

2 bundle and Higgs field. (E, ϕ) .
 use a rank 1 subbundle (det $E = 0$?)
 $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_1' \rightarrow 0$. $\phi: E \rightarrow E$
 ϕ has a well-defined matrix element
 $E_1 \rightarrow E \rightarrow E \otimes K \rightarrow E_1' \otimes K$
 v_i 's are the zeros of ϕ_1 . $\phi \sim (\phi_1 \quad *)$
 v_i are the diagonal entries of ϕ as
 $\phi \sim \begin{pmatrix} v_i & * \\ 0 & v_i \end{pmatrix}$ near v_i .
 $\phi_1 \neq 0$, can write an eigenvector of ϕ at
 v_i if vanishes. But this eigenvector is
 section of the line bundle on special curve (\dots)
 $(\lambda \phi)$ $\lambda \in \mathbb{C}$
 get $\lambda = \pm v_i$
 signs arbitrarily
 v_i , we get a division of \mathbb{Z}
 So we get 2nd choices,
 that's because we're on
 with the second Hitch
 con. to E .
 some choice of $\pm v_i$

A DAY IN

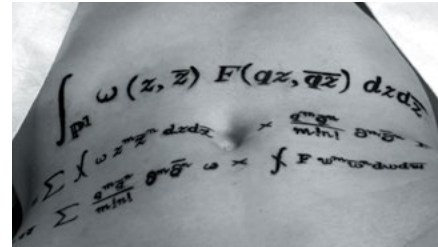
THE LIFE

OF

EDWARD FRENKEL

When I meet someone and tell them that I am a mathematician, they often ask me: What exactly do you do? What's your typical day like? In the minds of most people, mathematics is all about numbers. They imagine mathematicians spending their days staring at computer screens, turning pages of old dusty books, and crunching numbers: big numbers, and even bigger numbers, all having some fancy names. "No," I protest, "mathematics is not about numbers, it's about concepts and ideas." "Oh really," they say, "like what?"

MATHEMATICIAN



Still shot from the film *Rites of Love and Math* (courtesy of Edward Frenkel)

Mathematician's love for her represents his love for mathematics and truth, for which he is ready to sacrifice himself. But she has to survive and carry his formula, as she would their child. Mathematical truth is eternal.

As we were preparing to shoot the movie, I had to decide which formula would play the role of the formula of love. After a long "casting" process, I finally settled on a formula from a paper I wrote, with my two good friends, about a new mathematical approach to quantum physics. That's the formula you see tattooed in the film.

illustrations
 JEREMY PERRODEAU

I once had a vision of a formula of love. What if, I thought, someone were able to find the ultimate truth, what if it could be expressed by a mathematical formula? A French film director, Reine Graves, and I joined forces to make a film about this. It's called *Rites of Love and Math*. In the film, the mathematician finds the formula of love, but then realizes its inherent dangers: being so powerful, it can surely be used not only for good, but also for evil. He has to protect his formula, and so he tattoos it on the body of the woman he loves. In the framework of the mythical world we envisioned, she is the incarnation of mathematical truth.

My research in the last few years has been focused on the interplay between math and quantum physics. Currently, I am working on a project that connects models of quantum field theory in various dimensions. We live in a three-dimensional space, which is to say that we can move in three independent directions. In other words, each object in space has width, depth, and height. By the same token, a line is one-dimensional and a plane is two-dimensional. However, our brain is wired in such a way that we can only imagine spaces of dimensions up to three. Even imagining the four-dimensional combination of space and time is a

challenge: we simply can't perceive time (which constitutes the fourth dimension) as the equivalent of a spatial dimension. The amazing thing about mathematics, however, is that it allows us to think about spaces of any dimension, even if we can't imagine them. And one of the reasons we need to do this is that our universe may well have more dimensions than the four of space and time that we are familiar with.

Think about it this way: in our everyday experience, the earth seems flat and static, the sun revolving around it. For centuries this had been taken for granted. But the reality turned out to be more complex: the earth is round, it rotates about a north-to-south axis and also revolves around the sun. This knowledge did not come easily; scientists espousing these ideas were prosecuted, and some were even burnt alive. But you can't stop humanity from searching for the ultimate truth. And that's why these days our prophets are more likely to be scientists than saints.

