UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL — DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÉORÈMES DE REPRÉSENTABILITÉ POUR LES ESPACES ALGÉBRIQUES

par

Michael ARTIN

Massachusetts Institute of Technology

Cambridge, Mass. U.S.A.

en collaboration avec

Alexandru LASCU et Jean-François BOUTOT

1973

LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

C.P. 6128, MONTRÉAL 101, CANADA

ISBN 0 8405 0219 2
DÉPÔT LÉGAL, 1er TRIMESTRE 1973 — BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DU QUÉBEC

à Jean MARANDA

Notes du cours donné par le professeur Michael Artin à la neuvième session du Séminaire de mathématiques supérieures de l'Université de Montréal, tenue l'été 1970. Le Séminaire est placé sous les auspices de la Société Mathématique du Canada.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Theses notes are based on lectures I gave at the University of Montréal during the summer of 1970. Alexandre Lascu and Jean-François Boutot kindly took on the job of writing up the notes. Lascu wrote chapters I-VI, and Boutot wrote chapter VII. My lectures (in bad French) were often quite sketchy and have been filled out a great deal here with details of proof and examples, until in the end Lascu and Boutot have contributed at least as much to the notes as I.

The purpose of the lectures was to give an introduction to algebraic spaces which was as down-to-earth as possible, with some representability theorems as the goal. For pedagogical reasons, I worked over an algebraically closed field. Although the notes are not entirely self-contained, I think there are enough details of proof so that they can be followed without too much difficulty by someone with a background in algebraic geometry.

Chapter VII contains a new arrangement of the finiteness theorem for étale cohomology, which I believe is a considerable improvement over the treatment in SGA4. This is the only really novel feature of the notes. From a logical point of view the main change in proof is the use of the approximation theorem, which trivializes exposé XIII of SGA4. However the introduction of the étale space associated to a sheaf leads to a considerable clarification of the statement of the theorem, and it allows one to apply the representability criteria developed in chapter V to simplify the proof.

Michael Artin.

CHAPITRE I

RAPPEL SUR LES MORPHISMES ETALES

Tous les schémas seront noethériens.

Proposition 1.1

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) critère jacobien : pour tout $y \in Y$ et $x = f(y)$, il existe des voisinages affines Spec A de x et Spec B de y avec

$$B = A[t_1,\dots,t_n]/(f_1,\dots,f_n)$$

et

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) B = B \quad \left(\text{i.e. } \det\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \text{ inversible dans } B\right),$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(t_1,\dots,t_n)} .$$

b) critère infinitésimal : soit $0 \to \varepsilon \to \overline{A}' \to \overline{A} \to 0$ une suite exacte où $\overline{A}$, $\overline{A}'$ sont des A-algèbres artiniennes locales et ε un idéal de longueur 1 (en particulier $\varepsilon^2 = 0$). Pour tout point de X à valeur dans $\overline{A}'$, tout X-morphisme du sous-schéma fermé Spec $\overline{A}$ dans Y s'étend uniquement à Spec $\overline{A}'$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \overline{A} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \overline{A}' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd} .$$

b') Comme b) sans la restriction longueur de $\varepsilon = 1$.

c) f est plat et $\Omega^1_{Y/X} = 0$.

Démonstration

a) $\Longrightarrow$ b)

Un morphisme d'un schéma local artinien Spec O dans un schéma est donné par l'homomorphisme $O_s \to O$, où s est l'image du seul point de Spec O . On peut donc remplacer X et Y par des ouverts affines choisis comme dans a). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A}' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \overline{A} \end{tikzcd}$$

et on cherche une flèche $B \dashrightarrow \overline{A}'$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A}' \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \overline{A} \end{tikzcd} .$$

Une flèche $B \to \overline{A}'$ est donnée par une solution $y \in (\overline{A}')^n$ de $f(y) = 0$. Soit $y^0 \in (\overline{A})^n$ la solution de $f(y^0) = 0$ donnée par $B \to \overline{A}$. Relevons-là arbitrairement en $\overline{y} \in (\overline{A}')^n$.On a $f(\overline{y}) \equiv 0$ mod.ε i.e. $f(\overline{y}) \in (\varepsilon)^n$. Il faut trouver $h \in (\varepsilon)^n$ tel que $f(\overline{y}+h) = 0$. Or

$$f(\overline{y}+h) = f(\overline{y}) + \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y})\, h + \text{termes dans } \varepsilon^2 ,$$

donc

$$f(\overline{y}+h) = f(\overline{y}) + \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y})\, h$$

d'où $f(\overline{y}+h) = 0$, si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y})\, h = -f(\overline{y}) \;.$$

Ce système a une solution unique puisque $\frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y})$ est inversible dans $\overline{A}'$: $\det(\frac{\partial f}{\partial t})\cdot B = B \Longrightarrow \det(\frac{\partial f}{\partial t})\, \overline{A} = \overline{A}$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial t}(y^0)$ inversible, d'où on déduit que $\frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y})$ est aussi inversible, $\overline{A}' \to \overline{A}$ étant local. La solution est dans $(\varepsilon)^n$ car $f(\overline{y}) \in (\varepsilon)^n$.

b) $\Longrightarrow$ b')

Récurrence sur la longueur de ε . Soit $\varepsilon' \subset \varepsilon$ un sous-module avec $\ell(\varepsilon') = 1$. On a la suite exacte

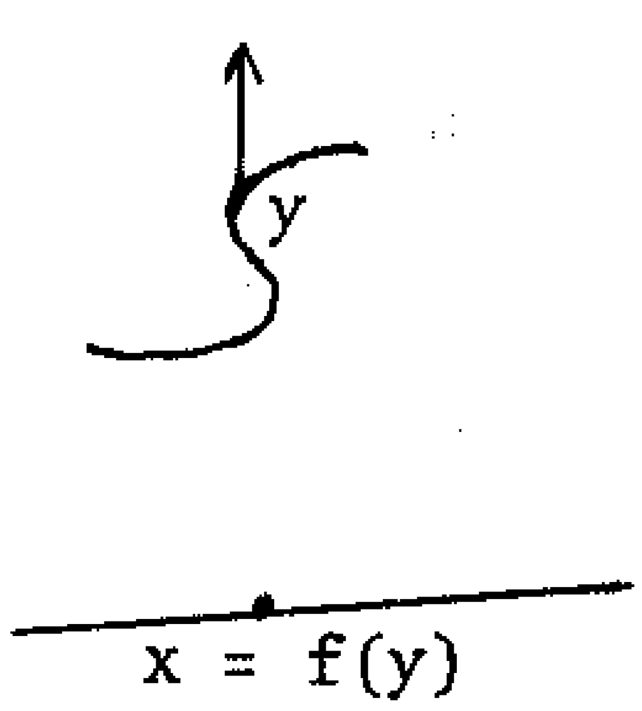
$$0 \to \varepsilon/\varepsilon' \to \overline{A}'/\varepsilon' \to \overline{A} \to 0$$

et on peut relever uniquement $B \to \overline{A}$ à $B \to \overline{A}'/\varepsilon'$ par l'hypothèse inductive, puis appliquer b) à $B \to \overline{A}'/\varepsilon'$ et à la suite exacte

$$0 \to \varepsilon' \to \overline{A}' \to \overline{A}'/\varepsilon' \to 0 \quad .$$

b') $\Longrightarrow$ c)

D'abord b) $\Longrightarrow$ f quasi fini, sinon on pourrait trouver une déformation verticale, contradictoire à l'unicité (Note 1).



