29-11-76

Dear Kazhdan,

This is perhaps a partial answer to an old letter of yours. I thought to the matter again because of some estimations of trigonometrical sums Hooley asked me about. As I am in a hurry to continue writing up Weil II, I will leave many open ends and soon turn to french.

Theme: many functions correspond to sheaves, and operations on functions to operations on sheaves. What about harmonic analysis on $\mathbb{G}_a$?

ⓐ If X is a scheme $/\mathbb{F}_q$, we will consider

α) objects of the derived category $D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$\downarrow$ by $\sum(-1)^i H^i$

β) virtual ℓ-adic sheaves

[this mean either: elements of the Grothendieck group of the abelian category of constructible sheaves – or if possible and useful, object of some Picard category having this K° as set of isomorphism classes of object]

$\downarrow$ by $\mathrm{Tr}(F_x^*, \mathcal{F}_{\bar{x}})$

γ) "functions": a system of functions on the $X(\mathbb{F}_{q^n})$

(this map is injective)

ⓑ Here are corresponding opérations:

on functions: $+, \cdot, \Sigma$ on α), β): $\oplus, \otimes, R\pi_!$

convolution of functions: if G is a group, and $K, L \in D^b(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, one consider the product $\pi : G \times G \to G$, and $K \boxtimes L = pr_1^* K \otimes pr_2^* L$, and

$$K * L = R\pi_!(K \boxtimes L)$$

Kernel: given $\begin{array}{c} Z \\ \downarrow \\ X \times Y \end{array}$ and $K \in D^b(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, this defines an operation $D^b(X) \to D^b(Y)$

$$: L_X \to R p_{2!}(K \otimes R p_1^* L_X)$$

Pull back by f of the sheaf on $\mathbb{G}_a$, rank 1, defined by Ψ and Artin-Schreier $T^p - T = X$

ⓒ I now want to consider Fourier transform.

Let us chose Ψ : ~~[illegible]~~ $\mathbb{F}_p \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

If f is a function on X, we get a sheaf $\mathcal{F}(\Psi f)$. Fourier transform, on $\mathbb{G}_a$, is given by the kernel $\mathcal{F}(\Psi(xy))$ on $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$.

dfn : $\underline{F}(K) = R\,pr_{2!}\left(\mathcal{F}(\Psi(xy)) \otimes R\,pr_1^* K\right)$

prop 1 : $\underline{F}(K * L) = \underline{F}(K) \otimes F(L)$ (from $\mathcal{F}(\Psi(x(y'+y''))) = \mathcal{F}(\Psi(xy')) \otimes \mathcal{F}(\Psi(xy''))$

prop 2 : $\underline{F}\,\underline{F}(K) = K^\vee(-1)[-2]$: $\vee$ is for "image by $x \to -x$"
(-1) for a Tate twist [ ] for decalage

Kernels compose like expected : we have to compute : $R\pi_!\, \mathcal{F}(\Psi(x+z)y)$ for $\pi : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \xrightarrow{(13)} \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$

one gets $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ on the diagonal, in d° 2 hence the result
0 elsewhere.

It is convenient in such computation to forget writing $\mathcal{F}$ and writing $\int \cdots dy$ for a $R\pi_!$.

Rmq : this defines, via prop 1, an isomorphism $\underline{F}(K \otimes L)(-1)[-2] = \underline{F}(K) * \underline{F}(L)$

For Plancherel formula, one suffer somewhat of not having complex conjugation.

Let $\bar{F}$ be F defined using $\Psi(-x)$. Then

a) inner product : $\langle K, L \rangle = R\Gamma(K \otimes L)$

b) prop $\langle FK, \bar{F}L \rangle = \langle K, L \rangle (-1)[-2]$

This boils down to the usual $\int \Psi((x'-x'')y)\, K(x')L(x'')\, dx'dx''dy \underset{\text{by } \int_y}{=} \int \delta^{(-1)[-2]}(x'-x'')\, K(x')L(x'')\,dx'dx''$

Everything done above can be generalized to any connected unipotent group U. The dual U^* is to be taken in Serre sense (it is natural only up to unseparable isogenies, but this does not matter. For ~~n~~ n large enough, one has a pairing

$$U \times U^* \longrightarrow W_n$$

(better : the pairing is in the cowitt vectors $W_{-\infty} = \varinjlim_{\text{by } V} W_n$). Given $\Psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = W_\infty(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, and using the sheaf given by the Lang covering of $W_{-\infty}/\mathbb{F}_p$ and Ψ, everything can be repeated, with $(-1)[-2]$ replaced by $(-d)[-2d]$ where d is the dimension.

This requires to be careful if one wants to consider $\mathbb{Q}_p$ as a (ind pro quasi) unipotent algebraic group $/\mathbb{F}_p$.

