Structures de Clifford paires et résonances quantiques

Charles Hadfield

le 19 juin 2017

sommaire

sommaire

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

Moroianu-Semmelmann '11

$$\begin{tikzcd} (E^r, h) \arrow[d] \\ (M^n, g) \end{tikzcd}$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\begin{tikzcd} (E^r, h) \arrow[d] \\ (M^n, g) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Cl}^0(E, h) \arrow[d] \\ (M^n, g) \end{tikzcd}$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\begin{tikzcd} (E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E,h) \arrow[d] & \varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) \to \operatorname{End} \mathrm{T}M & \operatorname{End} \mathrm{T}M \arrow[d] \\ (M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g) \end{tikzcd}$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$\{\xi_i\}_{1\le i\le r}$

$$\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E,h) \arrow[d] & \varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) \to \operatorname{End}\mathrm{T}M & \operatorname{End}\mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g)
\end{tikzcd}$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\xi_i \cdot \xi_j + \xi_j \cdot \xi_i = -2\delta_{ij}$$

$$\{\xi_i\}_{1 \le i \le r} \qquad (\xi_i \cdot \xi_j)^2 = -1_{(i \ne j)}$$

$$\begin{tikzcd} (E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E, h) \arrow[d] & & \operatorname{End} \mathrm{T}M \arrow[d] \\ (M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g) \end{tikzcd}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E, h) \to \operatorname{End} \mathrm{T}M$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\xi_i \cdot \xi_j + \xi_j \cdot \xi_i = -2\delta_{ij}$$

$$\{\xi_i\}_{1\leq i\leq r} \qquad (\xi_i \cdot \xi_j)^2 = -1_{(i\neq j)} \qquad J_{ij} := \varphi(\xi_i \cdot \xi_j)$$

$$\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E,h) \arrow[d] & & \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) \to \mathrm{End}\,\mathrm{T}M$$

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\xi_i \cdot \xi_j + \xi_j \cdot \xi_i = -2\delta_{ij}$$

$$\{\xi_i\}_{1 \leq i \leq r} \qquad (\xi_i \cdot \xi_j)^2 = -1_{(i \neq j)} \qquad J_{ij} := \varphi(\xi_i \cdot \xi_j)$$

$$\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E, h) \arrow[d] & \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, g) & (M^n, g) & (M^n, g)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E, h) \to \mathrm{End}\,\mathrm{T}M$$

$$\Lambda^2 E \to \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$$

définition d'une structure de Clifford paire

$$\xi_i \cdot \xi_j + \xi_j \cdot \xi_i = -2\delta_{ij}$$

$$\{\xi_i\}_{1 \leq i \leq r} \qquad (\xi_i \cdot \xi_j)^2 = -1_{(i \neq j)} \qquad J_{ij} := \varphi(\xi_i \cdot \xi_j)$$

$$\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E, h) \arrow[d] & & \mathrm{End}\, \mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E, h) \to \mathrm{End}\, \mathrm{T}M$$

$$\Lambda^2 E \to \mathrm{End}^- \mathrm{T}M$$

- une structure de Clifford paire est (M, g, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \mathrm{End}^- \mathrm{T}M$.

définition d'une structure de Clifford paire parallèle

$$\xi_i \cdot \xi_j + \xi_j \cdot \xi_i = -2\delta_{ij}$$

$$\{\xi_i\}_{1\leq i\leq r} \qquad (\xi_i \cdot \xi_j)^2 = -1_{(i\neq j)} \qquad J_{ij} := \varphi(\xi_i \cdot \xi_j)$$

$$\begin{array}{ccc} (E^r, h) & \mathrm{Cl}^0(E,h) & \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (M^n, g) & (M^n, g) & (M^n, g) \end{array}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) \to \mathrm{End}\,\mathrm{T}M$$
$$\Lambda^2 E \to \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$$

- une structure de Clifford paire est (M, g, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$.
- elle s'appelle *parallèle* s'il existe une connexion métrique ∇^E telle que

$$\nabla^g \circ \varphi = \varphi \circ \nabla^E$$

exemple d'une structure de Clifford paire parallèle : $r = 3$, $n = 4k$

$$\begin{tikzcd} E^3 \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E) \arrow[d] \\ M^{4k} & M \end{tikzcd}$$

exemple d'une structure de Clifford paire parallèle : $r = 3$, $n = 4k$

$$
\begin{tikzcd}
E^3 \arrow[d] & \begin{array}{l} \mathrm{Cl}^0(E) \simeq \mathbb{H} \\ \qquad\quad \simeq \mathbb{R} \oplus \Lambda^2 E \end{array} \arrow[d] \\
M^{4k} & M
\end{tikzcd}
$$

exemple d'une structure de Clifford paire parallèle : $r = 3$, $n = 4k$

$$
\begin{tikzcd}
E^3 \arrow[d] & \begin{array}{l} \mathrm{Cl}^0(E) \simeq \mathbb{H} \\ \quad \simeq \mathbb{R} \oplus \Lambda^2 E \end{array} \arrow[d] & & I, J, K \in \mathrm{End}\, \mathrm{T}^- M \arrow[d] \\
M^{4k} & M & & (M, g)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathrm{Cl}^0(E) &\to \mathrm{End}\, \mathrm{T} M \\
i, j, k &\mapsto I, J, K
\end{aligned}
$$

exemple d'une structure de Clifford paire parallèle : $r = 3$, $n = 4k$

$$\begin{tikzcd}
E^3 \arrow[d] & \begin{array}{l} \mathrm{Cl}^0(E) \simeq \mathbb{H} \\ \quad \simeq \mathbb{R} \oplus \Lambda^2 E \end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c} \varphi : \mathrm{Cl}^0(E) \to \operatorname{End} \mathrm{T}M \\ i, j, k \mapsto I, J, K \end{array} & I, J, K \in \operatorname{End} \mathrm{T}^- M \arrow[d] \\
M^{4k} & M & & (M, g)
\end{tikzcd}$$

- sans connexion, on a une géométrie quaternion-hermitienne.

exemple d'une structure de Clifford paire parallèle : $r = 3$, $n = 4k$

$$\begin{array}{c} E^3 \\ \big\downarrow \\ M^{4k} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Cl}^0(E) \simeq \mathbb{H} \\ \simeq \mathbb{R} \oplus \Lambda^2 E \\ \big\downarrow \\ M \end{array} \qquad \begin{array}{c} I, J, K \in \operatorname{End} \mathrm{T}^- M \\ \big\downarrow \\ (M, g) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Cl}^0(E) &\to \operatorname{End} \mathrm{T} M \\ i, j, k &\mapsto I, J, K \end{aligned}$$