$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow f \\ X \end{array}$$

c) est local pour la topologie plate sur X et sur Y . Après un changement de base plat on peut supposer $k(x) = k(y)$ (note 2). Montrons que $\hat{O}_x = \hat{O}_y$. Il suffit de montrer que $O_x/\underline{m}_x^N = O_y/m_x^N O_y$ puisque, f étant quasi fini, $\underline{m}_x O_y$ est un idéal de définition de O_y. On applique b') à

$$\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & O_x/m_x^N = \overline{A}' \arrow[d] \\
O_y \arrow[r] & O_y/\underline{m}_y = O_x/\underline{m}_x = \overline{A}
\end{tikzcd}$$

pour trouver une flèche $\phi : O_y \to O_x/m_x^N$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & O_x/m_x^N \arrow[d] \\
O_y \arrow[r] \arrow[ur, "\phi"] & O_y/\underline{m}_y
\end{tikzcd} .$$

Il en résulte que $O_x \to O_y$ induit un morphisme injectif $O_x/m_x^N \to O_y/m_x^N O_y$. Pour voir que celui-ci est aussi surjectif, il suffit de vérifier la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
 & O_x/\underline{m}_x^N \arrow[d] \\
O_y \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r] & O_y/\underline{m}_x^N O_y
\end{tikzcd}$$

où $O_y \to O_y/\underline{m}_x^N O_y$ et la surjection canonique. Or on a deux flèches $O_y \rightrightarrows O_y/\underline{m}_x^N O_y$ que l'on peut insérer dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} O_x & \longrightarrow & O_y/\underline{m}_x^N O_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_y & \longrightarrow & O_y/\underline{m}_y \end{array} .$$

On conclut par b') avec $\overline{A}' = O_y/\underline{m}_x^N O_y$, $\overline{A} = O_y/\underline{m}_y$ qu'elles sont égales. Donc $O_x/\underline{m}_x^N \overset{\sim}{\to} O_y/\underline{m}_x^N O_y$ pour tout N ce qui implique $\hat{O}_x \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$. On fait alors l'extension plate

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & \hat{X} \times_X Y = \hat{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & \hat{X} = \operatorname{Spec} \hat{O}_x \end{array} .$$

La fibre de $\hat{Y} \to \hat{X}$ au-dessus du point fermé de $\hat{X}$ est $\hat{Y} \times_{\hat{X}} \operatorname{Spec} k(x)$ donc isomorphe à $Y \times_X \operatorname{Spec} k(x)$ qui est la fibre de f au point x . Appelons encore y le point de $\hat{Y} \times_{\hat{X}} \operatorname{Spec} k(x)$ correspondant à y par cet isomorphisme. On a $O_{\hat{Y},y} = \hat{O}_y$ et l'homomorphisme $O_y \to \hat{O}_y$ correspondant à $\hat{Y} \to Y$ est l'homomorphisme canonique de O_y dans son complété (Note 4). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} O_x & \longrightarrow & O_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{O}_x & \longrightarrow & \hat{O}_y \end{array}$$

est commutatif où l'homomorphisme en bas $\hat{O}_x \to \hat{O}_y$ est défini par $\hat{Y} \to \hat{X}$. Donc celui-ci coïncide avec l'isomorphisme $\hat{O}_x \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$ défini par $O_x \to O_y$. Il en résulte qu'on peut splitter

$$\hat{Y} = C \coprod D ,$$

avec $C = \operatorname{Spec} \hat{O}_y$. En effet, le morphisme canonique $\overline{B} = \hat{O}_x \otimes_A B \overset{\phi}{\to} \hat{O}_y$ est surjectif parce qu'en le composant avec $\hat{O}_x \to \hat{O}_x \otimes_A B$, cela donne un isomorphisme. Or $\hat{O}_y = \overline{B}_P$ avec $P = \phi^{-1}(\underline{m}_y \hat{O}_y)$ d'où on voit que si $I = \operatorname{Ker} \phi$,il existe $\lambda \in \overline{B}$, $\lambda \notin P$ tel que $\lambda I = 0$ et $\overline{B}_\lambda \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$. Donc le morphisme $C \to \hat{Y}$ défini par ϕ c'est une immersion qui est à la fois fermée et ouverte ce qui prouve bien que $\hat{Y} = C \amalg D$. Comme $\hat{O}_x \to \overline{B} \to \hat{O}_y$ c'est un isomorphisme, $\hat{Y} \to \hat{X}$ induit un isomorphisme $C \overset{\sim}{\to} \hat{X}$ ce qui montre que $\hat{Y} \to \hat{X}$ est plat en y et $(\Omega^1_{\hat{Y}/\hat{X}})_y = 0$. Puis descente fidèlement plate.

c) $\Longrightarrow$ a)

Soit $B = A[t_1,\dots,t_n]/I$ définissant un voisinage affine de $y \in Y$. On peut remplacer Y par $\operatorname{Spec} B$. On a la suite exacte

$$0 \to K \to \Omega^1_{A[t]/A} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

avec K engendré par les df , $f \in I$. Or $\Omega^1_{B/A} = 0$, donc $\Omega^1_{A[t]/A} \otimes_A B$ est engendré par les df avec $f \in I$. C'est un B-module libre, de rang n , engendré par $dt_1,\dots,dt_n$ donc toute base minimale sur B_y de $\Omega^1_{A[t]/A} \otimes_A B_y$ est libre car engendrée par n éléments. On peut choisir une telle base $df_1,\dots,df_n$ avec $f_1,\dots,f_n \in I$ ce qui équivaut à $\det(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}) \neq 0$ en y . Soit $C = A[t]/(f_1,\dots,f_n)$. $Z = \operatorname{Spec} C$ est un X-schéma affine dont l'anneau est de la forme $A[t_1,\dots,t_n]/(f_1,\dots,f_n)$ avec $\det(\partial f_i/\partial t_j) \neq 0$ en y . Cette propriété se conserve pour tout ouvert affine $\operatorname{Spec}(C_g)$ avec $g \in A[t]$ qui contient y . En effet, soit z une nouvelle variable $h = gz-1$. On a $C_g = C[z]/(gz-1)\,C[z] = A[t,z]/(f_1,\dots,f_n,h)$ et le jacobien

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial t} & * \\ \hline 0 & g \end{array}\right|$$

qui est $\neq 0$ en y parce que $g(y) \neq 0$. Il est donc possible de remplacer Y par un voisinage affine de y de sorte qu'on puisse supposer $\det(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}) \neq 0$ dans tous les points de Z i.e. $\det(\frac{\partial f_i}{\partial t_j})$ inversible dans C (prendre $g = \det(\frac{\partial f_i}{\partial t_j})$ et remplacer Y par $\mathrm{Spec}(B_g)$). A ce moment-là on peut prouver que l'immersion fermée $Y \to Z$ définie par la surjection canonique $C \to B$ est aussi ouverte dans un voisinage $\mathrm{Spec}(C_g)$ de y donc on conclut en remplaçant C par C_g .
Il reste seulement à montrer que $O_{Y,y} = O_{Z,y}$. Après un changement plat de base on peut supposer $k(y) = k(x)$ où $x = f(y)$. Or C satisfait a) donc par un raisonnement antérieur $\hat{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \hat{O}_{Z,y}$ par l'homomorphisme défini par $Z \to X$. Mais on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \hat{O}_{Z,y} \arrow[d] \\ \hat{O}_{X,x} \arrow[ur] \arrow[r] & \hat{O}_{Y,y} \end{tikzcd}$$

donc $\hat{O}_{Y,y}$ est plat sur $\hat{O}_{Z,y}$. Comme $\hat{O}_{Z,y} \to \hat{O}_{Y,y}$ est local, il est fidèlement plat dont injectif, et on trouve $\hat{O}_{Z,y} = \hat{O}_{Y,y}$ parce que $\hat{O}_{Y,y}$ est un quotient de $\hat{O}_{Z,y}$. Ce qui prouve que $O_{Z,y} \to O_{Y,y}$ est injectif, donc $O_{Z,y} = O_{Y,y}$.

<u>Définition 1.2</u>

f est étale s'il satisfait aux conditions équivalentes a) - c) .

Remarques 1.3

1) c) est ponctuelle c'est-à-dire qu'on peut la formuler pour $y \in Y$, en demandant que f soit plat en y et $(\Omega^1_{Y/X})_y = 0$. Il en est de même avec b) en se bornant aux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} \overline{A} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \operatorname{Spec} \overline{A}' & \longrightarrow & X \end{array}$$

dont l'image dans Y de l'unique point de $\operatorname{Spec} \overline{A}$ est y. On peut donc définir la notion de morphisme étale en un point de Y, et être étale signifie alors de l'être dans tout point. Or a) est manifestement locale donc l'ensemble des points de Y où f est étale est un ouvert.

2) Soit $x = f(y)$ et $k(x) = k(y)$. On a vu alors que si f est étale en y alors le morphisme $O_x \to O_y$ donne un isomorphisme $\hat{O}_x \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$. On voit facilement en suivant la démonstration de c) $\Longrightarrow$ a) que la réciproque est aussi vraie.