Albert Einstein's relativity theory shattered many misconceptions we have long harbored: the universe itself is dynamic, it is curved, expanding, and is full of mysterious dark energy... In all these discoveries, mathematics has played the key role. Einstein's work was not based on observations or empirical data. In fact, all empirical data pointed to the opposite: everybody "knew" that our world was flat. But they were wrong. Only mathematics told us the truth. Mathematical knowledge is objective and timeless. Math allows us to see things the way they are, freeing us of dogmas and prejudices.

Are you still surprised that the dimension of the universe may be greater than four? Imagine an aluminum tube of a tiny diameter. For all intents and purposes, the tube is two-dimensional: one dimension going along the length of the tube and another along the circle, around the tube. But if that

circle is tiny, invisible to a naked eye, then the tube would appear to us as one-dimensional. Likewise, extra dimensions of the universe may well be wrapped on a circle, or a more sophisticated geometric shape like a sphere or the surface of a donut. If that shape is tiny, we won't be able to see it in our everyday life. But its presence will be felt because it changes the physical laws of the universe.

Physicists have been trying to describe the laws of all possible universes of higher dimensions for many years. For example, in string theory it is postulated that the universe is ten-dimensional; that is, there are six extra dimensions that we don't see. While we don't know yet whether string theory has any bearing on the real world, it has already taught us a lot about the laws of quantum physics. And we hope to use this knowledge to understand how our universe really works.

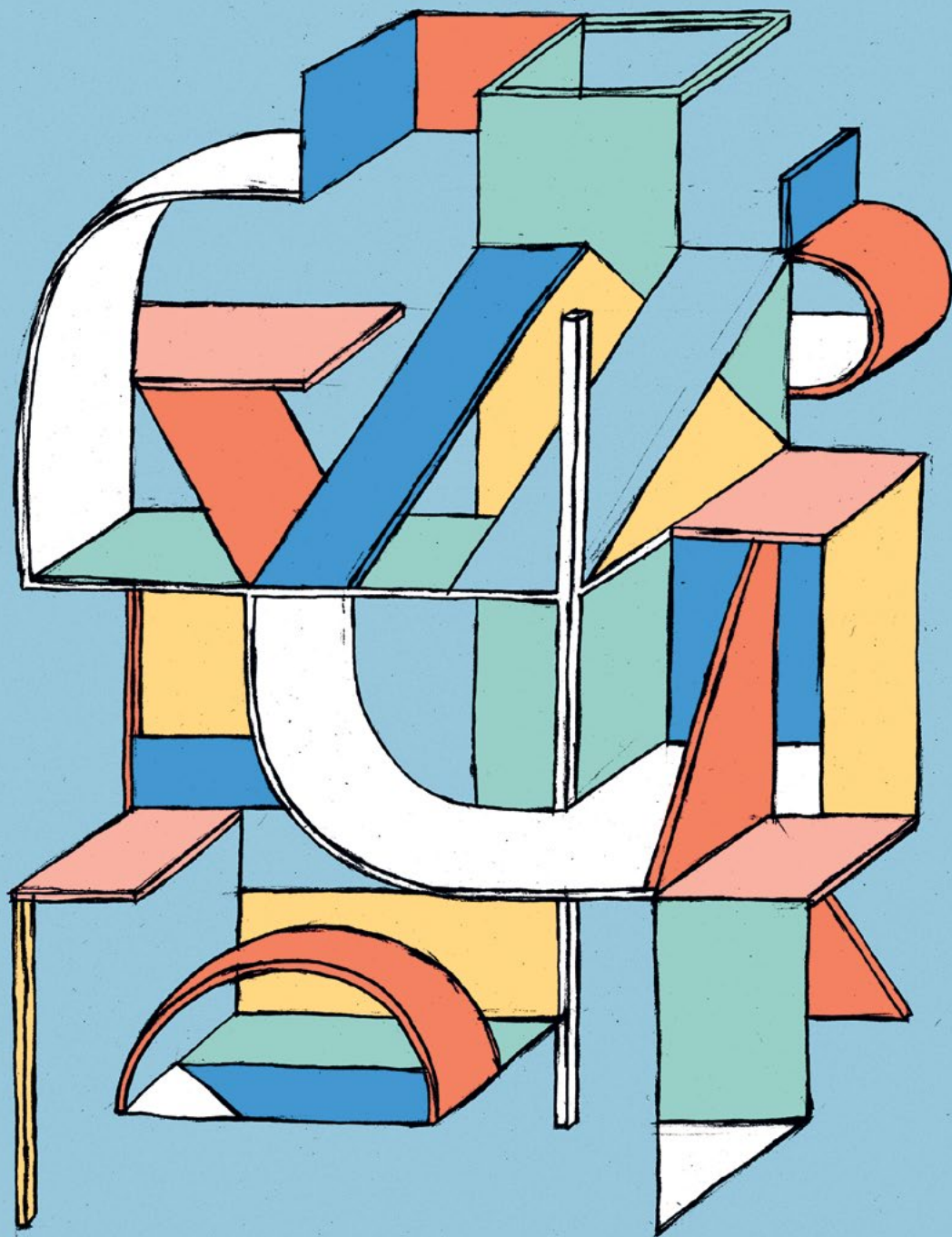
What I am particularly interested in right now is a mysterious link between four-dimensional and two-dimensional models that has been recently discovered. It works like this: for any four-dimensional physical world of a certain kind, there is a two-dimensional world, and vice versa. Each quantity you can compute in one of them has a counterpart in another, and conversely. This link is really mind-boggling, even though it has been verified in many examples. In an effort to get to the bottom of all this, my collaborators and I are trying to generalize this link to a larger class of models. There are some non-trivial relations between two-dimensional models, and we want to see whether similar relations can be found between the corresponding four-dimensional models. This is a non-trivial task. We need to assemble all information about these models, try to see the contours of the big picture, then find the answer and prove it. Sometimes the process reminds me, to paraphrase Darwin, looking for a black cat in a dark room, which may not even be there.