(d) When $\underline{F}$ is, there should also be an action of the metaplectic group! (here symplectic). Let me work for $\mathbb{G}_a$, and for $p \neq 2$. The most precise way of speaking I see is working over $\mathbb{F}_p$, with kernels. [it gives more than actions of $SL(2,k)$ on $D^b(\mathbb{G}_a, \mathbb{Q}_\ell)$, $k/\mathbb{F}_q$]

Wanted : $P \in D^b(SL(2) \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)$, viewed as a family of kernels on $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ parametrized by $SL(2)$. Plus " $P_{g'} \cdot P_{g''} = P_{g' \cdot g''}$ "

We know what is wanted for generators :

U^- $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mapsto (\otimes \mathcal{F}(\Psi(a\frac{x^2}{2}))$ $\quad$ (noyau sur la diagonale)

H $\quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto (x \mapsto \lambda x)_* (\quad)$ $\quad$ (noyau sur $y = \lambda x$)

$a \neq 0$ $\;U_0^+$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (\int_x \mathcal{F}\Psi(a^{-1}\frac{x^2}{2}))^{-1} \; \mathcal{F}\Psi(a^{-1}\frac{x^2}{2}) *$ $\quad$ (noyau : faisceau loc c^t de rg 1, en degré -1

an explanation: $R\Gamma\, \mathcal{F}\Psi(a^{-1}\frac{x^2}{2})$ is of dimension 1, and degree 1, and I take the dual one dimensional vector space [in a : a sheaf], in degree -1

En français :

Raisonnons un peu a priori. Comme "fonctions", on sait ce que sont les noyaux cherchés. On cherche des faisceaux leur donnant naissance. ~~On~~ Sur $U^- \times H \times U_0^+ \times U^- \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, composant les générateurs, on trouve un faisceau localement constant de rang 1, placé en degré -1, qui convient. ~~Il est d'ailleurs de~~ En chaque point de $U^- \times H \times U_0^+ \times U^-$, comme fonction de x, y, il est de la forme Ψf, pour f

~~la forme $\int f$,~~ pour f une fonction qui, en x, y (sur $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$) est quadratique (homogène). Regardons la surjection

$$U^- \times H \times U_0^+ \times U^- \longrightarrow G - B^- \qquad \left(G = SL(2),\ B^- = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\right)$$

Puisque comme "fonction" ce que nous cherchons existe, le faisceau obtenu est constant sur les fibres de (cette application $\times\ \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$)

<u>obtenu</u> : un faisceau de rang 1, en degré -1, loc c^t, sur $(G - B^-) \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$.

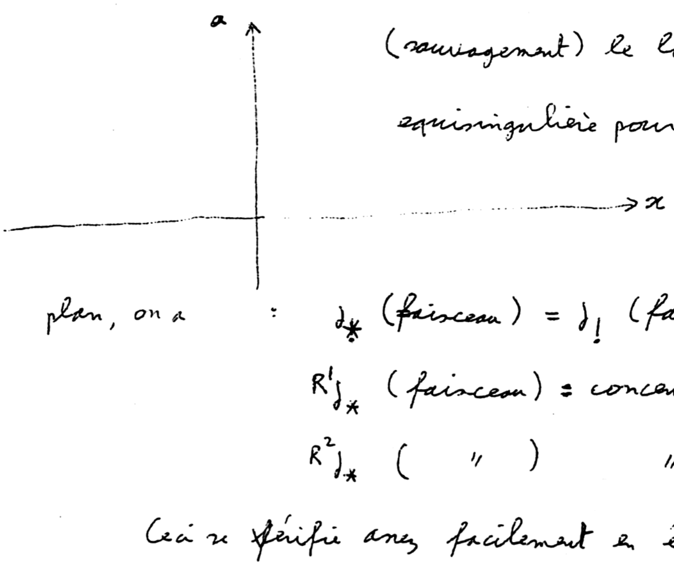
Pour compléter le tableau, il est bon de comprendre en quel sens, pour $a \to 0$, on a

$$\underbrace{\left(\int \mathcal{F}\Psi\left(a^{-1}\frac{x^2}{2}\right)dx\right)^{-1}}_{\substack{\text{faisceau de rang 1 (degré } -1) \\ \text{sur la droite des } a}} \cdot\ \mathcal{F}\Psi\left(a^{-1}\frac{x^2}{2}\right) \longrightarrow \delta_0 \quad (\text{faisceau } \mathbb{Q}_\ell \text{ en } x = 0)$$

ce faisceau se trivialise sur le revêtement de la droite des a donné par $\sqrt{a}$, car "$\int \mathcal{F}\Psi\left(a^{-2}\frac{x^2}{2}\right)dx = \int \mathcal{F}\Psi\left(\frac{(a^{-1}x)^2}{2}\right)dx = \int \mathcal{F}\Psi\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$ par ch^t de variable".