3) On peut énoncer une proposition analogue pour les morphismes lisses en remplaçant a) - c) par

a) avec $f_1, \ldots, f_{n-r}$

b) sans unicité

c) avec $\Omega^1_{Y/X}$ localement libre.

Quelques propriétés des morphismes étales :

1) L'image de Y dans X est ouverte (vraie pour plat, SGA I, exp. IV).

2) f est une immersion ouverte $\Longleftrightarrow$ f est étale et aussi un monomorphisme i.e. $Y \times_X Y \overset{\sim}{\to} Y$ (vrai pour plat). C'est évident si f est une immersion ouverte. Réciproquement f est injectif et ouvert donc un homéomorphisme sur un ouvert puis $O_y \overset{\sim}{\to} O_y \otimes_{O_x} O_y$ pour tout $y \in Y$, $x = f(y)$ donc $O_x \overset{\sim}{\to} O_y$ parce que $O_x \to O_y$ c'est (fidèlement) plat.

3) Soit f étale, séparé et X connexe. Alors les X-sections de Y correspondent biunivoquement aux composantes connexes de Y isomorphes à X.

<u>Preuve</u> :

Toute section $s : X \to Y$ de f est étale, car on vérifie aussitôt b), compte tenu que $f_s = 1$. En plus, s est un monomorphisme, i.e. $X \times_Y X \overset{\sim}{\to} X$ donc s est une immersion ouverte par 2). D'autre part, si $Y \to Y \times_X Y$ est le morphisme de composantes 1 et sf on a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "\Delta"] \\ Y \arrow[r] & Y \times_X Y \end{tikzcd}$$

donc l'image de s est fermée, i.e. une composante annexe de Y.

4) Soit f étale. Les X-sections de f correspondent biunivoquement aux sous-schémas ouverts U de Y tels que f/U soit un isomorphisme.

Théorème 1.4

(Invariance topologique des morphismes étales). Soit $X_0 \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent. Alors le foncteur $X_0 \times_X \cdot$ donne une équivalence entre la catégorie des X-schémas étales et la catégorie des X_0-schémas étales :

$$(Et/X) \xrightarrow[\approx]{X_0 \times_X} (Et/X_0) \quad .$$

Démonstration

1) La flèche est pleinement fidèle car dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \times_X Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec $Z \to X$ étale, $Y \times_X Z \to Y$ est aussi étale. La correspondance associant à tout X-morphisme $g : Y \to Z$ son graphe Γ_g est bijective. Or les Γ_g i.e. les Y-sections de $Y \times_X Z$ correspondent biunivoquement aux sous-schémas ouverts de $Y \times_X Z$ isomorphes à Y .

2) Tout Y_0/X_0 étale est isomorphe à $Y \times_X X_0$ avec $Y \in (Et/X)$: c'est un problème local car on peut recoller compte tenu de 1). On conclut par la condition a).

Définition 1.5

Soit $x \in X$. On appelle voisinage étale de x un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "f"] \\ x = \operatorname{Spec} k(x) \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

avec f étale. Si $x' \in X'$ est le point défini par $x \hookrightarrow X'$ alors $x = f(x')$ et $k(x) = k(x')$ i.e. pas d'extension résiduelle donc $\hat{O}_x \overset{\sim}{\rightarrow} \hat{O}_{x'}$.

Si $(x',X') \to (x,X)$ et $(x'',X'') \to (x,X)$ sont deux voisinages étales de x, un morphisme $(x',X') \to (x'',X'')$ est donné par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (x',X') \arrow[rr] \arrow[dr] & & (x'',X'') \arrow[dl] \\ & (x,X) & \end{tikzcd}$$

<u>Proposition 1.6</u>

Les voisinages étales d'un point forment un système filtrant des schémas pointés.

<u>Démonstration</u>

1) Etant donné deux voisinages étales, il existe un troisième qui les domine

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] \arrow[drr] & & X' \times_X X'' \arrow[dl] \arrow[d] \\ & X' \arrow[d] & X'' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2) Soit $(x'',X'') \rightrightarrows (x',X')$ deux flèches. Il existe un voisinage étale (x''',X''') et un morphisme $(x''',X''') \to (x'',X'')$ qui les

égalisent. En effet, on peut remplacer X' par un voisinage affine de x' de sorte qu'il est licite de supposer que $X' \to X$ est séparé. De même, en remplaçant X'' par la composante connexe de x'' on peut supposer X'' connexe. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & X'' \times_X X' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[drr] & X'' \arrow[ur, bend left=60, "\Gamma_1"] \arrow[ur, bend left=20, "\Gamma_2"'] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

où Γ_1, Γ_2 sont les graphes des flèches données. Or ils correspondent à deux composantes connexes de $X'' \times_X X'$ avec un point en commun donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

<u>Définition 1.7</u>

On appelle <u>anneau local pour la topologie étale</u> l'anneau $\tilde{O}_{X,x} = \varinjlim_{(x',X')} O_{X,x'}$ quand (x',X') décrit les voisinages étales de x.

On a aussi $\tilde{O}_{X,x} = \varinjlim_{(x',X')} \Gamma(X',O_{X'})$ car les voisinages de Zariski sont des voisinages étales particuliers. C'est un anneau local car limite d'un système filtrant d'anneaux locaux et homomorphismes locaux. On a un homomorphisme canonique $O_{X,x} \to \tilde{O}_{X,x}$ qui est plat et induit un isomorphisme pour les compléter parce que chaque $O_{X,x} \to O_{X',x'}$ a cette propriété. On peut donc écrire $O_{X,x} \subset \tilde{O}_{X,x}$ car $O_{X,x} \to \tilde{O}_{X,x}$ est fidèlement plat ; de plus $\tilde{O}_{X,x}$ est noethérien (théorème de Nagata, [GT] , Note 3).

Si A est un anneau local on dit que A est henselien si pour le point fermé x de $X = \operatorname{Spec} A$ on a $\tilde{O}_{X,x} = O_{X,x}$.

Proposition 1.8

Soit A un anneau local $X = \operatorname{Spec} A$, $x \in X$ le point fermé. A est hensélien si et seulement si tout morphisme $f : Y \to X$ tel qu'il existe $y \in Y$ avec $x = f(y)$, $k(x) = k(y)$ et f étale en y admet une section.

Démonstration

La condition est évidemment suffisante. Supposons A hensélien. Par hypothèse f définit un isomorphisme $A = O_{X,x} \overset{\sim}{\to} O_{Y,y}$ car on peut supposer f étale (les points de Y où f est étale forment un ouvert de Y et on peut remplacer Y par celui-ci). La section est le composé de $X = \operatorname{Spec} A \overset{\sim}{\to} \operatorname{Spec} O_{Y,y}$ avec le morphisme canonique $\operatorname{Spec} O_{Y,y} \to Y$.

Une autre façon de caractériser les anneaux locaux henséliens A , donnée par a) est la suivante :

Si $f_1,\dots,f_n \in A[y_1,\dots,y_n]$ et si on a une solution $y^0 \in k = A/\underline{m}$ de $f(y^0) = 0$ telle que $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(y^0)) \not\equiv 0$ alors il existe une solution dans A qui induit y^0 .

Ou bien encore :

Si $f_1,\dots,f_r \in A[y_1,\dots,y_n]$, $r \leq n$ et si on a une solution $y^0 \in k$ de $f(y^0) = 0$ telle que le rang de $(\frac{\partial f}{\partial y}(y^0))$ soit r alors il existe une solution dans A qui induit y^0 . En d'autres termes, tout schéma lisse au-dessus de Spec A admet une section. Parce qu'on peut toujours ajouter des équations pour se ramener au critère précédent.

