个 $\eta_\infty \in L^p(S^1, \mathfrak{g})$. 进一步应用 (6.7) 和 (6.9), 得到

$$\|\eta(t, \cdot) - \eta_\infty(\cdot)\|_{L^p(S^1)} \leq c_b e^{-\delta' t}.$$

类似的做法应用于对 u 的收敛性证明. 对于 $\theta \in S^1$, 有

$$\begin{aligned} \text{dist}(u_{i+1}(0, \theta), u_i(0, \theta)) &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \theta) \right| dt \\ &\leq c e^{-\delta t_i}. \end{aligned}$$

此处最后一个不等式来自于将 (6.4) 在时间规范辛涡旋上的应用. 这证明了存在 $z_\infty \in C^0(S^1, X)$ 使得 $u_i(0, \theta)$ 收敛到 $z_\infty(\theta)$. 再次应用 (6.4), 得到

$$\text{dist}(u(t, \theta), z_\infty(\theta)) \leq c e^{-\delta t}, \quad \forall \theta \in S^1,$$

并且同时由 (6.5) 得到 $\mu(z_\infty) = 0$.

现在证明 (z_∞, η_∞) 是一个极限闭路. 从上述已证明的收敛性, 我们得到向量场 $X_{\eta(t, \theta)}(u(t, \theta))$ 通过平行移动收敛到向量场 $X_{\eta_\infty(\theta)}(z_\infty(\theta))$. 而同时, 我们又有 $|\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, \theta) + X_{\eta(t, \theta)}(u(t, \theta))|$ 指数 δ 的指数衰减到 0 的性质. 因此借助 Sobolev 嵌入定理, 得到 $z_\infty \in W^{1,p}(S^1) \subset C^{0,\alpha}(S^1)$, 并且

$$\dot{z}_\infty + X_{\eta_\infty}(z_\infty) = 0.$$

命题 6.1 证毕.

现在应用由 (4.3) 定义的规范变换得到 $W^{1,p}(S^1, G)$ 中的基点规范变换 $h_{\eta(t)}$ 和 h_{η_∞} . 根据 $\eta(t, \cdot)$ 的 $L^p(S^1)$ 范数意义下的指数收敛, 有

$$\begin{aligned} \text{dist}_{L^p(S^1)}(\text{Hol}_{\eta(t)}, \text{Hol}_{\eta_\infty}) &\leq c e^{-\delta' t}, \\ \text{dist}_{L^p(S^1)}(h_{\eta(t)}, h_{\eta_\infty}) + \left\| \frac{\partial h_{\eta(t)}}{\partial \theta} - \frac{\partial h_{\eta_\infty}}{\partial \theta} \right\|_{L^p(S^1)} &\leq c e^{-\delta' t}, \end{aligned}$$

其中 $c > 0$ 是 (可能比前边使用的 c 大的) 常数.

定义 $[0, \infty) \times S^1$ 上平凡主丛的规范变换为 $\Phi(t, \theta) = h_{\eta_\infty}(\theta)$. 我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi^* \eta(t, \cdot) - h_{\eta_\infty}^* \eta_\infty\|_{L^p(S^1)} &\leq c e^{-\delta' t}, \\ \|\text{dist}(\Phi^* u(t, \cdot), h_{\eta_\infty}^* z_\infty)\|_{L^p(S^1)} &\leq c e^{-\delta' t}.\end{aligned}$$

特别地, 这里 $h_{\eta_\infty}^* \eta_\infty = -\text{LogHol}_{\eta_\infty}$ 是常数, 并且 $(h_{\eta_\infty}^* z_\infty, h_{\eta_\infty}^* \eta_\infty)$ 是一个常值联络临界闭路.

推论 6.1 证毕.

我们用关于上述证明的如下两个注释作为本节的结束.

注 6.2 (1) 收敛指数 δ 可以被优化至任何小于横截片上形式 Hessian 算子的最小非零特征值的正常数. 它的证明可以模仿文献 [23] 中给出的 Morse-Bott 情形下的“三区间”方法实现. 我们将其细节留给感兴趣的读者.

由命题 4.1(3), 我们已证明此时最佳收敛指数是和乐元 Hol_{η_∞} 在 G 中阶的倒数. 特别地, 当群作用在水平集 $\mu^{-1}(0)$ 上的自由性被假设以后, 这个指数可取作任意小于 1 的正常数.

(2) 我们在本文中的证明方法并非直接应用命题 4.1 所得的 Morse-Bott 条件, 而是先通过能量密度指数衰减得到 C^0 指数收敛. 其技术上的原因是, 对于 $b \neq 0$ 的情形, 能量先验估计 (参见文献 [10, 引理 9.3]) 无法确保直接依靠平移得到某个的临界闭路而进行估计. 当 $b = 0$ 时, 方程具有平移不变性, 并且一个此类方式的证明在文献 [3] 中被作者给出.

