GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante.* Note de M. **Joseph A. Wolf**, présentée par M. Jean Leray.

1. Soit $p : N \to M$ un revêtement riemannien, c'est-à-dire un revêtement où N et M sont des variétés riemanniennes connexes et p est une isométrie locale. Les éléments du groupe du revêtement, c'est-à-dire les homéomorphismes $d : N \to N$ tels que $p.d = p$, sont des isométries de N.

Théorème 1. — *Soient* $p : N \to M$ *un revêtement riemannien et* B *le centralisateur du groupe du revêtement dans le groupe des isométries de* N. *Si* M *est une variété riemannienne homogène,* B *est transitif sur* N. *Si* B *est transitif sur* N *et si le revêtement est galoisien,* M *est une variété riemannienne homogène.*

Démonstration. — Soient $a : H \to G$ le revêtement universel de la composante connexe du groupe des isométries de M, M une variété riemannienne homogène, $n \in N$ et $m = p(n)$. $f : H \to M$ par $f(h) = h(m)$ est surjectif parce que H opère transitivement sur M par $h(x) = a(h)(x)$. H étant simplement connexe il y a un relèvement $f' : H \to N$ telle que $f'(1) = n$ et $f = p.f'$. f' étant surjectif, conséquence de la surjectivité de f, H opère transitivement sur N par $h(f'(h_1)) = f'(hh_1)$. En rendant cette action effective on obtient un revêtement $b : G' \to G$ de G par un groupe transitif d'isométries de N où $p.g' = b(g').p$. Conservant la structure p-fibrée de N, G' normalise le groupe D du revêtement. G' étant connexe et D étant discret, G' centralise D.

Soient p galoisien et B transitif sur N. Conservant la structure p-fibrée de N, B induit un groupe transitif d'isométries de M. C.Q.F.D.

Définition. — *On appellera translation de Clifford d'un espace métrique une isométrie telle que la distance entre un point et son image soit constante.*

Théorème 2. — *Soient* $p : N \to M$ *un revêtement riemannien,* M *une variété riemannienne homogène et* D *le groupe du revêtement. Chaque élément de* D *est une translation de Clifford de* N.

C'est une conséquence immédiate du théorème 1.

2. Classification :

Théorème 3. — *Une variété riemannienne homogène connexe à courbure sectionnelle constante négative est un espace hyperbolique.*

Démonstration. — Une telle variété M admet un revêtement riemannien par un espace hyperbolique H^n. En utilisant le théorème 2 il suffit de démontrer qu'une translation de Clifford d de H^n est l'identité. Deux géodésiques distinctes de H^n étant divergentes, d conserve chaque géodésique. Chaque point de H^n étant l'intersection de deux géodésiques, d est l'identité. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4. — *Une variété riemannienne homogène connexe à courbure sectionnelle nulle est produit d'un espace euclidien et d'un tore localement euclidien.*

Démonstration. — Une telle variété M admet un revêtement riemannien par un espace euclidien R^n. En utilisant le théorème 2 il suffit de démontrer qu'une translation de Clifford d de R^n est une translation au sens ordinaire. Or deux droites non parallèles de R^n étant divergentes, d transforme toute droite en une droite parallèle. C.Q.F.D.

Nous désignerons par F l'un des trois corps R (réel), C (complexe) ou K (quaternionien), par F^* le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de F, et par F' le sous-groupe de F^* des éléments unitaires de F.

THÉORÈME 5. — *Soient* V *un espace vectoriel hermitien à gauche sur* F, *k un nombre réel > 0,* S *la sphère $\| x \| = k^{-1/2}$ dans* V, *et* D *un sous-groupe fini de F' qui opère sur* S *par multiplication scalaire.* S *étant muni de la structure riemannienne évidente,* $M = S/D$ *est une variété riemannienne homogène à courbure sectionnelle constante k et à groupe fondamental* D. *Toute variété riemannienne homogène connexe à courbure sectionnelle constante positive est isométrique à un espace* M *obtenu de cette façon.*

Démonstration. — La première partie est une conséquence immédiate du théorème 1 et du fait que le groupe unitaire de V est transitif sur S et centralise D.

Soient M un espace riemannien homogène connexe de dimension $n-1$ à courbure sectionnelle constante positive k et groupe fondamental D, V un espace euclidien de dimension n et S la sphère de rayon $k^{-1/2}$ dans V. Il existe un revêtement riemannien $p : S \to M$ de groupe D. Le groupe des isométries de S est le groupe orthogonal $O(n)$. Le centralisateur B de D dans $O(n)$ étant transitif sur S, d'après le théorème 1, il est irréductible sur V. Il en résulte que le centralisateur F de B dans l'algèbre des endomorphismes R-linéaires de V est une algèbre à division sur R, donc isomorphe à R, C ou K, et V peut être considéré comme un espace vectoriel sur F. La démonstration s'achève de façon évidente. C.Q.F.D.

Observons que si $F = C$ ou K et si le sous-groupe D de F^* est contenu dans un sous-corps $F_1 = R$ ou C, la variété M de l'énoncé précédent est la même, que l'on considère V comme espace vectoriel sur F ou sur F_1. Lorsque $F = R$ ou C les sous-groupes finis de F^* sont cycliques, d'ordre 1 ou 2 si $F = R$, et isomorphes si et seulement s'ils coïncident. Les sous-groupes finis de K^* non contenus dans un sous-corps complexe sont les groupes diédriques binaires et polyédriques binaires, images réciproques des sous-groupes diédriques et polyédriques de SO(3) dans le revêtement $K' = \text{Spin}(3) \to SO(3)$, isomorphes si et seulement s'ils sont conjugués dans K'.

COROLLAIRE. — *Une variété riemannienne homogène connexe à courbure sectionnelle constante donnée $k > 0$ est déterminée, à une isométrie près,* *par sa dimension* $n-1$ *et son groupe fondamental* D; *les seuls cas sont* $D = 1$ *ou* Z_2, $n = 2m$ *et* $D = Z_q (q > 2)$, *et* $n = 4m$ *et* D = *groupe diédrique binaire ou polyédrique binaire.*

3. J'ai pu montrer, par une méthode arithmérique, que le centralisateur dans $O(n)$ d'un sous-groupe fini de $O(n)$ qui se compose des translations de Clifford de S^{n-1} est transitif sur S^{n-1}. Le théorème 5 et son corollaire avaient d'abord été obtenus par cette méthode. La méthode plus simple utilisée ici m'a été suggérée par M. Jacques Tits. Le résultat mentionné conduit au

THÉORÈME 6. — *Soient* $N = H^n$, R^n *ou* S^n_ν *et* D *un groupe discret sans point fixe d'isométries de* N. *La variété riemannienne* N/D *est homogène si et seulement si* D *se compose de translations de Clifford de* N.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 250, p. 3443-3445, séance du 23 mai 1960.

GAUTHIER-VILLARS,
55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e),
Éditeur-Imprimeur-Libraire.
157646

Imprimé en France.