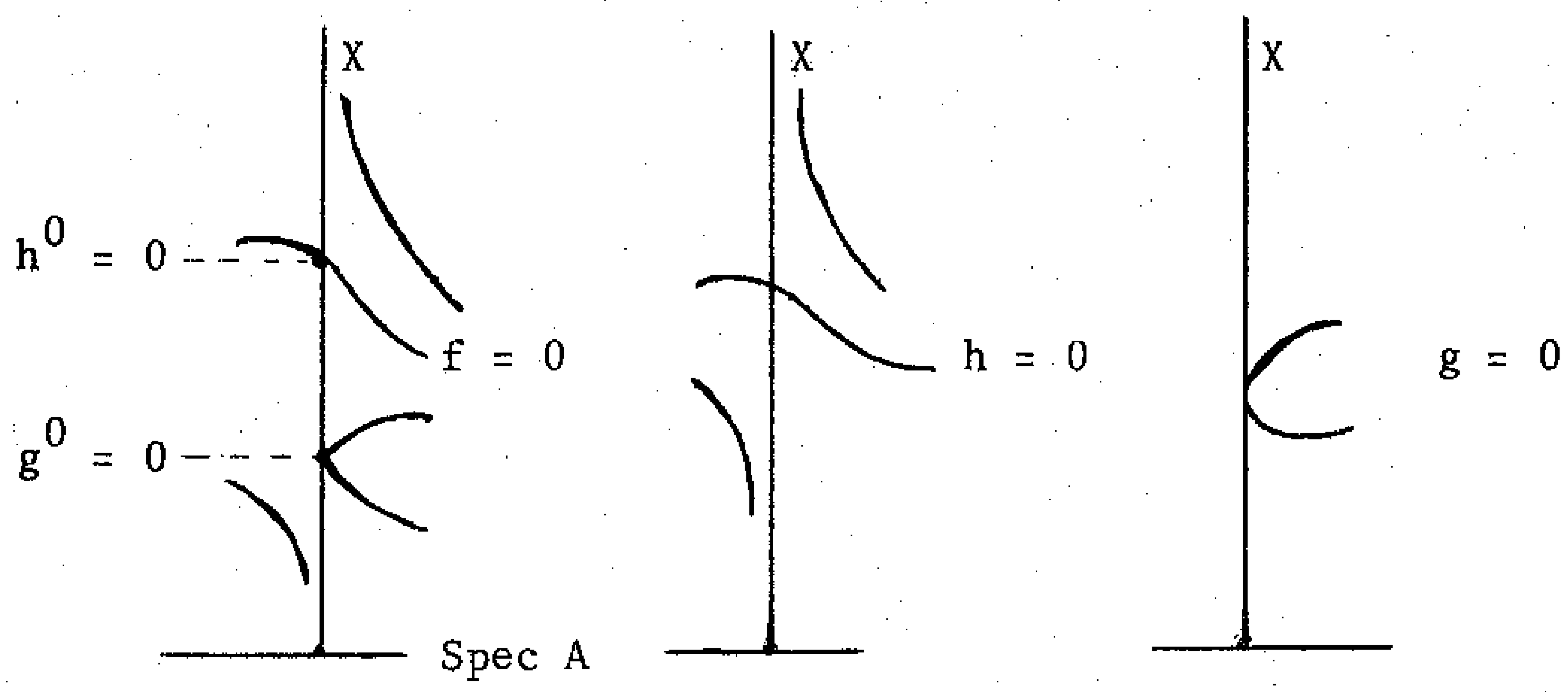
Note. Tout quotient d'un anneau local hensélien est aussi hensélien.

Le lemme de Hensel

Théorème 1.9

Un anneau local hensélien A satisfait à la condition suivante :

Soit $f \in A[X]$ et notons par 0 la réduction modulo $\underline{m}$. Supposons que $f^0(X) = g^0(X)\, h^0(X)$ avec g^0 unitaire et $(g^0, h^0) = 1$. Alors il existe $g, h \in A[X]$ qui induisent g^0, h^0 et tels que $f = gh$ avec g unitaire



Démonstration

Soit

$$f(x) = a_n X^n + \dots + a_0$$

$$g(x) = X^r + b_{r-1} X^{r-1} + \dots + b_0$$
$$h(x) = c_s X^s + \dots + C_0 \qquad\qquad r+s = n$$

avec des coefficients b_i, c_j indéterminés. On cherche une solution de

$$a_0 = b_0 c_0$$
$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$
$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1} = b_{r-1} c_s + 1\, c_{s-1}$$
$$a_n = 1.c_s$$

au-dessus de g^0, h^0. Soit $\Phi_0 = b_0c_0 - a_0$, $\Phi_1 = b_0c_1 + b_1c_0 - a_1$, $\dots$, $\phi_n = c_s - a_n$. On a $n+1$ équations $\phi_0 = 0$, $\dots$, $\phi_n = 0$ en $r+s+1 = n+1$ variables dont le jacobien est

$$\frac{\partial(\phi_0,\dots,\phi_n)}{\partial(b,c)} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} c_0 & & & & b_0 & & & \\ c_1 & c_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & c_s & c_{s-1} & & & 1 & b_{r-1} \\ & & & 0 & & & & 1 \end{array}\right| = \mathrm{Res}_X(g,h) \quad .$$

D'après la proposition précédente, il suffit de voir que $\mathrm{Res}_X(g^0,h^0) \neq 0$. Or, celui-ci s'annule si les degrés des polynômes g^0, h^0 sont inférieurs aux degrés donnés ce qui n'est pas le cas (car

g^0 unitaire) ou si g^0 et h^0 ont un facteur commun ce qui n'est pas possible parce que $(g^0, h^0) = 1$.

Généralisation :

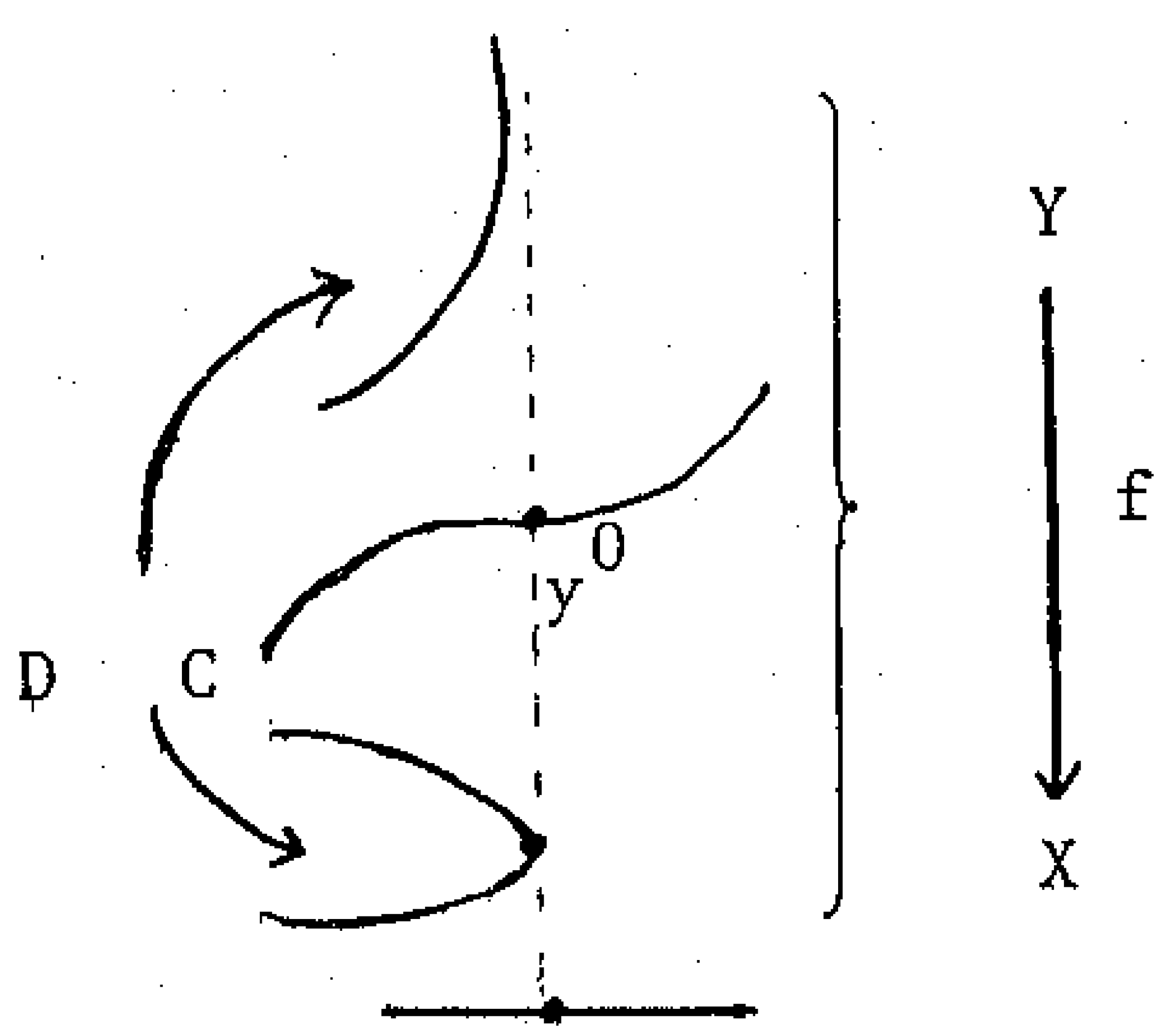
Théorème 1.10

Soit $f : Y \to X$ séparé de type fini et $X = \operatorname{Spec} A$ avec A local hensélien. Soit $Y_0 = Y \otimes_A k$ la fibre du point fermé de X et $y^0 \in Y^0$ un point isolé