My collaborators, Sergei and Joerg (a Russian and a German), are thousands of miles away. Sergei is a professor at Caltech, in Los Angeles, but is currently visiting Bonn. Joerg is a professor in Hamburg. No matter, we collaborate via e-mail and Google+ "hangouts," video-conferences. We talk once or twice a week; usually, a conversation lasts an hour, an hour and a half. It's mostly just talk, bouncing ideas off each other, arguing about them. Sometimes we disagree, but of course, eventually we find common ground. Sometimes I wonder what these highly technical conversations

would sound like to an outsider... What makes this process special to me is that we are good friends; we enjoy each other's company, and there is always a lot of bantering and laughter. I sometimes refer to our sessions as Giggle+.

Our work is purely theoretical, abstract. It is not based on analysis of data, or usage of computational software. However, it is deeply rooted in the work of others before us. The work is conceptual: it's really about finding our way in the labyrinth of knowledge, trying to see things in the right light,



creating order in the seeming chaos. Eminent mathematician Yuri Manin aptly compared this process to trying to discern the outlines of a castle in deep fog. Once a hypothesis is formed, we make some calculations on a piece of paper to test it, share our findings by e-mail amongst ourselves, then debate them during our weekly virtual meetings. The hypotheses that don't withstand these tests are rejected, and new hypotheses are born. Thus, piece by piece, we are solving the puzzle.

I promised the guys to do a specific calculation and send them the results before our next conversation. That's what I've been working on today. I had to organize my thoughts and make some calculations on paper, before converting them into an e-mail. All the while listening to a new podcast from Above & Beyond – love these DJs. When I think of a new concept or idea, it's a very intimate process. I need to shut myself off completely from the world. But when I write, I like to listen to electronic music. It gives me much needed energy.