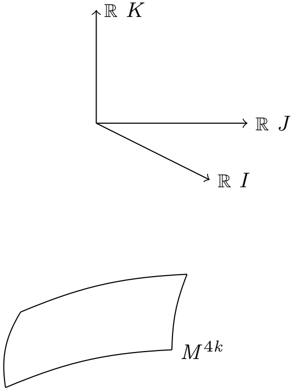
- sans connexion, on a une géométrie quaternion-hermitienne.
- si φ est parallèle, alors M est quaternion-kählérienne

sommaire

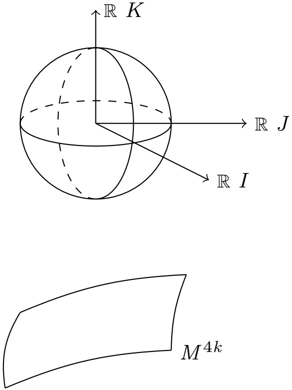
histoire des espaces de twisteurs

- Atiyah-Hitchin-Singer '78,
- Salamon '82,
- Bérard-Bergery '82
- O'Brian-Rawnsley '85

exemple d'un espace de twisteurs : $r = 3$, $n = 4k$



exemple d'un espace de twisteurs : $r = 3$, $n = 4k$

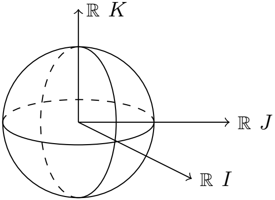


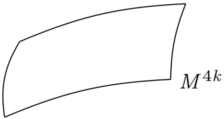
- on définit l'espace de twisteurs

$$Z_x := \left\{ a_i I + a_j J + a_k K \mid a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 = 1 \right\}$$

$$Z := \bigsqcup_{x \in M} Z_x$$

exemple d'un espace de twisteurs : $r = 3$, $n = 4k$



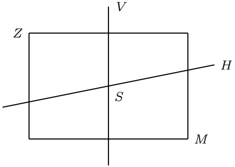


- on définit l'espace de twisteurs

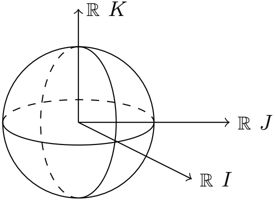
$$Z_x := \left\{ a_i I + a_j J + a_k K \mid a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 = 1 \right\}$$

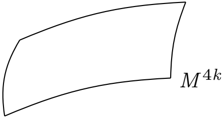
$$Z := \bigsqcup_{x \in M} Z_x$$

- puis on utilise la connexion ∇^g pour construire une structure presque-complexe $\mathcal{J}$ sur $\mathrm{T}_S Z$



exemple d'un espace de twisteurs : $r = 3$, $n = 4k$





- on définit l'espace de twisteurs

$$Z_x := \{\, a_i I + a_j J + a_k K \mid a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 = 1 \}$$

$$Z := \bigsqcup_{x \in M} Z_x$$

- puis on utilise la connexion ∇^g pour construire une structure presque-complexe $\mathcal{J}$ sur $\mathrm{T}_S Z$

$$\mathcal{J}_S(U + X) := SU + SX$$

$$= S \circ U + \pi_*^{-1} S \pi_* X$$

où $\mathrm{T}_S Z = V \oplus H$ et $U \in V$, $X \in H$

twisteurs pour une structure de Clifford paire parallèle

$$\begin{tikzcd} Z \subset \operatorname{End} \mathrm{T}M \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

- on définit l'espace de twisteurs

$$Z_x := \left\{ J = \sum_{1 \leq i < j \leq r} a_{ij} J_{ij} \;\middle|\; J^2 = -1_{\mathrm{T}_x M} \right\}$$
$$\simeq \widetilde{\mathrm{Gr}}(2, r)$$

$$Z := \bigsqcup_{x \in M} Z_x$$

twisteurs pour une structure de Clifford paire parallèle

$$\begin{array}{c} Z \subset \operatorname{End} \mathrm{T}M \\ \big\downarrow \\ M \end{array}$$

- on définit l'espace de twisteurs

$$Z_x := \left\{ J = \sum_{1 \leq i < j \leq r} a_{ij} J_{ij} \,\middle|\, J^2 = -1_{\mathrm{T}_x M} \right\}$$
$$\simeq \widetilde{\mathrm{Gr}}(2, r)$$

$$Z := \bigsqcup_{x \in M} Z_x$$

- puis on utilise la connexion ∇^g pour construire une structure presque-complexe $\mathcal{J}$ sur $\mathrm{T}_S Z$

$$\mathcal{J}_S(U + X) := SU + SX$$

$$= \varphi_* S \cdot \varphi_*^{-1} U + \pi_*^{-1} S \pi_* X$$

où $\mathrm{T}_S Z = V \oplus H$ et $U \in V$, $X \in H$

Théorème 1 (H-Arizmendi)

Soit (M^n, g) *une variété riemannienne,* $n \neq 8$*, munie d'une structure de Clifford paire de rang* $r > 4$ *qui est parallèle. Alors la structure presque-complexe* $\mathcal{J}$ *de l'espace de twisteurs* Z *est intégrable.*

Théorème 2 (H-Arizmendi)

Situons-nous dans le cadre du théorème 1. Si le tenseur de Ricci est positif, alors Z *est Kähler.*

sommaire

définition d'une structure de Clifford-Weyl (avec A. Moroianu)

$$\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] & \mathrm{Cl}^0(E,h) \arrow[d] & & \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, g) & (M^n, g) & & (M^n, g)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) \to \mathrm{End}\,\mathrm{T}M$$
$$\Lambda^2 E \to \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$$

- une structure de Clifford paire est (M, g, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$.

définition d'une structure de Clifford-Weyl (avec A. Moroianu)

$$
\begin{array}{ccccc}
(E^r, h) & & \mathrm{Cl}^0(E,h) & & \operatorname{End} \mathrm{T}M \\
\downarrow & & \downarrow & \begin{aligned} \varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) &\to \operatorname{End} \mathrm{T}M \\ \Lambda^2 E &\to \operatorname{End}^- \mathrm{T}M \end{aligned} & \downarrow \\
(M^n, c) & & (M^n, c) & & (M^n, c)
\end{array}
$$

- une structure de Clifford paire est (M, c, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \operatorname{End}^- \mathrm{T}M$.

définition d'une structure de Clifford-Weyl (avec A. Moroianu)

$$
\begin{array}{ccccc}
(E^r, h) & & \mathrm{Cl}^0(E,h) & & \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & \begin{aligned} \varphi : \mathrm{Cl}^0(E,h) &\to \mathrm{End}\,\mathrm{T}M \\ \Lambda^2 E &\to \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M \end{aligned} & \big\downarrow \\
(M^n, c) & & (M^n, c) & & (M^n, c)
\end{array}
$$

- une structure de Clifford paire est (M, c, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \mathrm{End}^-\,\mathrm{T}M$.
- qu'elle soit parallèle a utilisé la connexion de Levi-Civita.

définition d'une structure de Clifford-Weyl (avec A. Moroianu)

$$
\begin{tikzcd}
(E^r, h) \arrow[d] \\
(M^n, c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}^0(E, h) \arrow[d] \\
(M^n, c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
\varphi : \mathrm{Cl}^0(E, h) &\to \operatorname{End} \mathrm{T}M \\
\Lambda^2 E &\to \operatorname{End}^- \mathrm{T}M
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{End} \mathrm{T}M \arrow[d] \\
(M^n, c)
\end{tikzcd}
$$