$$Y^0 = C^0 \amalg D^0 \qquad C^0_{top} = \{y^0\} .$$

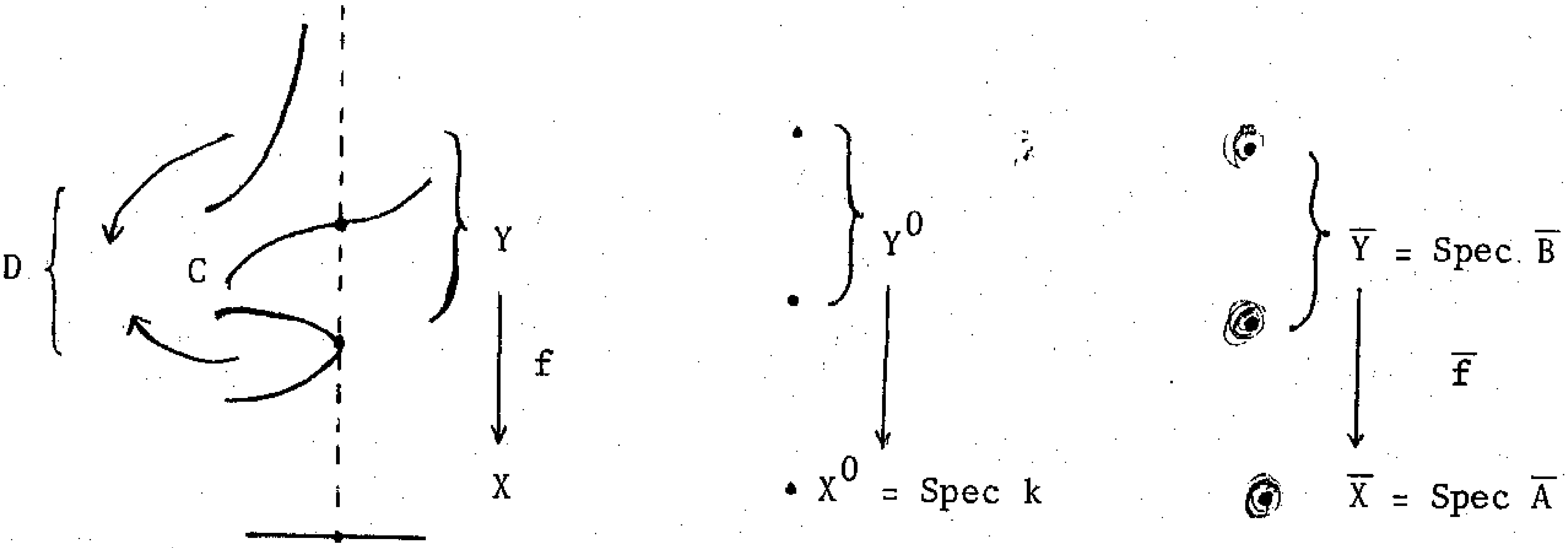
Il existe un splittage unique $Y = C \amalg D$ qui induit $Y^0 = C^0 \amalg D^0$ avec C/X fini.

Preuve. Supposons qu'on a un splittage $Y = C \amalg D$. Tout sous-schéma

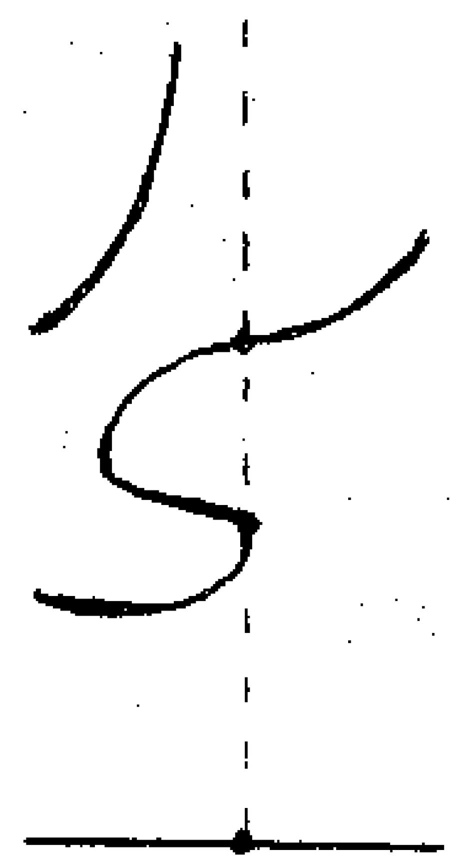


fermé Z de C contient y^0 car Z est fini sur X donc $f(Z)$ est fermé ce qui montre que le point fermé de X appartient à $f(Z)$. Or $Y^0 \cap C = \{y^0\}$ donc $y^0 \in Z$. On en déduit que tout fermé de C_{top} contient y^0 donc $C_{top} = \{y \in Y | y^0 \in \overline{\{y\}}\}$ en particulier C_{top} est connexe. Cela prouve que C_{top} est la composante connexe de y^0 dans Y . L'unicité du splittage découle maintenant du fait que deux composantes directes avec le même espace sous-jacent coïncident. On peut remplacer Y par un voisinage V de y^0 . En effet, si V splitte $V = C' \amalg D'$ avec C'/X fini alors $C' \to Y$ est une immersion ouverte qui est aussi finie car $C' \to X$ est fini. Donc C' est fermé dans Y

i.e. c'est une composante directe de Y . On peut donc supposer $Y = \operatorname{Spec} A[t_1,\dots,t_n]/I$. Il existe $f_1,\dots,f_n \in I$ tels que $\operatorname{Spec} k[t_1,\dots,t_n]/(f_1,\dots,f_n)\, k[t]$ ait y^0 comme point isolé car chaque équation d'un système d'équations tue une dimension si elle n'est pas nulle en vertu des équations précédentes. Soit $B = A[t]/(f_1,\dots,f_n)$. Alors Y est un sous-schéma fermé de $Y' = \operatorname{Spec} B$ et y^0 est encore isolé dans sa fibre par rapport à $Y' \to X$. Tout splittage $Y' = C' \coprod D'$ induit un splittage de Y . Donc on peut substituer Y' pour Y i.e. prendre $Y = \operatorname{Spec} A[t]/(f_1,\dots,f_n)$. A ce moment-là Y est intersection complète en y^0 donc f est plat en ce point (EGA IV, 11. 3.8). On peut donc se restreindre à un ouvert affine $\operatorname{Spec} B$ avec B plate sur A . Maintenant C s'il existe sera plat sur A . Comme A est local et C/A fini on en déduit $C = \operatorname{Spec} B_1$ avec B_1 libre sur A ([AL]) . On veut donc écrire $B = B_1 \times B_2$ avec B_1 fini et libre sur A de telle façon que par réduction modulo l'idéal maximal $\underline{m}$ de A on trouve justement $B^0 = B_1^0 \times B_2^0$ avec $C^0 = \operatorname{Spec} B_1^0$, $D^0 = \operatorname{Spec} B_2^0$. Il en résulte que B_1 doit être libre de rang $r = \dim_k B_1^0$ sur A . Si $\overline{A}$ est une A-algèbre artinienne finie, alors $\overline{B} = B \otimes_A \overline{A}$ splitte $\overline{B} = \overline{B}_1 \times \overline{B}_2$ avec $\overline{B}_1^0 = B_1^0 \otimes_k \overline{A}^0$, $\overline{B}_2^0 = B_2^0 \otimes_k \overline{A}^0$ car $\operatorname{Spec} \overline{B}$ et $\operatorname{Spec} \overline{B}^0$ ont le même espace sous-jacent et évidemment $\overline{B}^0 = \overline{B}_1^0 \times \overline{B}_2^0$. On peut figurer la situation comme suit :



dans le cas Spec $\overline{A}$ = point i.e. $\overline{A}$ locale et il faut démontrer qu'on n'a pas une situation comme cela



Considérons le problème suivant : donner

1) Une loi de A-algèbre (associative, commutative, unitaire) sur le module libre V de rang $r = \dim_k B_1^0$.

