C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 299-302 (24 janvier 1972) **Série A**

ALGÈBRE. — *Existence de polarisations positives dans les algèbres de Lie.* Note de Mme **Michèle Vergne** et M. **Joseph Wolf**, transmise par M. Gaston Julia.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle extension d'une algèbre de Lie compacte par une algèbre de Lie résoluble, alors en tout point $f$ de $\mathfrak{g}^*$, il existe une polarisation positive.

1. Rappels et énoncés des résultats. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$; si $f \in \mathfrak{g}^*$, notons $B_f$ la forme bilinéaire alternée $(x, y) \mapsto f([x, y])$ et $\mathfrak{g}(f)$ son noyau. On prolonge $B_f$ par linéarité à $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. On notera $E(f)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ totalement isotropes maximaux pour $B_f$ et $E^+(f)$ l'ensemble des éléments W de $E(f)$ tels que la restriction à W de la forme hermitienne $H_f(x, y) = i\,B_f(x, \bar{y})$ soit positive ou nulle.

Il est important pour la théorie des représentations de savoir s'il existe un élément $\mathfrak{h}$ de $E(f)$ ou mieux de $E^+(f)$ qui soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, et tel que de plus $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ soit aussi une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

On notera $P(f)$ et respectivement $P^+(f)$ l'ensemble (peut-être vide) de tels éléments. Plus généralement, si G est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ laissant stable $f$, on notera $E(f; G)$, $E^+(f; G)$, $P(f, G)$, $P^+(f, G)$ les sous-ensembles de $E(f)$, $E^+(f)$, $P(f)$ et $P^+(f)$ formés des éléments de ces ensembles qui sont stables sous l'action du groupe G.

Les résultats suivants sont connus :

A. Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f$ un point de $\mathfrak{n}^*$, G un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{n}$ laissant stable $f$; si G est résoluble et connexe (ou sous diverses hypothèses plus faibles que la connexité), alors $P^+(f; G)$ est non vide. Le résultat est dû à L. Auslander et B. Kostant [1]; *voir* aussi [6].

On en déduit facilement que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, alors pour tout point $f$ de $\mathfrak{g}^*$, $P^+(f)$ est non vide.

B. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque, $f$ un élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\dim \mathfrak{g}(f)$ soit minimal, alors $P(f)$ est non vide [mais non nécessairement $P^+(f)$] et on peut trouver une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ résoluble dans $P(f)$.

Ce résultat est dû à J. Dixmier [2], *voir aussi* M. Duflo [4].

C. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie compacte et $f \in \mathfrak{g}^*$, alors $P^+(f)$ est non vide. Ce résultat est connu de la plupart des auteurs semi-simples de ce siècle. L'observation explicite semble due à B. Kostant : soit K la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ et soit $x_f \in \mathfrak{g}$ défini par $f(x) = K(x, x_f)$. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan contenant $x_f$ et soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \Sigma\, \mathfrak{g}^{\varphi}$, où $\varphi$ parcourt les racines de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ relativement à $\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$ telles que $i\varphi(x_f) \geqq 0$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ et $\mathfrak{h} \in P^+(f)$.

On désire prouver les résultats suivants :

Proposition 1. — *Soit* $\mathfrak{n}$ *une algèbre de Lie nilpotente, $f$ un point de* $\mathfrak{n}^*$ *et* G *un groupe d'automorphismes de* $\mathfrak{n}$ *laissant stable $f$. Pour que* P $(f; G)$ [resp. $P^+(f; G)$] *soit non vide, il faut et il suffit que* E $(f; G)$ [resp. $E^+(f; G)$] soit non vide.

Proposition 2. — *Soit* $\mathfrak{n}$ *une algèbre de Lie nilpotente, $f$ un point de* $\mathfrak{n}^*$ *et* G *un groupe d'automorphismes de* $\mathfrak{n}$ *laissant stable $f$.*

(1) *Si* G *est, soit compact, soit connexe et extension d'un groupe compact par un groupe résoluble, alors* $P^+(f; G)$ *est non vide.*

(2) *Si* E $(f; G)$ *est non vide, alors* G *considéré comme sous-groupe du groupe symplectique* Sp $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f), B_f)$ *est, soit compact, soit contenu dans un sous-groupe parabolique.*

Proposition 3. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *un algèbre de Lie réelle et* $\mathfrak{r}$ *le radical résoluble de* $\mathfrak{g}$. *Si l'algèbre semi-simple* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ *est compacte, alors pour tout point $f$ de* $\mathfrak{g}^*$, $P^+(f)$ *est non vide.*

J. Otto nous informe qu'il a démontré cette proposition par des méthodes de convexité [3].

Énonçons tout de suite des contre-exemples aux possibilités suivantes d'étendre ces résultats :