- une structure de Clifford paire est (M, c, E, h, φ) avec $\varphi(\Lambda^2 E) \subset \operatorname{End}^- \mathrm{T}M$.
- qu'elle soit parallèle a utilisé la connexion de Levi-Civita.
- alors on introduit une connexion métrique ∇^E et aussi une connexion de Weyl D et on appelle la structure *Clifford-Weyl* si le morphisme de Clifford φ les entrelace

$$D \circ \varphi = \varphi \circ \nabla^E.$$

rappel de la géométrie conforme

pour une variété conforme (M^n, c) avec une connexion D, nous avons :

- le fibré en droites $L \to M$ associé à la représentation $|\det|^{1/n}$;

une section $\ell \in \Gamma(L)$ donne :

- une métrique dans la classe conforme $c = g \otimes \ell^2$;
- une 1-forme $D\ell = \theta \otimes \ell$, qui s'appelle *forme de Lee* ;
- on en obtient la formule $Dg = -2\theta \otimes g$;

la courbure est $F := d\theta + \theta \wedge \theta = d\theta$,

on dit que la connexion de Weyl est *fermée* si $F = 0$.

si la connexion de Weyl est fermée alors elle est localement la connexion de Levi-Civita d'une métrique dans la classe conforme.

une structure de Clifford-Weyl lorsque $n > 4$, $r = 2$: géométrie hermitienne

$$J := \varphi(\xi_1 \cdot \xi_2), \quad c =: g \otimes \ell^2, \quad D\ell =: \theta \otimes \ell, \quad \Omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$$

une structure de Clifford-Weyl lorsque $n > 4$, $r = 2$: géométrie hermitienne

$$J := \varphi(\xi_1 \cdot \xi_2), \quad c =: g \otimes \ell^2, \quad D\ell =: \theta \otimes \ell, \quad \Omega(\cdot,\cdot) := g(J\cdot,\cdot)$$

$$\nabla^E(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0 \implies DJ = 0,$$
$$Dg = -2\theta \otimes g \implies D\Omega = -2\theta \otimes \Omega$$

une structure de Clifford-Weyl lorsque $n > 4$, $r = 2$: géométrie hermitienne

$$J := \varphi(\xi_1 \cdot \xi_2), \quad c =: g \otimes \ell^2, \quad D\ell =: \theta \otimes \ell, \quad \Omega(\cdot,\cdot) := g(J\cdot,\cdot)$$

$$\begin{aligned} \nabla^E(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0 &\implies DJ = 0, \\ Dg = -2\theta \otimes g &\implies D\Omega = -2\theta \otimes \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}^2\,\Omega &= \mathrm{d}(-2\theta \wedge \Omega) \\ &= -2F \wedge \Omega - 4\theta \wedge \theta \wedge \Omega \\ &= -2F \wedge \Omega \end{aligned}$$

une structure de Clifford-Weyl lorsque $n > 4$, $r = 2$: géométrie hermitienne

$$J := \varphi(\xi_1 \cdot \xi_2), \quad c =: g \otimes \ell^2, \quad D\ell =: \theta \otimes \ell, \quad \Omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$$

$$\begin{gathered} \nabla^E(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0 \implies DJ = 0, \\ Dg = -2\theta \otimes g \implies D\Omega = -2\theta \otimes \Omega \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}^2\,\Omega &= \mathrm{d}(-2\theta \wedge \Omega) \\ &= -2F \wedge \Omega - 4\theta \wedge \theta \wedge \Omega \\ &= -2F \wedge \Omega \end{aligned}$$

- alors $F = 0$ donc θ est fermée

Théorème 4 (H-Moroianu)

Considérons une variété conforme de dimension n *munie d'une structure de Clifford-Weyl de rang* r*. Si la paire* (n, r) *n'est ni* $(2, 2)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$, *ni* $(8, 8)$, *alors la connexion de Weyl est fermée.*
La conclusion reste vraie lorsque $(n, r) = (8, 4)$ *si le morphisme de Clifford n'est pas injectif sur* $\Lambda^2 E$.

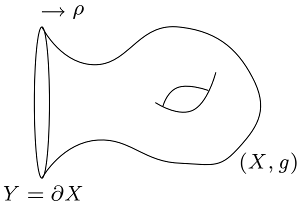
Théorème 4 (H-Moroianu)

Considérons une variété conforme de dimension n munie d'une structure de Clifford-Weyl de rang r. Si la paire (n, r) n'est ni $(2,2)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, ni $(8,8)$, alors la connexion de Weyl est fermée.
La conclusion reste vraie lorsque $(n, r) = (8, 4)$ si le morphisme de Clifford n'est pas injectif sur $\Lambda^2 E$.

- les cas génériques sont traités dans le théorème 5.

sommaire

géométrie assymptotiquement hyperbolique



géométrie assymptotiquement hyperbolique

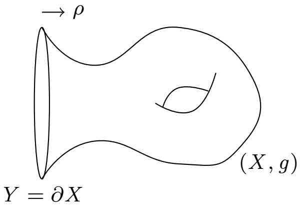
- la métrique g a une structure précise à l'infini

$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie



géométrie assymptotiquement hyperbolique

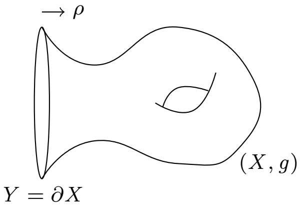
- la métrique g a une structure précise à l'infini

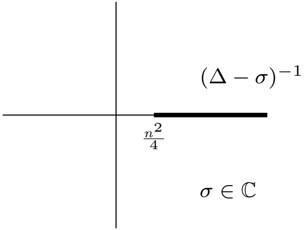
$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

  où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

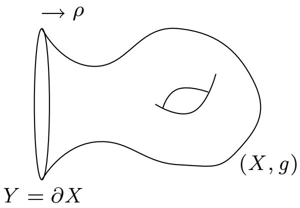
$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

  en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie
- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.





géométrie assymptotiquement hyperbolique



- la métrique g a une structure précise à l'infini

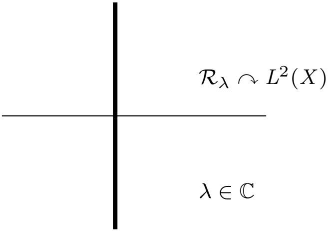
$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

  où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

  en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie
- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.
- pour cela, on étudie

$$\mathcal{R}_\lambda := (\Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2)^{-1}$$



géométrie assymptotiquement hyperbolique

- la métrique g a une structure précise à l'infini

$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

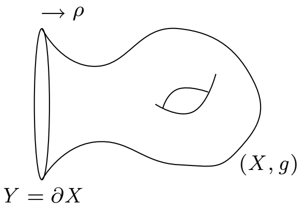
  où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