2) Un homomorphisme $B \to V$ de A-algèbres.

Or ce problème est résolu par les points à valeurs dans A d'un certain X-schéma Z qui exprime les conditions 1) et 2). En effet, une loi d'algèbre sur V est donnée par un A-homomorphisme $V \otimes_A V \to V$ ce qui revient, en choisissant une base de V , à prendre un point dans l'espace affine de dimension r^3 sur A . Les conditions imposées (associativité, commutativité, unité) sont polynomiales à coefficients dans A .

Un homomorphisme de A-algèbres $B \to V$ est donné par $t_i \to V_i \in V$ i.e. par nr quantités, les coordonnées des V_i assujetties aux équations $f_i(V) = 0$ qui reviennent à des équations à coefficients dans A dans les coordonnées de V_i. Donc toute solution du problème est un point à valeur dans A d'un schéma affine Z sur X, où Z est un sous-schéma fermé de l'espace affine E^{r^3+nr} sur A. On peut tensoriser ce problème par n'importe quelle A-algèbre A' et alors toute solution est un point de Z à valeur dans A'.

On a $B^0 \to B_1^0$ surjectif avec B_1^0 libre de rang r sur k i.e. $B_1^0 \xrightarrow{\sim} V \otimes_A k$, pour une base choisie dans B_1^0. Cela donne un point z^0 de Z à valeur dans k.

Lemme 1.11: Z est lisse sur X dans z^0.

En vertu de ce lemme, on peut trouver un point $z \in Z$ à valeur dans A qui induit z_0 (on a $k(z_0) = k$ et on applique (1.8) Ce point correspond à une solution du problème considéré i.e. on a $B \to B_1$ avec B_1 une A-algèbre libre de rang r, $B_1 \xrightarrow{\sim} V$, $B_1 \otimes_A k = B_1^0$ et

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\sim} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1^0 & \xrightarrow{\sim} & V \otimes_A k \end{array}$$

commutatif. $B \to B_1$ est surjectif par Nakayama donc définit une immersion fermée $\operatorname{Spec} B_1 \to \operatorname{Spec} B$.

Lemme 1.12: $\operatorname{Spec} B_1 \to \operatorname{Spec} B$ est étale.

On conclut que l'image de $\operatorname{Spec} B_1$ est ouverte donc $\operatorname{Spec} B$ splitte $\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} B_1 \coprod \operatorname{Spec} D$. Il reste seulement à démontrer les lemmes précédents.

Lemme 1.13

Soit D' un anneau local, $J \subset D'$ un idéal nilpotent, $D = D'/J$, C' une D'-algèbre plate et $C = C' \otimes_{D'} D$.

(1.13.1) Toute projection sur un facteur direct $C \to C_1$ peut être relevée en une projection $C' \to C'_1$ sur un facteur direct.

(1.13.2) Si C_1 est fini sur D alors C'_1 est fini sur D'. Ce sont des modules libres du même rang sur D, D' respectivement.

(1.13.3) Si E' est une D'-algèbre libre de rang fini et $C' \to E'$ un D'-morphisme se réduisant à une projection $C \to E = E' \otimes_{D'} D$ sur un facteur direct, alors $C' \to E'$ est une projection sur un facteur direct.

(1.13.4) Si dans les hypothèses de (1.13.1) on a un D'-homomorphisme $C' \to D'$ tel que le morphisme induit $C \to D$ se factorise en $C \to C_1 \to D$ alors $C' \to D'$ se factorise aussi en $C' \to C'_1 \to D'$.

Preuve. 1) J est nilpotent donc $\operatorname{Spec}(C')$ et $\operatorname{Spec}(C)$ ont le même espace sous-jacent.

2) $C'_1 = F + JC'_1$ avec F D'-module fini donc $C'_1 = F$ car

J est nilpotent. Comme C'_1 est plat sur D' qui est local C'_1 est libre de rang fini sur D' ; donc $C_1 = C'_1 \otimes_{D'} D$ est libre du même rang sur D .

3) Par 1) et 2) il existe un facteur direct C'_1 de C' au-dessus de E qui est libre sur D' de rang $r = \mathrm{rang}_D(E)$: $C' \to E'$ est surjectif parce que $C \to E$ est surjectif et J nilpotent. Donc $\mathrm{Spec}\, E'$ est un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(C')$. Or les espaces sous-jacents de $\mathrm{Spec}(E')$ et $\mathrm{Spec}(E)$ coïncident ce qui prouve que $\mathrm{Spec}\, E'$ est un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}\, C'_1$ i.e. $C' \to E'$ se factorise en $C' \to C'_1 \to E'$. Comme C'_1 , E' sont des D'-modules libres du même rang et $C'_1 \otimes_{D'} D \xrightarrow{\sim} E' \times_{D'} D$ il en résulte $C'_1 \xrightarrow{\sim} E'$ (le déterminant de $C'_1 \to E'$ est inversible dans D' car il l'est dans D).

4) Soit $C'_2 = \ker(C' \to C'_1)$. Par l'hypothèse C'_2 est transformée dans zéro par $C' \to D' \to D$. Donc l'image de C'_2 dans D' est contenue dans J . Or C'_2 est engendré par un idempotent et J est nilpotent donc l'image de C'_2 dans D' est nulle.

<u>Preuve de 1.11.</u>

Soit $0 \to \varepsilon \to \overline{A}' \to \overline{A} \to 0$ avec $\overline{A}'$ A-algèbre locale artinienne et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, \overline{A} & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, \overline{A}' & \longrightarrow & X \end{array}$$

commutatif, z_0 = l'image de $\mathrm{Spec}\, \overline{A}$. Le point $\mathrm{Spec}\, \overline{A} \to Z$ est donné par

1) un homomorphisme de A-algèbres $B \otimes_A \overline{A} \to \overline{B}$ se réduisant à $B^0 \otimes_k \overline{A}^0 \to B_1^0 \otimes_k \overline{A}^0$ modulo $\underline{m}$.

2) un isomorphisme de $\overline{A}$-modules $\overline{B} \xrightarrow{\sim} V \otimes_A \overline{A}$ (donc $\overline{B}$ est libre de rang r sur $\overline{A}$).

Comme B est plate sur A , $B \otimes_A \overline{A}$ est $\overline{A}$-plate et $B \otimes_A \overline{A}'$ $\overline{A}'$-plate. (1.13.3) appliquée à $C' = B \otimes_A \overline{A}$, $C = B^0 \otimes_k \overline{A}^0$, $C_1 = B_1^0 \otimes_k \overline{A}^0$, $D' = \overline{A}$, $J = \underline{m}\overline{A}$ prouve que $B \otimes_A \overline{A} \to \overline{B}$ c'est une projection sur un facteur direct. Maintenant on peut conclure par (1.13.1)-(1.13.2) avec $C' = B \otimes_A \overline{A}'$, $C = B \otimes_A \overline{A}$, $C_1 = \overline{B}$, $D' = \overline{A}'$, $D = \overline{A}$. En effet, on en déduit qu'il existe une projection sur un facteur direct $B \otimes_A \overline{A}' \to \overline{B}'$, avec $\overline{B}'$ libre sur $\overline{A}'$ de rang r , au-dessus de $B \otimes_A \overline{A} \to \overline{B}$. On peut relever $\overline{B} \xrightarrow{\sim} V \otimes_A \overline{A}$ en $\overline{B}' \xrightarrow{\sim} V \otimes_A \overline{A}'$ en relevant arbitrairement en $\overline{B}'$ une base de $\overline{B}$ sur $\overline{A}$. Cela donne un point $\operatorname{Spec} \overline{A}' \to Z$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \overline{A}' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