(1) On ne peut étendre la proposition 1 aux algèbres résolubles même si G est fini. Il suffit de considérer l'algèbre $\mathfrak{s}$ de base $\{H, P, Q, E\}$ avec les relations

$$[H, P] = P, \qquad [H, Q] = -Q, \qquad [P, Q] = E, \qquad f = E^*$$

et G le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par, $H \mapsto -H$

$$P \mapsto Q, \qquad Q \mapsto -P, \qquad E \mapsto E.$$

(2) Même si G est résoluble on ne peut étendre la proposition 2 [1], aux groupes G non connexes; il suffit de considérer l'exemple de l'algèbre de Heisenberg de base $\{P, Q, E\}$, avec $[P, Q]$, $f = E^*$ et G le groupe engendré par

$$\gamma: \quad P \mapsto Q, \qquad Q \mapsto -P, \qquad E \mapsto E,$$

et par $\alpha_x$ $(x > 0)$

$$\alpha_x: \quad P \mapsto xP, \qquad a \mapsto x^{-1}Q, \qquad E \mapsto E.$$

(3) Même si G est résoluble, la réciproque de la proposition 2, [2] n'est pas vraie. Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Heisenberg de base $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2, E\}$ avec $[P_i, Q_i] = E$, $f = E^*$. Soit $\tilde{G}$ le normalisateur de la droite isotrope $\mathbf{C}(P_1 + iQ_1)$ dans Sp $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f); B_f)$. Alors $\tilde{G}$ est un sous-groupe parabolique

Considérons $G \subset \tilde{G}$ le sous-groupe résoluble engendré par

$$\beta_t\,(t \in \mathbf{R}) : \quad P_1 \mapsto \operatorname{Ch} t\, P_1 + \operatorname{Sh} t\, Q_1, \qquad Q_1 \mapsto \operatorname{Sh} t\, P_1 + \operatorname{Ch} t\, Q_1,$$
$$P_2 \mapsto P, \qquad Q_2 \mapsto Q_2, \qquad E \mapsto E;$$
$$\alpha_x\,(x > 0) : \quad P_1 \mapsto P_1, \quad Q_1 \mapsto Q_1, \quad P_2 \mapsto x P_2, \quad Q_2 \mapsto x^{-1} Q_2, \quad E \mapsto E;$$
$$\gamma : \quad P_1 \mapsto P_1, \quad Q_1 \mapsto Q_1, \quad P_2 \mapsto Q_2, \quad Q_2 \mapsto -P_2, \quad E \mapsto E.$$

Alors G ne laisse invariant aucun sous-espace totalement $B_f$-isotrope maximal de $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))^{\mathbf{C}}$.

2. Démonstrations des résultats énoncés.

Proposition 1. — On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

*Cas A.* — Il résulte un idéal $\mathfrak{a}$ stable par G non nul sur lequel $f$ s'annule. On applique l'hypothèse de récurrence $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

*Cas B.* — Cas non A, mais il existe un idéal abélien $\mathfrak{a}$ non central stable par G. Posons alors

$$\mathfrak{n}' = \mathfrak{a}^f = \{ x \in \mathfrak{n} \text{ tels que } B_f(x, \mathfrak{a}) = 0 \} \qquad \text{et} \qquad f' = f \mid \mathfrak{n}.$$

Alors $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}$, sinon $f$ s'annulerait sur l'idéal non nul $[\mathfrak{n}, \mathfrak{a}]$ stable par G.

Soit $W \in E(f; G)$ [resp. $E^+(f; G)$], $B_f$ met en dualité $W/W \cap (\mathfrak{n}'^{\mathbf{C}})$ et $\mathfrak{a}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{a}^{\mathbf{C}} \cap W$; on en déduit que $W' = W \cap \mathfrak{n}'^{\mathbf{C}} + \mathfrak{a}^{\mathbf{C}}$ est un élément de $E(f'; G)$ [resp. $E^+(f'; G)$]. Appliquant alors l'hypothèse de récurrence, on en déduit l'existence d'un élément

$$\mathfrak{h} \in P(f'; G) \subset P(f; G) \qquad [\text{resp. } P^+(f'; G) \subset P(f; G)].$$

*Cas C.* — Non cas A + Non cas B.

En particulier, le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ est de dimension 1 et $f \mid \mathfrak{z} \neq 0$, et il n'existe aucun idéal abélien caractéristique non central de $\mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg [([3]), lemme 10] et on a donc

$$E(f; \mathfrak{n}) = P(f; \mathfrak{n}) \qquad \text{et} \qquad E^+(f; \mathfrak{n}) = P^+(f; \mathfrak{n}).$$

Proposition 2. — Si G est un groupe compact, alors $E^+(f; G)$ est non vide, car tout sous-groupe compact maximal de $Sp(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f), B_f)$ laisse fixe un sous-espace W totalement isotrope maximal positif de $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))^{\mathbf{C}}$ et donc d'après la proposition 1, il en est de même pour $P^+(f; G)$.