致谢 陈柏辉和王百灵感谢 RIMS (Research Institute for Mathematical Sciences), 特别是 Kaoru Ono 教授, 提供的良好研究环境. 王蕊感谢 Yong-Geun Oh 教授多年的教育支持以及合作. 另外, 我们感谢匿名审稿人的认真阅读和宝贵意见, 以及杜承勇在本文的中文编辑中提供的大力帮助.

参考文献

- 1 Chen W, Ruan Y. A new cohomology theory of orbifold. *Comm Math Phys*, 2004, 248: 1–31
- 2 Fan H, Jarvis T, Ruan Y. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. *Ann of Math* (2), 2013, 178: 1–106
- 3 Chen B, Wang B-L, Wang R. L^2 -moduli spaces of symplectic vortices on Riemann surfaces with cylindrical end metrics. *ArXiv:1405.6387*, 2014
- 4 Ziltener F. Symplectic vortices on the complex plane and quantum cohomology. PhD Thesis. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2006
- 5 Ziltener F. The invariant symplectic action and decay for vortices. *J Symplectic Geom*, 2009, 7: 357–376
- 6 Venugopalan S, Woodward C. Classification of affine vortices. *Duke Math J*, 2016, 165: 1695–1751
- 7 Cieliebak K, Gaio A R P, Salamon D A. J -holomorphic curves, moment maps, and invariants of Hamiltonian group actions. *Int Math Res Not IMRN*, 2000, 2000: 831–882
- 8 Mundet i Riera I. Yang-Mills-Higgs theory for symplectic fibrations. PhD Thesis. Madrid: UAM, 1999
- 9 Mundet i Riera I. A Hitchin-Kobayashi correspondence for Kähler fibrations. *J Reine Angew Math*, 2000, 528: 41–80
- 10 Gaio A R P, Salamon D A. Gromov-Witten invariants of symplectic quotients and adiabatic limits. *J Symplectic Geom*, 2005, 3: 55–159
- 11 Ziltener F. A quantum Kirwan Map: Bubbling and Fredholm Theory for Symplectic Vortices over the Plane. Providence: Amer Math Soc, 2014
- 12 Woodward C T. Quantum Kirwan morphism and Gromov-Witten invariants of quotients I. *Transform Groups*, 2015, 20: 507–556
- 13 Woodward C T. Quantum Kirwan morphism and Gromov-Witten invariants of quotients II. *Transform Groups*, 2015, 20: 881–920
- 14 Woodward C T. Quantum Kirwan morphism and Gromov-Witten invariants of quotients III. *Transform Groups*, 2015, 20: 1155–1193
- 15 Tian G, Xu G. The symplectic approach of gauged linear σ -model. *ArXiv:1702.01428*, 2017
- 16 Venugopalan S. Vortices on surfaces with cylindrical ends. *J Geom Phys*, 2015, 98: 575–606

- 17 Wang D, Xu G. Compactness in the adiabatic limit of disk vortices. [Math Z](#), 2017, 287: 405–459
- 18 Xu G. Gauged Hamiltonian Floer homology I: Definition of the Floer homology groups. [Trans Amer Math Soc](#), 2016, 368: 2967–3015
- 19 Sjamaar R, Lerman E. Stratified symplectic spaces and reduction. [Ann of Math \(2\)](#), 1991, 134: 375–422
- 20 Weinstein A. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. [Adv Math](#), 1971, 6: 329–346
- 21 Frauenfelder U. The Arnold-Givental conjecture and moment Floer homology. [Int Math Res Not IMRN](#), 2004, 2004: 2179–2269
- 22 Frauenfelder U. Vortices on the cylinder. [Int Math Res Not IMRN](#), 2006, 2006: 63130
- 23 Oh Y G, Wang R. Analysis of contact Cauchy-Riemann maps II: Canonical neighborhoods and exponential convergence for the Morse-Bott case. [Nagoya Math J](#), 2018, 231: 128–223

The asymptotic behavior of finite energy symplectic vortices with admissible metrics

Bohui Chen, Bai-Ling Wang & Rui Wang

Abstract Assume (X, ω) is a compact symplectic manifold with a Hamiltonian action of a compact Lie group G . We prove that at cylinder ends whose metrics grow up at least cylindrically fast, a finite energy symplectic vortex exponentially converges to (un)twisted-sectors of the symplectic reduction at a regular value of the moment map, without assuming the group action on the regular level set is free. It generalizes the corresponding results by Ziltener under the free action assumption. The result of this paper has important applications in the study of quantum Kirwan morphism by the authors.

Keywords symplectic reduction, Hamiltonian Gromov-Witten theory, symplectic vortex equation, asymptotic behavior, admissible metric

MSC(2010) 53D20, 53D45

doi: 10.1360/N012017-00235