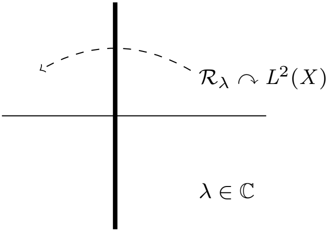
$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

  en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie

- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.
- pour cela, on étudie

$$\mathcal{R}_\lambda := (\Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2)^{-1}$$





géométrie assymptotiquement hyperbolique

- la métrique g a une structure précise à l'infini

$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

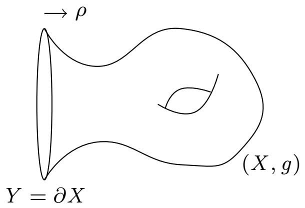
où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

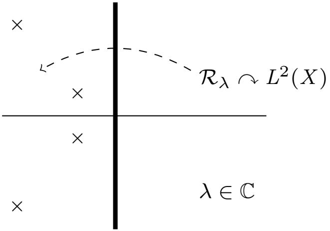
$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie

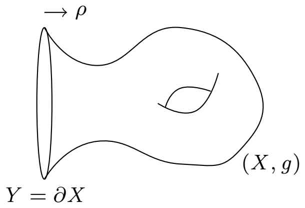
- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.
- pour cela, on étudie

$$\mathcal{R}_\lambda := (\Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2)^{-1}$$





géométrie assymptotiquement hyperbolique



- la métrique g a une structure précise à l'infini

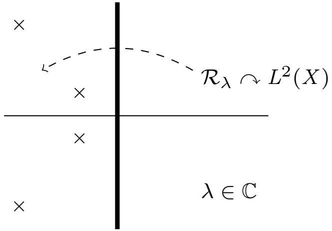
$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

  où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^i h^{(i)}$$

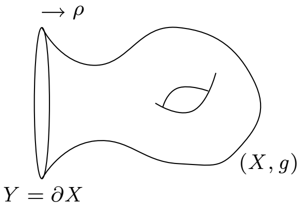
  en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie
- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.
- pour cela, on étudie

$$\mathcal{R}_\lambda := (\Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2)^{-1}$$



Mazzeo-Melrose '87, Guillopé-Zworski '95, Guillarmou '05, Vasy '13

géométrie assymptotiquement hyperbolique paire



- la métrique g a une structure précise à l'infini

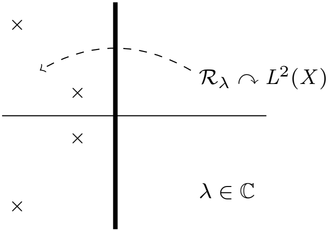
$$g = \frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}$$

  où ρ est une fonction qui définit le bord et h est une métrique sur Y qui dépend de façon lisse de ρ^2

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \rho^{2i} h^{(i)}$$

  en particulier, $h^{(0)}$ est positive définie
- le spectre de Δ n'est plus discret, donc on considère les résonances (quantiques) au lieu des valeurs propres.
- pour cela, on étudie

$$\mathcal{R}_\lambda := (\Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2)^{-1}$$



Mazzeo-Melrose '87, Guillopé-Zworski '95, Guillarmou '05, Vasy '13

sommaire

analyse à la Vasy ; le laplacien sur les fonctions

il considère le laplacien

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\lambda :=& \Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2 \\ =& -(\rho\partial_\rho)^2 + n\rho\partial_\rho + \rho^2\Delta_h - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2\end{aligned}$$

analyse à la Vasy ; le laplacien sur les fonctions

il considère le laplacien

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\lambda &:= \Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2 \\ &= -\left(\rho\partial_\rho\right)^2 + n\rho\partial_\rho + \rho^2\Delta_h - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2 \end{aligned}$$

il conjugue par une puissance de ρ bien choisie puis il utilise la parité de g pour introduire $\mu := \rho^2$

$$\begin{aligned} \mu^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{4}}\, \mathcal{Q}_\lambda\, \mu^{\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{4}} &= \mu\left(-4\mu\partial_\mu^2 - 4\lambda\partial_\mu + \Delta_h\right) \\ &=: \mu\,\mathcal{P}_\lambda \end{aligned}$$

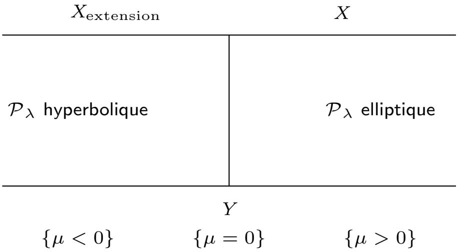
analyse à la Vasy ; le laplacien sur les fonctions

il considère le laplacien

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\lambda &:= \Delta - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2 \\ &= -\left(\rho\partial_\rho\right)^2 + n\rho\partial_\rho + \rho^2\Delta_h - \tfrac{n^2}{4} + \lambda^2\end{aligned}$$

il conjugue par une puissance de ρ bien choisie puis il utilise la parité de g pour introduire $\mu := \rho^2$

$$\begin{aligned}\mu^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{4}}\,\mathcal{Q}_\lambda\,\mu^{\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{4}} &= \mu\left(-4\mu\partial_\mu^2 - 4\lambda\partial_\mu + \Delta_h\right) \\ &=: \mu\,\mathcal{P}_\lambda\end{aligned}$$



<u>problème de Fredholm</u>

$\mathcal{P}_\lambda : H^s(X_e) \to H^{s-1}(X_e)$

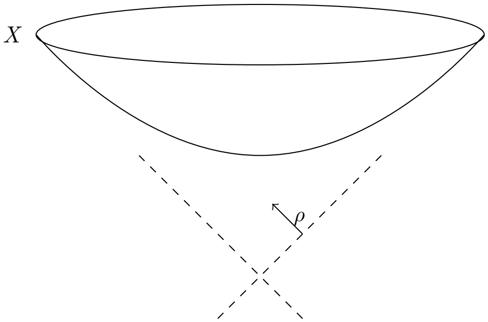
<u>Vasy</u> : $\dim\ker\mathcal{P}_\lambda < \infty$

$\dim\ker\mathcal{P}_\lambda^* < \infty$

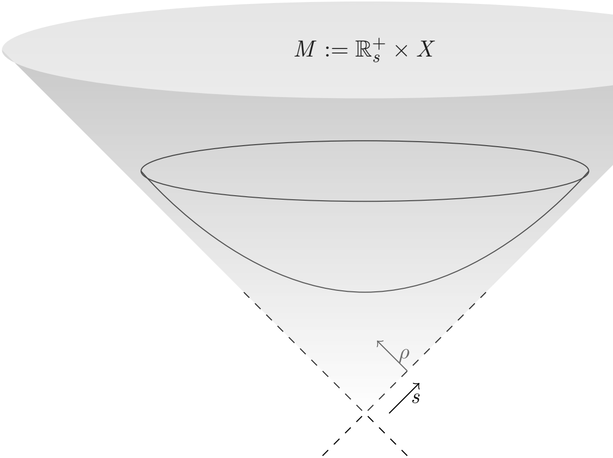
<u>Zworski</u> : $\dim\ker\mathcal{P}_\lambda = 0$