<u>Preuve de 1.12.</u>

Critère infinitésimal. Soit un diagramme commutatif des A-algèbres

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[d] \\ \overline{A}' \arrow[r] & \overline{A} \end{tikzcd}$$

avec $\overline{A}' \to \overline{A}$ surjectif et $\overline{A}'$ local artinien. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A \overline{A}' \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \otimes_A \overline{A}' \arrow[d] \\
B \otimes_A \overline{A} \arrow[r] & B_1 \otimes_A \overline{A}
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont au-dessus de $B^0 \otimes_A \overline{A}^0 \to B_1^0 \otimes_A \overline{A}^0$. Avec (1.13) on conclut que ce sont des projections sur des facteurs directs. Par hypothèse, on a un homomorphisme $B \to \overline{A}' \to \overline{A}$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & B_1 \arrow[dl] \\
& \overline{A} &
\end{tikzcd}$$

donc un homomorphisme $B \otimes_A \overline{A}' \to \overline{A}'$ dont le réduit $B \otimes_A \overline{A} \to \overline{A}$ (par $\otimes_{\overline{A}'} \overline{A}$) se factorise par $B \otimes_A \overline{A} \to B_1 \otimes_A \overline{A}$. En vertu de (1.13.4) $B \otimes_A \overline{A}' \to \overline{A}'$ se décompose dans $B \otimes_A \overline{A}' \to B_1 \otimes_A \overline{A} \to \overline{A}$. On trouve un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A \overline{A}' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & B_1 \otimes_A \overline{A}' \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& \overline{A}' \arrow[d] & \\
& \overline{A} & \\
B \otimes_A \overline{A} \arrow[rr] \arrow[ur] & & B_1 \otimes_A \overline{A} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

.

En composant $B_1 \otimes_A \bar{A}' \to \bar{A}'$ avec $B_1 \to B_1 \otimes_A \bar{A}'$ on trouve $B_1 \to \bar{A}'$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bar{A}' \arrow[r] & \bar{A} \end{tikzcd} .$$

L'unicité de $B_1 \to \bar{A}'$ est garantie par la surjectivité de $B \to B_1$.

<u>Remarques</u>

(1.14.1) On a $Y = C \quad D$ avec $C_{top} = (\mathrm{Spec}\ O_{Y,y_0})_{top}$ comme on a déjà vu au début de la démonstration. Donc $C = \mathrm{Spec}\ O_{Y,y_0}$.

(1.14.2) En particulier, soit $A \to O$ un morphisme local avec $\underline{m}O$ primaire pour l'idéal maximal de O et $O/\underline{m}O$ fini sur k . Si O est le localisé d'une A-algèbre de type fini B dans un idéal $\underline{p} \in \mathrm{Spec}\ B$ alors par (1.10) O est fini sur A et $B = O \times B'$. Cette condition est remplie dans chaque point du spectre maximal de B quand B est finie sur A . Donc <u>chaque algèbre finie sur</u> A <u>est produit de A-algèbres locales</u> (cf. [GT] pour une autre démonstration).

ANNEXE

NOTE 1

$k(y)$ est une extension de type fini de $k(x)$ et on va voir que c'est algébrique, même séparable. Autrement, il existerait une $k(x)$-dérivation non nulle $D : k(y) \to k(y)$ (N. Bourbaki, Algèbre, Chap. V, § 9, No 3, théorème 1). Il s'agit de montrer que cela contredit b).

Soit $\overline{A}' = k(y)[T]/(T^2)$. On a aussi $\overline{A}' = k(y)[[T]]/(T^2)$ donc $\overline{A}'$ est une $k(y)$-algèbre locale artinienne d'idéal maximal $M = T\overline{A} = Tk(y)$, et $\overline{A}'/M = k(y)$. Soit $\phi : k(y) \to \overline{A}'$ l'homomorphisme structural et $\psi : k(y) \to \overline{A}'$ défini par $\psi(\alpha) = \alpha + (D\alpha)T$; $\phi \neq \psi$ et ψ est un homomorphisme de $k(x)$-algèbres. On a les diagrammes commutatifs

$$
\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & k(x) \arrow[d] \\
O_y \arrow[r] & k(y)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
k(x) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A}' \arrow[d] \\
k(y) \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, shift left, "\phi"] \arrow[ur, shift right, "\psi"'] & \overline{A}'/M = k(y)
\end{tikzcd}
$$

d'où on déduit

$$
\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A}' \arrow[d] \\
O_y \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "\phi"] \arrow[ur, shift right, "\psi"'] & \overline{A}'/M
\end{tikzcd}
$$

avec $\phi \neq \psi$ contradictoire avec (b) . Soit $\underline{p} \in \operatorname{Spec} O_y$ et $\underline{m}_x O_y \subseteq \underline{p}$.

On peut répéter le raisonnement précédent pour $O_y/\underline{p}$ ce qui prouve que $\underline{p} = \underline{m}_y$. Donc y est isolé dans $f^{-1}(x)$.

NOTE 2

Soit $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $\theta \in k(y)$ et $\overline{f} \in k(x)[t]$ le polynôme minimal monic de θ si θ est algébrique sur $k(x)$ ou $\overline{f} = 0$ dans le cas contraire. On peut restreindre X à un voisinage affine convenable de x de sorte que $\overline{f}$ provient d'un $f \in A[t]$ monic. On a alors le diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[t]/f & \longrightarrow & B[t]/f \end{array}$$

avec $A[t]/f$ libre sur A donc plat. Soit $B[t]/f \to k(y)$ l'homomorphisme défini par $B \to k(y)$ et par l'homomorphisme $A[t]/f \to k(y)$ de A-algèbres qui envoie t dans θ . Soit $X' = \text{Spec } A[t]/f$, $Y' = \text{Spec } B[t]/f$ $x' \in X'$ et $y' \in Y'$ respectivement les points définis par $\ker(A[t]/f \to k(y$ et $\ker(B[t]/f \to k(y))$. On a que x' se trouve au-dessus de x , y' au-dessus de y' , $k(y) = k(y')$ et x' correspond à y' par $Y' \to X'$. En plus $\theta \in k(x')$. Comme f est de type fini, en continuant ainsi on arrive par changement plat de base à un morphisme $\overline{Y} \to \overline{X}$ tel qu'il existe $\overline{x}$ au-dessus de x , $\overline{y}$ au-dessus de y , $\overline{y} \to \overline{x}$ et $k(\overline{x}) = k(\overline{y})$. Dans notre cas, $k(y)$ étant extension finie séparable de $k(x)$ on peut prendre $\theta \in k(y)$ tel que $k(y) = k(x)[\theta]$ et alors $k(y') = k(x')$.

NOTE 3

Soit $A = O_{X,x}$. On a $A \subset \tilde{A}$ et $\tilde{A} = \varinjlim A'$ avec A' A-algèbre locale étale sur A . On a vu que $\hat{A} = \hat{A}'$ donc $\tilde{A} \subset \hat{A}$ et $\hat{A}$ est le complété de $\tilde{A}$. Soit $\underline{a}_1 \subseteq \underline{a}_2 \subseteq \dots \subseteq \underline{a}_n \subseteq \dots$ une suite d'idéaux de type fini de $\tilde{A}$. Il suffit de montrer que cette suite est stationnaire. La suite $\{\underline{a}_n \hat{A}\}$ est stationnaire car $\hat{A}$ est noethérien. A ce moment il suffit de montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont deux idéaux de type fini de $\tilde{A}$ alors $\underline{a}\hat{A} = \underline{b}\hat{A}$ implique $\underline{a} = \underline{b}$. Or, on peut trouver un A' comme ci-dessus tel que $\underline{a} = \underline{a}'\tilde{A}$, $\underline{b} = \underline{b}'\tilde{A}$ avec $\underline{a}'$, $\underline{b}'$ idéaux de A' car $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont de type fini. Alors $\underline{a}\hat{A} = \underline{b}\hat{A}$ s'écrit $\underline{a}'\hat{A}' = \underline{b}'\hat{A}'$ donc $\underline{a}' = \underline{b}'$.