Soit G connexe et extention d'un groupe compact par un groupe résoluble. Reprenons les cas de raisonnement par récurrence de la démonstration de la proposition 1. On se ramène au cas C où $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg et où la restriction B de $B_f$ à $\mathfrak{v} = \operatorname{Ker} f$ est non dégénérée et où, de plus, G ne laisse stable aucun sous-espace non nul $\mathfrak{w}$ totalement isotrope réel de $\mathfrak{v}$ (sinon, considérant $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{z}$, nous serions dans le cas B. La représentation fidèle de G dans $\mathfrak{v}$ est donc complètement réductive, car si U est un sous-espace de $\mathfrak{v}$ stable par G, $U \cap U'' = 0$ et donc $\mathfrak{v} = U \oplus U''$; G étant connexe est d'algèbre de Lie réductive et donc $G = K.A$, où K est compact et A est un groupe abélien commutant à K.

Soit alors $\mathfrak{v}^{\mathbf{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \hat{A}} \mathfrak{v}^{\alpha}$ la décomposition de $\mathfrak{v}^{\mathbf{C}}$ en composantes isotypiques par rapport au groupe A. K laisse stable chacun des $\mathfrak{v}^{\alpha}$ et $B'(\mathfrak{v}^{\alpha}, \mathfrak{v}^{\beta}) = 0$ à moins que $\alpha\beta = 1$. Le sous-espace $\mathfrak{v}^{\alpha} \oplus \mathfrak{v}^{\bar{\alpha}}$ est le complexifié d'un sous-espace réel de $\mathfrak{v}$ stable par G, il n'est donc pas totalement isotrope, on a donc $\alpha\bar{\alpha} = 1$, A est donc un groupe d'automorphismes compact et on en déduit le résultat.

Pour la seconde partie de la proposition 2, on identifie $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))^{\mathbf{C}}$ à $\mathbf{C}^{2n}$ et l'ensemble de ses sous-espaces complexes totalement $B_f$-isotropes maximaux à l'espace hermitien symétrique $X = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$; *voir* Wolf [(7); § 11]. On connaît les orbites de $\mathrm{Sp}(n; \mathbf{R})$ sur X, ainsi que les sous-groupes d'isotropie, ils sont, soit compacts maximaux, soit contenus dans des sous-groupes paraboliques [(7); § 8].

PROPOSITION 3. — On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Toute algèbre quotient et toute sous-algèbre extension d'une algèbre de Lie semi-simple compacte par une algèbre résoluble est encore de ce type.

Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ et soit $f' = f \mid \mathfrak{n}$ et considérons $\mathfrak{n}^{f'} = \{ x \in \mathfrak{g}$ tels que $f'([x, \mathfrak{n}]) = 0 \}$. Soit $f''$ la restriction de $f$ à $\mathfrak{n}^{f'}$.

*Cas A* : $\mathfrak{n}^{f'} = \mathfrak{g}$. — Alors $f$ s'annule sur l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$. Si cet idéal est non nul, on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$. Sinon $\mathfrak{n}$ est égal au centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ est produit direct d'une algèbre semi-simple compacte par son centre et on applique alors le résultat 1-C.

*Cas B* : $\mathfrak{n}^{f'} \neq \mathfrak{g}$. — On construit d'après la proposition 2.1 un élément $\mathfrak{h}' \in \mathrm{P}^{+}(f')$ stable par l'action adjointe de $\mathfrak{n}^{f'}$ et par hypothèse de récurrence un élément $\mathfrak{h}'' \in \mathrm{P}^{+}(f'')$. L'élément $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}''$ appartient alors à $\mathrm{P}^{+}(f)$.

Remarquons que l'élément $h \in \mathrm{P}^{+}(f)$ ainsi construit est tel que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^{\mathbf{C}}$ est un élément de $\mathrm{P}^{+}(f')$ stable par l'action adjointe de la composante connexe du stabilisateur de $f'$ dans G. (Remarque due à M. Duflo.)

(*) Séance du 3 janvier 1972.


(1) L. AUSLANDER et B. KOSTANT, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 1967, p. 692-695.

(2) J. DIXMIER, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4, 1971, p. 321-335.

(3) J. DIXMIER, *Ann. Inst. Fourier*, 7, 1957, p. 315-328.

(4) M. DUFIO, *Construction of primitive ideals in an enveloping algebra*, Congrès de Budapest, 1971 (à paraître).

(5) J. OTTO, *Thèse de P. H. D.*, University of California, Berkely (à paraître).

(6) M. VERGNE, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 704.

(7) J. A. WOLF, *Fine structure of Hermitian Symmetric Spaces*, « *Symmetric spaces : short courses presented at Washington University, 1969-1970* » (à paraître en 1972).



*Department of Mathematics,*
*University of California,*
*Berkeley, California 94720,*
*U. S. A.*



185305. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France