$\dim\ker\mathcal{P}_\lambda^* = 0$

métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme



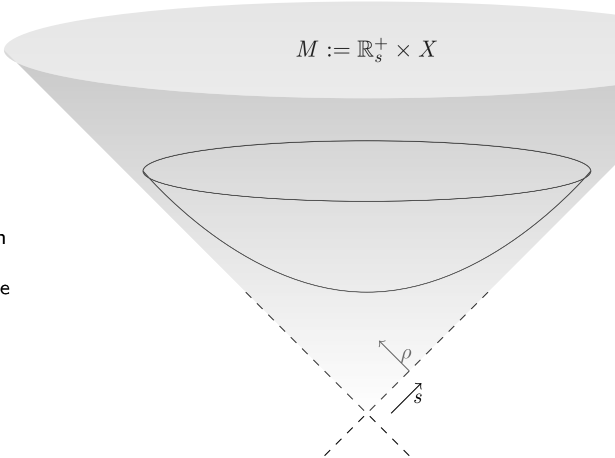
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme



$$\begin{aligned}\eta &= -ds^2 + s^2 g\\ &= -ds^2 + s^2\left(\frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}\right)\end{aligned}$$

métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme

- au lieu d'étudier le laplacien sur X, on étudie le d'alembertien $\Box$ sur l'espace ambient M

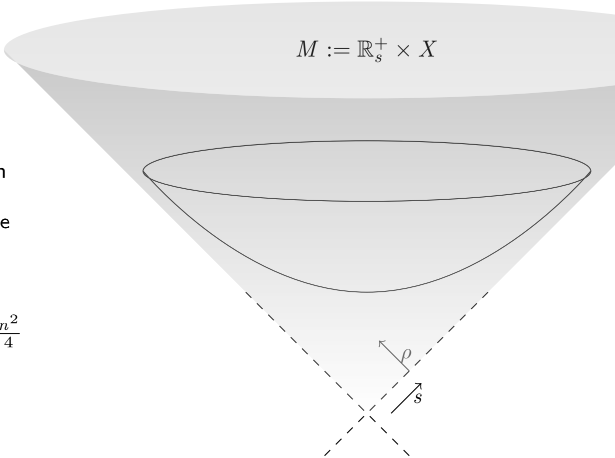


$$
\begin{aligned}
\eta &= -ds^2 + s^2 g \\
&= -ds^2 + s^2 \left(\frac{d\rho^2 + h}{\rho^2} \right)
\end{aligned}
$$

métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme

- au lieu d'étudier le laplacien sur X, on étudie le d'alembertien $\Box$ sur l'espace ambient M
- et on trouve que

$$s^2\Box = \Delta + (s\partial_s + \tfrac{n}{2})^2 - \tfrac{n^2}{4}$$

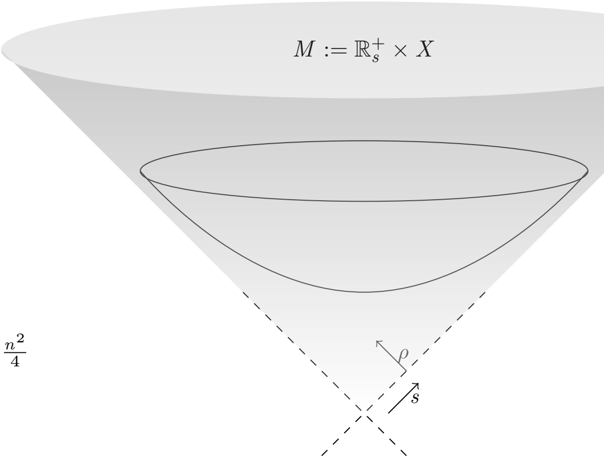


$$\begin{aligned}\eta &= -ds^2 + s^2 g \\ &= -ds^2 + s^2\left(\frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}\right)\end{aligned}$$

métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme

- au lieu d'étudier le laplacien sur X, on étudie le d'alembertien $\Box$ sur l'espace ambient M
- et on trouve que

$$s^{\frac{n}{2}} s^2 \Box s^{-\frac{n}{2}} = \Delta + (s\partial_s)^2 - \frac{n^2}{4}$$



$$\eta = -ds^2 + s^2 g$$
$$= -ds^2 + s^2 \left(\frac{d\rho^2 + h}{\rho^2}\right)$$

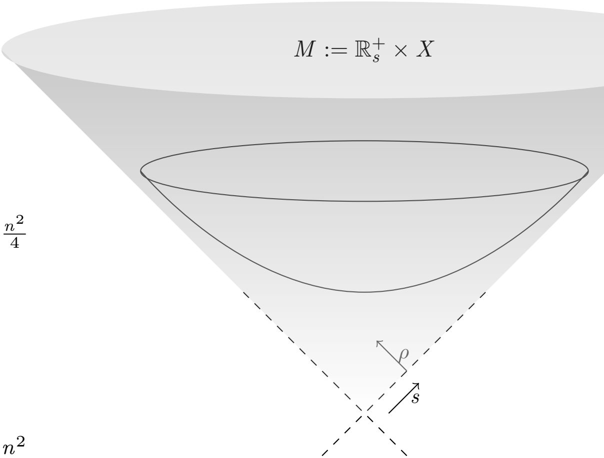
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme

- au lieu d'étudier le laplacien sur X, on étudie le d'alembertien $\Box$ sur l'espace ambient M
- et on trouve que

$$s^{\frac{n}{2}} s^2 \Box s^{-\frac{n}{2}} = \Delta + (s\partial_s)^2 - \frac{n^2}{4}$$

- on appelle $\mathbf{Q}$ cet opérateur ci-dessus, et on utilise le b-calcul de Melrose afin d'obtenir une famille d'opérateurs $\mathcal{Q}_\lambda$ agissant sur la variété X

$$\mathcal{Q}_\lambda := \mathrm{I}_s(\mathbf{Q}, \lambda) = \Delta + \lambda^2 - \frac{n^2}{4}$$



$$\begin{aligned} \eta &= -ds^2 + s^2 g \\ &= -ds^2 + s^2 \left(\frac{d\rho^2 + h}{\rho^2} \right) \end{aligned}$$

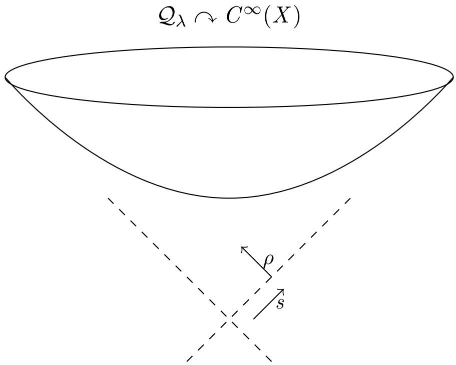
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue conforme

- au lieu d'étudier le laplacien sur X, on étudie le d'alembertien $\Box$ sur l'espace ambient M
- et on trouve que