I've also been working on my new book, addressed to a wide audience, entitled *Love and Math: The Heart of Hidden Reality*. This is crunch time for me: editing the manuscript, making sure everything is in order – a lot of work. The book is an invitation to the magic world of math, which is hidden from most of us. Unfortunately, the way math is taught at school is like making students memorize music scores without ever letting them hear the music. So it's not surprising that most people think of mathematics as a stale, boring subject, or are intimidated by it. In my book, I talk about the human and spiritual sides of mathematics. Here's what I wrote today:

"Solving a mathematical problem is like doing a jigsaw puzzle, except you don't know in advance what the final picture will look like. It could be hard, it could be easy, or it could be impossible to solve. You

never know until you actually do it (or realize that it's impossible to do). This uncertainty is perhaps the most difficult aspect of being a mathematician. In other disciplines, you can improvise, come up with different solutions, even change the rules of the game. Even the very notion of what constitutes a solution is not clearly defined. For example, if we are tasked with improving productivity in a company, what metrics do we use to measure success? Will an improvement by 20 percent count as a solution of the problem? How about 10 percent? In math, the problem is always well defined, and there is no ambiguity about what solving it means. You either solve it or you don't.

One prepares for the task by working on similar problems for which solutions are already known. This gives intuition, skills, and a toolkit of methods. But one can never know a priori which of these methods would work or which way one should approach the problem – or even whether one can solve it without creating an essentially new technique or an entirely different method."

Mathematical knowledge never comes easily, but it's indispensable. The formulas we discover not only hold the reins of everything from the tiny atoms to the biggest stars, but can also be beautiful and elegant, like a painting, a poem, or a piece of music. These are the wonders of the world, and I hope that one day we will awaken to their sublime harmony. That's what my book is about.

Mathematician's mind veers back to quantum physics. It's getting late, and he still needs to send that e-mail to his collaborators. He sure hopes that this project will yield another formula worthy of a tattoo.

Edward Frenkel is Professor of Mathematics at University of California, Berkeley.

Un día en la vida de un matemático

por
EDWARD FRENKEL

La mayoría de las personas piensa que la matemática es sólo cuestión de números. Se imaginan a los matemáticos pasando sus días frente a la pantalla de una computadora, hojeando páginas de libros viejos y polvorientos, haciendo cálculos: números grandes y números aún más grandes, todos con nombres sofisticados. "No", protesto, "la matemática no se trata de números, se trata de conceptos e ideas".

Una vez tuve la visión de una fórmula del amor. ¿Qué pasaría, pensé, si alguien fuese capaz de encontrar la verdad definitiva? ¿Qué tal si pudiese ser expresada por medio de una fórmula matemática? Junto a Reine Graves, una directora de cine francesa, unimos fuerzas para realizar un film sobre esto. Se llama *Ritos de amor y matemática*. En la película, el matemático encuentra la fórmula del amor, pero luego advierte sus peligros inherentes: siendo tan poderosa, puede ser utilizada no sólo para el bien, sino también para el mal. Él debe proteger su fórmula y por eso la tatúa en el cuerpo de la mujer que ama. En el marco del mundo mítico que concebimos, ella es la encarnación de la verdad matemática. El amor del matemático hacia ella representa su amor por la matemática y la verdad, por las cuales está dispuesto a sacrificarse incluso a sí mismo. Pero ella debe sobrevivir y llevar la fórmula consigo, como lo haría con su hijo. La verdad matemática es eterna.

Mientras nos preparábamos para el rodaje de la película, tuve que decidir qué fórmula interpretaría el papel de la fórmula del amor. Después de un largo proceso de "casting", finalmente me decidí por una fórmula incluida en un artículo que escribí junto a dos buenos amigos, sobre una nueva aproximación matemática a la física cuántica. Esa es la fórmula que puede verse tatuada en la película.