Il correspond à une somme de Gauss ; sur $\int \cdots$, $|\text{Frobenius}| = q^{1/2}$.

Traçons le plan a, x ; le faisceau considéré est défini pour $a \neq 0$; il se ramifie (sauvagement) le long de $a = 0$, et la ramification est équisingulière pour $x \neq 0$. Si j est l'inclusion de $a \neq 0$ dans le



plan, on a :

$j_*(\text{faisceau}) = j_!(\text{faisceau})$: nul pour $a = 0$

$R^1 j_*(\text{faisceau})$: concentré en $(0,0)$, où c'est δ

$R^2 j_*$ (") " " " .

Ceci se vérifie assez facilement en éclatant 2 fois $(0,0)$, la $2^{\text{ème}}$ fois en éclatant (courbe exceptionnelle) $\cap$ (transformé propre de l'axe des x) e : on utilise

(5)
$$\begin{tikzcd} & (\text{plan éclaté}) \arrow[d, "\pi"] \\ (a\neq 0) \arrow[ur, "\tilde{j}"] \arrow[r, hook, "j"'] & (\text{plan}) \end{tikzcd} \qquad R j_* = R\pi_* \, R\tilde{j}_*$$

On contrôle en projetant sur la droite des a : si p_a est cette projection, on a

$$R p_{a*}\, R j_* = \underbrace{\underbrace{R j_*}_{\substack{\text{sur cette} \\ \text{droite,} \\ (a\neq 0) \hookrightarrow a=0}} \; R p_{a*}}_{\substack{\deg 0 :\ \mathbb{Q}_\ell \\ \deg 1 :\ \mathbb{Q}_\ell(-1) \text{ en } 0}}$$

$R p_{a*}$ donne $\mathbb{Q}_\ell$ sur la droite a, $-\{0\}$

Ceci nous dit ce que nous devons faire pour construire ρ

(a) sur U^+, le noyau s'obtient à partir de

$$\tau_{\leq 0}\left(R j_* \left(\left(\int \mathcal{F}\psi(a^{-1}\tfrac{x^2}{2})\, dx \right)^{-1} \mathcal{F}(\psi(a^{-1}\tfrac{x^2}{2})) \right)\right)$$

sur $U^+ \times \mathbb{G}_a$, comme convolution

(b) sur $G \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, on prend le noyau déjà construit sur $(G - B^-) \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, et pour j l'inclusion dans $G \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, on lui applique $\tau_{\leq 0} R j_*$

Je me suis convaincu que la formule $\rho_g \rho_{g'} = \rho_{gg'}$ vaut au sens le plus fort possible :

a) sur $G \times G \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, on prend $\rho_{g''}(y,z)\, \rho_{g'}(x,y)$

b) on intègre par rapport à y : $(\rho\cdot\rho)_{g',g''} = \int dy \cdots$ sur $G \times G \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$

c) si ~~si~~ π est $G \times G \to G : g', g'' \mapsto g'g''$, on a un isomorphisme

$$(\rho\cdot\rho) = \pi^* \rho$$

d) on a une compatibilité pour un composé triple [en c), on a unicité à une c^{te} près, et on normalise par ce qui se passe à l'origine]

Bien sûr, tout ceci devrait valoir pour un espace vectoriel V, et $Sp(V \oplus V^*)$. Il est facile de se convaincre qu'on a en tout cas un noyau $P_g(v,v')$ qui est un faisceau virtuel, et que sur la cellule des $g \in Sp$ où $gV^* \cap V^* = 0$, il est donné de façon naturelle par un faisceau de rang 1, localement constant, en degré $-n$. J'espère ~~qu'il a~~ que ~~prolongeant~~ le noyau lui-même s'en déduit par une suite d'opérations $\tau_{\leq})_*$, avec un résultat localement constant de rang 1 sur un sous-espace, en degré $-k$, sur la strate $\dim(V^*/V^* \cap gV^*) = k$.
(qu'on ait un noyau ainsi stratifié doit pouvoir se vérifier par Fourier).

<u>Question</u> : Le foncteur $K \mapsto (x \mapsto -x)_* R\underline{Hom}(K, \mathbb{Q}_\ell)$ commute-t-il à l'action de $SL(2)$?

<u>bis</u> : pour P_g le noyau, et K sur $\mathbb{A}_a$, a-t-on

$$R{pr_2}_!(P_g \otimes pr_1^* K) \xrightarrow{\sim} R{pr_2}_*(P_g \otimes pr_1^* K) \quad ?$$

<u>ter</u> y commute-t-il virtuellement – ou au moins virtuellement sur $\mathbb{F}$?

Bien à toi

P. Deligne