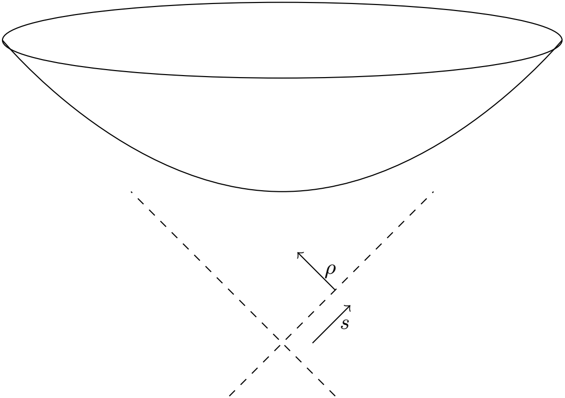
$$s^{\frac{n}{2}} s^2 \Box s^{-\frac{n}{2}} = \Delta + (s\partial_s)^2 - \frac{n^2}{4}$$

- on appelle $\mathbf{Q}$ cet opérateur ci-dessus, et on utilise le b-calcul de Melrose afin d'obtenir une famille d'opérateurs $\mathcal{Q}_\lambda$ agissant sur la variété X

$$\mathcal{Q}_\lambda := \mathrm{I}_s(\mathbf{Q}, \lambda) = \Delta + \lambda^2 - \frac{n^2}{4}$$



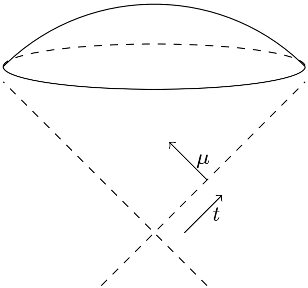
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue projectif



métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue projectif

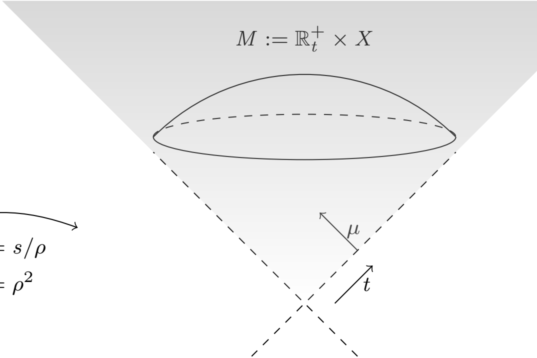
$$t := s/\rho$$

$$\mu := \rho^2$$



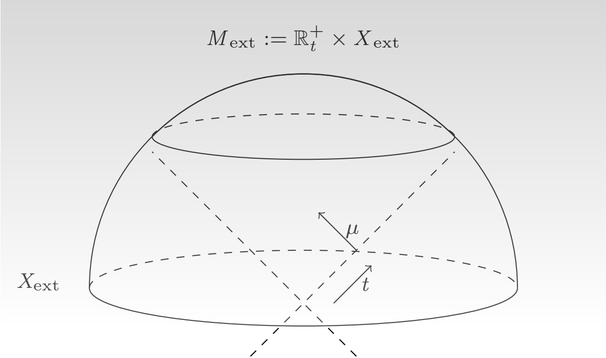
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue projectif

$$t := s/\rho$$
$$\mu := \rho^2$$



$$t^{-2}\eta = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{dt}{t}\right)^2 - \frac{dt}{t} \cdot d\mu + h$$

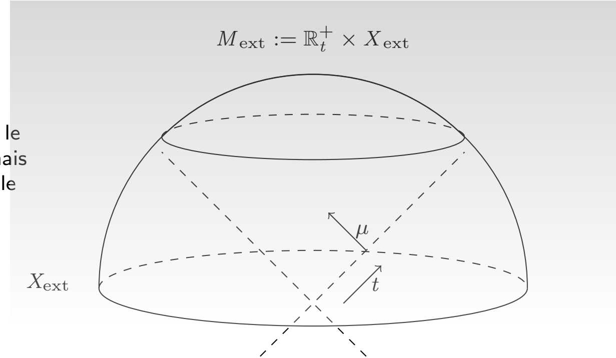
métrique ambiante à la Fefferman-Graham un point de vue projectif



$$t^{-2}\eta = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{dt}{t}\right)^2 - \frac{dt}{t} \cdot d\mu + h$$

- encore une fois, on calcule le d'alembertien sur M_{ext} (mais cette fois-ci, avec la variable t)

$$\mathbf{P} := t^{\frac{n}{2}+2}\Box t^{-\frac{n}{2}}$$



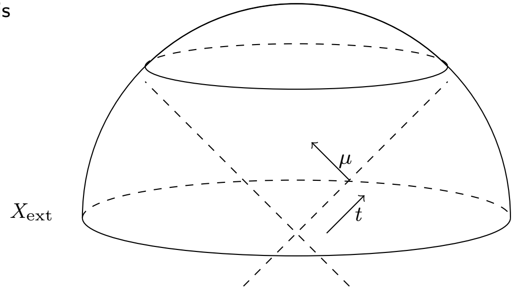
$$t^{-2}\eta = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{dt}{t}\right)^2 - \frac{dt}{t}\cdot d\mu + h$$

- encore une fois, on calcule le d'alembertien sur M_{ext} (mais cette fois-ci, avec la variable t)

$$\mathbf{P} := t^{\frac{n}{2}+2}\Box t^{-\frac{n}{2}}$$

- et on analyse sa famille indicielle sur X_{ext}

$$\mathcal{P}_\lambda := \mathrm{I}_t(\mathbf{P}, \lambda)$$



tout cela pour dire que l'opérateur $\mathcal{Q}_\lambda$ a un inverse méromorphe pour $\lambda \in \mathbb{C}$

sommaire

formes bilinéaires symétriques

- on considère l'opérateur $\mathbf{Q} = s^{\frac{n}{2}-2+2}\Box s^{-\frac{n}{2}+2}$ sur $C^\infty(M; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* M)$,

formes bilinéaires symétriques

- on considère l'opérateur $\mathbf{Q} = s^{\frac{n}{2}-2+2}\Box s^{-\frac{n}{2}+2}$ sur $C^\infty(M; \mathrm{Sym}^2\mathrm{T}^*M)$,
- on décompose le tenseur symétrique $u \in C^\infty(M; \mathrm{Sym}^2\mathrm{T}^*M)$ par rapport à l'échelle de Minkowski,

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{ds}{s}\cdot & (\frac{ds}{s})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}, \qquad u^{(k)} \in C^\infty(M; \mathrm{Sym}^k\mathrm{T}^*X)$$

formes bilinéaires symétriques

- on considère l'opérateur $\mathbf{Q} = s^{\frac{n}{2}-2+2} \Box s^{-\frac{n}{2}+2}$ sur $C^\infty(M; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* M)$,
- on décompose le tenseur symétrique $u \in C^\infty(M; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* M)$ par rapport à l'échelle de Minkowski,

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{ds}{s} \cdot & (\frac{ds}{s})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}, \qquad u^{(k)} \in C^\infty(M; \mathrm{Sym}^k \mathrm{T}^* X)$$