En los últimos años, mi trabajo de investigación ha estado orientado a la interacción entre la matemática y la física cuántica. Actualmente, estoy trabajando en un proyecto que conecta modelos del campo de la teoría cuántica en varias dimensiones. Vivimos en un espacio tridimensional, lo cual significa que podemos movernos en tres direcciones independientes. En otras palabras, cada objeto en el espacio tiene anchura, profundidad y altura. De igual modo, una línea es unidimensional y un plano es bidimensional. Sin embargo, nuestro cerebro

está conectado de tal manera que sólo podemos imaginar espacios de hasta tres dimensiones. Inclusive imaginar la combinación tetra-dimensional del espacio y el tiempo es un desafío: simplemente no podemos percibir el tiempo (que constituye la cuarta dimensión) como el equivalente de una dimensión espacial. Lo asombroso de la matemática, sin embargo, es que nos permite pensar en espacios de cualquier cantidad de dimensiones, aunque no podamos imaginarlas. Y una de las razones por las que necesitamos hacer esto, es porque nuestro universo probablemente cuente con más de las cuatro dimensiones con las que estamos familiarizados.

La teoría de la relatividad de Albert Einstein hizo añicos muchos conceptos erróneos albergados durante largo tiempo: el universo en sí mismo es dinámico, es curvo y está lleno de misteriosa y oscura energía. En todos esos descubrimientos, la matemática cumplió un rol clave. El trabajo de Einstein no estaba basado en observaciones o en datos empíricos. De hecho, toda esta información señalaba lo contrario: todo el mundo "sabía" que nuestro mundo era plano. Pero estaban equivocados. Sólo la matemática nos decía la verdad. El conocimiento matemático es objetivo y atemporal. La matemática nos permite ver las cosas de la forma que son, liberándonos de todo dogma y prejuicio.

¿Todavía estás sorprendido de que las dimensiones del universo puedan ser más de cuatro? Imaginemos un tubo de aluminio de un diámetro muy pequeño. Para nuestros efectos el tubo es bidimensional, una dimensión recorre el largo del tubo y la otra el círculo. Pero si este círculo es diminuto, invisible a simple vista, entonces el tubo se nos presentará como unidimensional. Asimismo, una dimensión extra del universo bien podría estar envuelta en un círculo, o en otra forma geométrica más sofisticada, como una esfera o una dona. Si la forma es pequeña, no somos capaces de detectarla en nuestra vida cotidiana. Sin embargo, su presencia se hará sentir porque cambia las leyes físicas del universo.

Actualmente, me interesa de manera particular una misteriosa conexión, recientemente descubierta, entre modelos de cuatro y dos dimensiones. Funciona de la siguiente manera: para cada universo físico de cuatro dimensiones de cierto tipo, existe uno de dos dimensiones correspondiente y viceversa. Cada magnitud que puede calcularse en uno de ellos, tiene una contraparte en el otro. Esta relación es realmente desconcertante, a pesar de que ha sido comprobada con muchos ejemplos. En un esfuerzo por llegar al fondo de todo este asunto, junto a mis colaboradores, estamos tratando de generalizar esta relación a una clase más extensa de modelos. Hay una serie de relaciones relevantes entre modelos bidimensionales, y nosotros queremos comprobar si pueden encontrarse

las mismas relaciones en sus modelos correspondientes de cuatro dimensiones. Necesitamos reunir toda la información sobre estos modelos, intentar ver los límites de la imagen completa, luego encontrar la respuesta y probarla. A veces este proceso me recuerda, parafraseando a Darwin, a buscar un gato negro en un cuarto oscuro, el cual incluso puede no estar allí.

Mis colaboradores, Sergei y Joerg (uno ruso y el otro alemán), se encuentran a miles de kilómetros. Sergei es profesor en Caltech, en Los Angeles, pero actualmente está de visita en Bonn. Joerg es profesor en Hamburgo. No importa, trabajamos en conjunto por mail, haciendo reuniones en Google+ y video conferencias. Hablamos una o dos veces por semana, en general las charlas duran entre una hora y una hora y media. Principalmente hablamos, intercambiamos ideas, discutimos sobre ellas. A veces estamos en desacuerdo, pero por supuesto, eventualmente llegamos a un punto en común. A veces me pregunto cómo sonarán desde afuera estas conversaciones ultra técnicas. Lo que hace especial este proceso es que somos buenos amigos, disfrutamos de la compañía mutua y siempre hay muchas bromas y risas.