- et on trouve les laplaciens (de Lichnerowicz, de Hodge, et scalaire)

$$\mathbf{Q}\, u = \begin{bmatrix} \Delta + (s\partial_s)^2 - c_2 - \mathrm{L}\,\Lambda & \mathrm{d} & -\mathrm{L} \\ -\delta & \Delta + (s\partial_s)^2 - c_1 & \mathrm{d} \\ -\Lambda & -\delta & \Delta + (s\partial_s)^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}$$

- où $c_2 = \frac{1}{4} n(n-8)$

formes bilinéaires symétriques

- on considère l'opérateur $\mathbf{Q} = s^{\frac{n}{2}-2+2}\Box s^{-\frac{n}{2}+2}$ sur $C^\infty(M;\mathrm{Sym}^2\mathrm{T}^*M)$,
- on décompose le tenseur symétrique $u \in C^\infty(M;\mathrm{Sym}^2\mathrm{T}^*M)$ par rapport à l'échelle de Minkowski,

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{ds}{s}\cdot & (\frac{ds}{s})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}, \qquad u^{(k)} \in C^\infty(M;\mathrm{Sym}^k\mathrm{T}^*X)$$

- et on trouve les laplaciens (de Lichnerowicz, de Hodge, et scalaire)

$$\mathbf{Q}\,u = \begin{bmatrix} \Delta + (s\partial_s)^2 - c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ -\,\delta & \Delta + (s\partial_s)^2 - c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & -\,\delta & \Delta + (s\partial_s)^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}$$

- où $c_2 = \frac{1}{4}n(n-8)$ (et u trace nulle)

formes bilinéaires symétriques

- on considère la famille indicielle $\mathcal{Q}_\lambda$ sur $C^\infty(X; \oplus_{k=0}^{2} \mathrm{Sym}^k \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda_\eta$,

$$\mathcal{Q}_\lambda\, u = \begin{bmatrix} \Delta + \lambda^2 - c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ -\,\delta & \Delta + \lambda^2 - c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & -\,\delta & \Delta + \lambda^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}$$

formes bilinéaires symétriques

- on considère la famille indicielle $\mathcal{Q}_\lambda$ sur $C^\infty(X; \oplus_{k=0}^2 \mathrm{Sym}^k \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda_\eta$,

$$\mathcal{Q}_\lambda\, u = \begin{bmatrix} \Delta + \lambda^2 - c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ -\delta & \Delta + \lambda^2 - c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & -\delta & \Delta + \lambda^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix}$$

- sachant que $\mathcal{Q}_\lambda^{-1}$ est méromorphe, on prend

$$f \in C_c^\infty(X; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta$$

  et on essaie de découpler le système

$$\begin{bmatrix} \Delta + \lambda^2 - c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ -\delta & \Delta + \lambda^2 - c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & -\delta & \Delta + \lambda^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formes bilinéaires symétriques

- on introduit les résolvantes $\mathcal{R}_\lambda^{(0)}$ et $\mathcal{R}_\lambda^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} \Delta + \lambda^2 - c_2 + \mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)}\,\delta & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta + \lambda^2 - c_1 + \mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)}\,\delta & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta + \lambda^2 - c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formes bilinéaires symétriques

- on introduit les résolvantes $\mathcal{R}_\lambda^{(0)}$ et $\mathcal{R}_\lambda^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)}\,\delta & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)}\,\delta & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- et on applique δ et utilise $[\delta, \Delta] = 0$ (alors il faut que la variété soit Einstein)

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)} & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\,u^{(2)} \\ \delta\,u^{(1)} \\ \delta\,u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formes bilinéaires symétriques

- on introduit les résolvantes $\mathcal{R}_\lambda^{(0)}$ et $\mathcal{R}_\lambda^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)}\,\delta & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)}\,\delta & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- et on applique δ et utilise $[\delta, \Delta] = 0$ (alors il faut que la variété soit Einstein)

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)} & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\,u^{(2)} \\ \delta\,u^{(1)} \\ \delta\,u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- donc $\delta\,u^{(k)} = 0$ et le système $\mathcal{Q}_\lambda\,u = f$ découple

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ 0 & \Delta+\lambda^2-c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & 0 & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et on trouve que $u = u^{(2)}$ avec $(\Delta+\lambda^2-c_2)u = f$

formes bilinéaires symétriques

- on introduit les résolvantes $\mathcal{R}_\lambda^{(0)}$ et $\mathcal{R}_\lambda^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)}\,\delta & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)}\,\delta & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- et on applique δ et utilise $[\delta, \Delta] = 0$ (alors il faut que la variété soit Einstein)

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_1+\delta\,\mathrm{d}\,\mathcal{R}_\lambda^{(0)} & 0 \\ 0 & -\,\delta & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\,u^{(2)} \\ \delta\,u^{(1)} \\ \delta\,u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- donc $\delta\,u^{(k)} = 0$ et le système $\mathcal{Q}_\lambda\, u = f$ découple

$$\begin{bmatrix} \Delta+\lambda^2-c_2 & \mathrm{d} & 0 \\ 0 & \Delta+\lambda^2-c_1 & \mathrm{d} \\ 0 & 0 & \Delta+\lambda^2-c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(1)} \\ u^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  et on trouve que $u = u^{(2)}$ avec $(\Delta+\lambda^2-c_2)u = f$
- en définissant $u := \mathcal{Q}_\lambda^{-1}\, f$, on obtient l'extension désirée

$$\mathcal{Q}_\lambda^{-1}\, f = (\Delta+\lambda^2-c_2)^{-1} f$$

Théorème 8

Soit (X^{n+1}, g) *une variété assymptotiquement hyperbolique dont la métrique est paire et Einstein. Alors la résolvante du laplacien de Lichnerowicz*

$$\mathcal{R}_\lambda := \left(\Delta - \frac{n(n-8)}{4} + \lambda^2\right)^{-1}$$

agissant sur $L^2(X; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta$ *se prolonge de* $\operatorname{Re} \lambda \gg 1$ *au plan complèxe comme une famille méromorphe finie d'opérateurs*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\lambda : C_c^\infty(X; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta \\ \to \rho^{\lambda + \frac{n}{2} - 2} C^\infty_{\mathrm{paire}}(\overline{X}; \mathrm{Sym}^2 \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta \,.\end{aligned}$$

Théorème 9

Soit (X^{n+1}, g) *une variété hyperbolique convexe-cocompacte. Alors la résolvante du laplacien*

$$\mathcal{R}_{\Delta,m}(s) := (\nabla^*\nabla - s(n-s) - m)^{-1}$$

agissant sur $L^2(X; \mathrm{Sym}^m \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta$ *se prolonge de* $\mathrm{Re}\, s \gg 1$ *au plan complèxe comme une famille méromorphe finie d'opérateurs*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\Delta,m}(s) : \, & C_c^\infty(X; \mathrm{Sym}^m \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta \\ & \to \rho^{s-m} C^\infty_{\mathrm{paire}}(\overline{X}; \mathrm{Sym}^m \mathrm{T}^* X) \cap \ker \Lambda \cap \ker \delta \, .\end{aligned}$$

sommaire

Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

Dyatlov-Faure-Guillarmou '15

$$
\begin{tikzcd}
\text{états résonants du flot} \arrow[rr, "u \mapsto \varphi := \int_{SX} u \, d\xi"] & & \text{fonctions propres des laplaciens} \arrow[dl, "\text{structure de } \varphi \text{ au bord}"] \\
& \text{distributions au bord} \arrow[ul, "\text{opérateur de Poisson}"] &
\end{tikzcd}
$$

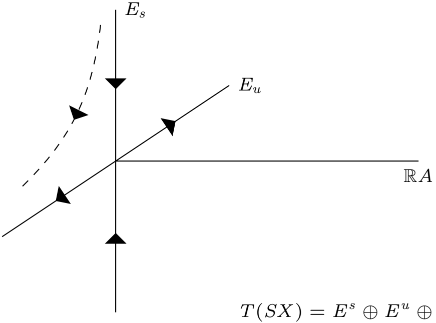
Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

$$\begin{tikzcd}
\text{états résonants du flot} \arrow[d, "\pi_{0*}"'] \\
\text{fonctions propres des laplaciens}
\end{tikzcd}$$

Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

- on considère un état résonant $u \in \mathcal{D}'(SX)$ associé à la résonance $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0\}$. Rappel : $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$

$$(A+\lambda)u = 0, \qquad u \in \mathcal{D}'_u$$



$$T(SX) = E^s \oplus E^u \oplus \mathbb{R}A$$

Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

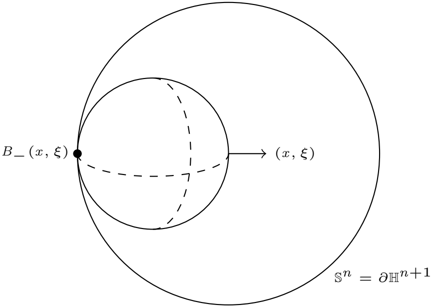
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \oplus \mathbb{R}A \arrow[d] & TX \arrow[d] \\
SX \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

- on considère un état résonant $u \in \mathcal{D}'(SX)$ associé à la résonance $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0\}$. Rappel : $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$

$$(A+\lambda)u = 0, \qquad u \in \mathcal{D}'_u$$

- on prend sa dérivée avec $\mathrm{d}_- : \Gamma(SX) \to \Gamma(SX; \operatorname{Sym}\mathcal{E})$ jusqu'à ce qu'il soit constant grâce à la relation de commutation $[A, \mathrm{d}_-] = -\mathrm{d}_-$

$$v := (\mathrm{d}_-)^m u \in \Gamma(SX; \operatorname{Sym}^m\mathcal{E}) \cap \ker \mathrm{d}_- \cap \ker(A+\lambda+m)$$



Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

$$\begin{array}{c}\text{états résonants} \\ \text{du flot}\end{array} \Big\downarrow \pi_{0*} \quad \begin{array}{c}\text{fonctions propres} \\ \text{des laplaciens}\end{array}$$

- on considère un état résonant $u \in \mathcal{D}'(SX)$ associé à la résonance $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0\}$. Rappel : $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$

$$(A+\lambda)u = 0, \qquad u \in \mathcal{D}'_u$$

- on prend sa dérivée avec $\mathrm{d}_- : \Gamma(SX) \to \Gamma(SX; \operatorname{Sym}\mathcal{E})$ jusqu'à ce qu'il soit constant grâce à la relation de commutation $[A, \mathrm{d}_-] = -\mathrm{d}_-$

$$v := (\mathrm{d}_-)^m u \in \Gamma(SX; \operatorname{Sym}^m\mathcal{E}) \cap \ker \mathrm{d}_- \cap \ker(A+\lambda+m)$$

- on le décompose par rapport à sa trace $v = \sum \mathrm{L}^k\, v^{(m-2k)}$ où $v^{(m-2k)} \in \Gamma(SX; \operatorname{Sym}^{m-2k}\mathcal{E})$ et on l'intègre le long des fibres.

$$\varphi^{m-2k} := \pi_{0*} v^{(m-2k)} \in \Gamma(X; \operatorname{Sym}^{m-2k}\mathrm{T}^*X)$$

Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ cocompacte

$$\begin{array}{c}\text{états résonants}\\ \text{du flot}\end{array} \xrightarrow{\ \pi_{0*}\ } \begin{array}{c}\text{fonctions propres}\\ \text{des laplaciens}\end{array}$$

- on considère un état résonant $u \in \mathcal{D}'(SX)$ associé à la résonance $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0\}$. Rappel : $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$

$$(A+\lambda)u = 0, \qquad u \in \mathcal{D}'_u$$

- on prend sa dérivée avec $\mathrm{d}_- : \Gamma(SX) \to \Gamma(SX; \operatorname{Sym}\mathcal{E})$ jusqu'à ce qu'il soit constant grâce à la relation de commutation $[A, \mathrm{d}_-] = -\,\mathrm{d}_-$

$$v := (\mathrm{d}_-)^m u \in \Gamma(SX; \operatorname{Sym}^m\mathcal{E}) \cap \ker \mathrm{d}_- \cap \ker(A+\lambda+m)$$

- on le décompose par rapport à sa trace $v = \sum \mathrm{L}^k\, v^{(m-2k)}$ où $v^{(m-2k)} \in \Gamma(SX; \operatorname{Sym}^{m-2k}\mathcal{E})$ et on l'intègre le long des fibres.

$$\varphi^{m-2k} := \pi_{0*} v^{(m-2k)} \in \Gamma(X; \operatorname{Sym}^{m-2k}\mathrm{T}^*X)$$

- on trouve finalement qu'il devient une section propre du laplacien

$$\varphi^{m-2k} \in \ker(\nabla^*\nabla + c_{\lambda,m,k}) \cap \ker\Lambda \cap \ker\delta$$

Correspondance classique-quantique ; $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ convexe-cocompacte

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{états résonants}\\ \text{généralisés}\\ \text{du flot}\end{array} \arrow[rr, "u \mapsto \varphi := \int_{SX} u \, d\xi"] & & \begin{array}{c}\text{états résonants}\\ \text{généralisés}\\ \text{des laplaciens}\end{array} \arrow[dl, "\text{structure de } \varphi \text{ au bord}"] \\
& \begin{array}{c}\text{distributions}\\ \text{au bord}\end{array} \arrow[ul, "\text{opérateur de Poisson}"] &
\end{tikzcd}
$$

Théorème 11

Soit $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ *une variété hyperbolique convexe-cocompacte orientée. Pour tout* $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0)$*, il existe un isomorphisme linéaire entre l'espace vectoriel d'états résonants généralisés de Ruelle*

$$\mathrm{Res}_{A,0}(\lambda_0)$$

et l'espace vectoriel ci-suivant d'états résonants généralisés quantiques

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \mathrm{Res}_{\Delta,m-2k}(\lambda_0 + m + n).$$

merci de votre attention