Nuestro trabajo es puramente teórico, abstracto. No está basado en el análisis de datos o en el uso de software particular. Sin embargo, está profundamente enraizado en el trabajo de nuestros predecesores. El trabajo es conceptual: se trata de encontrar nuestro camino propio en el laberinto del conocimiento, tratando de ver las cosas bajo la luz correcta, creando orden en el aparente caos. El eminente matemático Yuri Manin comparó atinadamente este proceso con el de distinguir el contorno de un castillo en la espesa niebla. Una vez que la hipótesis es formulada, hacemos algunos cálculos en una hoja de papel para probarla, para luego compartir nuestros descubrimientos por mail. Posteriormente los debatimos durante nuestras sesiones virtuales semanales. Las hipótesis que no resisten estas pruebas son rechazadas, mientras nacen otras nuevas. Así, pieza a pieza, vamos completando el rompecabezas.

Prometí a mis compañeros hacer unos cálculos específicos y mandarles los resultados antes de nuestra próxima charla. En eso estuve trabajando hoy. Tengo que ordenar mis ideas y hacer algunas cuentas en papel, antes de convertirlas en un mail. Todo esto mientras escucho un nuevo podcast de Above and Beyond, me encantan esos DJs. Cuando pienso en un nuevo concepto o idea, es un proceso muy íntimo. Necesito aislarme completamente del mundo. Pero cuando escribo, me gusta escuchar música electrónica. Me da la energía que tanto necesito.

También estoy escribiendo mi nuevo libro, dirigido a una audiencia amplia, titulado *Amor y matemáticas: el*

corazón de la verdad escondida. Este es un momento decisivo para mí: estoy editando el manuscrito, asegurándome que todo esté en orden; en fin, mucho trabajo. El libro pretende ser una invitación al mágico mundo de la matemáticas, el cual permanece oculto para la mayoría de nosotros. Lamentablemente, la forma en que se enseña matemática en las escuelas es como pedirles los alumnos que memoricen partituras sin permitirles escuchar la música. Por eso no debe sorprendernos que muchos piensen en las matemáticas como algo rancio, una materia aburrida, o incluso se sientan intimidados por ella. En mi libro hablo del lado humano y espiritual de la matemática. Esto es lo que escribí hoy:

"Resolver un problema matemático es como armar un rompecabezas, exceptuando que desconocemos como será la imagen final. Puede ser difícil, puede ser fácil o puede ser imposible de solucionar. Nunca se sabe hasta que lo haces (o te das cuenta de que es imposible hacerlo). Probablemente, esta incertidumbre sea lo más difícil de ser matemático. En otras disciplinas es posible improvisar, dar con distintas soluciones o cambiar las reglas del juego; incluso la propia noción de aquello que constituye una solución no está claramente definida. Por ejemplo, si tenemos la tarea de mejorar la productividad en una empresa, ¿qué parámetros usamos para medir el éxito? ¿Una mejora en un veinte por ciento significará la solución del problema? ¿Y si es de un diez por ciento? En matemática, el problema siempre está bien definido, no hay ambigüedades sobre lo que significa resolverlo. Lo haces o no.

Uno se prepara para la tarea, trabajando en problemas similares, cuyas soluciones ya son conocidas. Esto brinda intuición, habilidades y una batería de métodos. Pero uno nunca sabe a priori cuál de estos métodos podría funcionar o qué camino nos permitirá abordar mejor el problema, (o incluso si es posible solucionarlo sin crear una nueva técnica o método completamente diferente)".

El conocimiento matemático nunca llega con facilidad, pero es indispensable. Las fórmulas que descubrimos no sólo llevan las riendas de todo, desde los pequeños átomos hasta las grandes estrellas, sino que también pueden ser hermosas y elegantes, como una pintura, un poema o una pieza musical. Estas son las maravillas del mundo y espero que un día abramos los ojos ante su sublime armonía. De eso trata mi libro.

La mente del matemático vuelve nuevamente hacia la física cuántica. Se hace tarde y todavía necesita enviar ese mail a sus compañeros. Seguramente espera que el proyecto conduzca a una nueva fórmula, digna de ser tatuada.