NOTE 4

Considérons le diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} O_x & \longrightarrow & O_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{O}_x & \longrightarrow & \hat{O}_x \otimes_{O_x} O_y = I \end{array} .$$

I est un anneau de fractions de $\overline{B} = \hat{O}_x \otimes_A B$, $I = \overline{B} \otimes_B O_y$. On a $\underline{m}_x I = \underline{m}_y I$ car $\hat{O}_x \xrightarrow{\sim} \hat{O}_y$ implique $\underline{m}_x O_y = \underline{m}_y$. Donc $\hat{O}_x \to I$ définit un isomorphisme $\hat{O}_{x/\underline{m}_x^N} \hat{O}_x \xrightarrow{\sim} I/\underline{m}^N$ pour tout N naturel, avec $\underline{m} = \underline{m}_y I$. Il en résulte que $\underline{m}$ est maximal $(N = 1)$ et que le point de $\hat{Y}$ qui lui est associé correspond à y par $\hat{Y} \to Y$. Donc $O_{\hat{Y},y} = I_{\underline{m}}$. On observe que $\underline{m}_x I_{\underline{m}} = \underline{m}\, I_{\underline{m}}$ et que $I_{\underline{m}}$ est séparé car $\overline{B} = \hat{O}_x \otimes_A B$ est noethérien. D'autre part, l'homomorphisme canonique $I \to I_{\underline{m}}$ définit un isomorphisme $I/\underline{m}^N \xrightarrow{\sim} I_{\underline{m}}/\underline{m}^N I_{\underline{m}}$ pour tout N naturel, puisque $\underline{m}$ est maximal. Donc l'homomorphisme composé $\hat{O}_x \to I \to I_{\underline{m}}$ définit un isomorphisme pour les gradués $\underline{m}_x$-adiques respectifs. $\hat{O}_x$ étant complet et $I_{\underline{m}}$ séparé on en déduit que $\hat{O}_x \xrightarrow{\sim} I_{\underline{m}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & O_y \arrow[d] \\
\hat{O}_x \arrow[r, "\sim"] & I_{\underline{m}}
\end{tikzcd}$$

où $O_y \to I_{\underline{m}}$ est l'homomorphisme composé $O_y \to I \to I_{\underline{m}}$ donc l'homomorphisme $O_y \to O_{\hat{Y},y}$ correspondant à $\hat{Y} \to Y$. En passant aux complétés, on trouve le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
O_x \arrow[r] \arrow[d] & O_y \arrow[d] \\
\hat{O}_x \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "1"'] & \hat{O}_y \arrow[d] \\
\hat{O}_x \arrow[r, "\sim"] & I_{\underline{m}}
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que $I_{\underline{m}}$ est O_y-isomorphe à $\hat{O}_y$.

CHAPITRE II

LE THEOREME D'APPROXIMATION

Définition 2.1

Soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme de type fini. On appelle section formelle de f en x un morphisme $\hat{X} = \operatorname{Spec} \hat{O}_{X,x} \xrightarrow{\bar{S}} Y$ qui fait commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\bar{S}} & Y \\ & \searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & X & \end{array}$$

(où $\hat{X} \to X$ est défini par l'homomorphisme canonique $O_{X,x} \to \hat{O}_{X,x}$) .

On appelle section locale (pour la topologie étale) de f en x un morphisme $\tilde{S} : \tilde{X} = \operatorname{Spec} \tilde{O}_{X,x} \to Y$ qui fait commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{S}} & Y \\ & \searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & X & \end{array}$$

(avec $\tilde{X} \to X$ défini par $O_{X,x} \to \tilde{O}_{X,x}$) . On appelle section infinitésimale de f en x un morphisme $S_n : X_n = \operatorname{Spec}(O_{X,x}/\underline{m}_x^{n+1}) \to Y$ qui fait commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{S_n} & Y \\ & \searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & X & \end{array}$$

Pour toute section locale $\tilde{S}$ il existe un voisinage étale (x',X') de (x,X) et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{S}"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[ur, "S'"] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

avec $\tilde{X} \to X'$ défini par l'homomorphisme canonique $O_{X',x'} \to \tilde{O}_{X',x'} = \tilde{O}_{X,x}$. Cela résulte du fait que $\tilde{S}$ est donnée par une solution dans $\tilde{O}_{X,x}$ d'un système d'équations en un nombre fini d'indéterminés (f étant de type fini) et du fait que $\tilde{O}_{X,x}$ est la limite inductive des anneaux du type $O_{X'x'}$. On a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde{X} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \hat{X} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

définis respectivement par $O_{X,x} \subset \tilde{O}_{X,x} \subset \hat{O}_{X,x}$ et $O_{X,x}/\underline{m}^{n+1} = \hat{O}_{X,x}/\underline{m}^{n+1}\,\hat{O}_{X,x}$. Donc toute section formelle $\overline{S}$ définit une section infinitésimale $\overline{S}_n : X_n \to \hat{X} \overset{\overline{S}}{\to} Y$. Similairement, on a $\tilde{S}_n : X_n \to \tilde{X} \overset{\tilde{S}}{\to} Y$ pour toute section locale $\tilde{S}$. On dit que $\tilde{S}$ est congruente avec $\overline{S}$ modulo n et on écrit

$$\tilde{S} \equiv \overline{S} \pmod{n}$$

si les deux sections induites sur X_n sont égales, $\overline{S}_n = \tilde{S}_n$.

<u>Définition 2.2</u>

<u>Anneau de Dedekind excellent</u> : un anneau de Dedekind D

tel que si $\hat{D}$ est son complété en un point fermé arbitraire $\hat{K} = \mathrm{Frac}(\hat{D})$ est séparable sur $K = \mathrm{Frac}(D)$.

Théorème 2.3

Soit X de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind excellent. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Toute section formelle $\overline{S}$ de Y/X peut être rapprochée par des sections locales c'est-à-dire pour tout n il existe une section locale $\tilde{S}$ telle que

$$\tilde{S} \equiv \overline{S} \pmod{n} .$$

Note. Le théorème est faux pour des méchants anneaux de Dedekind.

Formulation élémentaire

Soit $X = \mathrm{Spec}\, A$, $\tilde{O}_{X,x} = \tilde{A}$, $\hat{O}_{X,x} = \hat{A}$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, $B = A[y_1,\ldots,y_n]/(f_1,\ldots,f_m)$. On peut toujours s'y réduire car se donner un point de y à valeur dans un anneau local se factorise à travers un ouvert affine. Le théorème s'écrit alors (cf.[Algebraic Approximation] (1.10)).

Théorème 2.4

Soit A une algèbre de type fini sur un corps ou un anneau de Dedekind excellent. Soit $\overline{y} = (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_N) \in \hat{A}^N$ une solution de $f(\overline{y}) = 0$ où $f = (f_1,\ldots,f_m)$ est un système de polynômes à coefficients dans A . Alors pour tout $c \in \mathbb{N}$ il existe $y = (y_1,\ldots,y_N) \in \tilde{A}$ telle que

$$y \equiv \overline{y} \mod m^{c+1}$$

et

$$f(y) = 0 .$$

On donnera la démonstration dans le

<u>Cas d'un corps de base</u>. Ecrivons $A = k[x_1,\ldots,x_n]/I$, $I = (g_1,\ldots,g_s)$. Alors donner une solution dans $\tilde{A}$ équivaut à donner des éléments $y \in \widetilde{k[x]}$ tels que

$$f(x,y) \equiv 0 \qquad (g_1,\ldots,g_s)$$

i.e. tels qu'il existe $z_{\nu_1},\ldots,z_{\nu_s} \in \widetilde{k[x]}$ avec

$$f_\nu(x,y) = \sum z_{\nu_i}\, g_i .$$

Or avec cela on est réduit au cas $A = k[x]$, $\widetilde{k[x]}$ = le henselisé de A dans un idéal premier $\underline{p}$ i.e. $\widetilde{k[x]} = \widetilde{A_{\underline{p}}}$. Par le lemme de normalisation ([AL] Ch.III, D), 2, Th.2), on peut se réduire au cas $\underline{p} = (x_1,\ldots,x_n)$ i.e. au cas où le point est à l'origine. Alors on a (cf. [On the Solutions of Analytic Equation] section 2).

<u>Théorème 2.5</u>

Soient $f_1,\ldots,f_m \in k[x,y]$ et $\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_N \in k[[x]]$ des séries formelles telles que $f(\overline{y}) = 0$. Soit $c \in N$. Alors il existe des éléments $\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N \in \widetilde{k[x]}$ tels que

$$f(\tilde{y}) = 0$$

et

$$\tilde{y} \equiv \overline{y} \mod (x)^c .$$

Démonstration

On a un homomorphisme

$$\phi : k[x,y] \to k[[x]]$$

défini par $$y \mapsto \bar{y} \ ,$$

et $f_1,\ldots,f_m \in \ker \phi$. On peut supposer $(f_1,\ldots,f_m) = \ker \phi$. Alors $A = k[x,y]/(f_1,\ldots,f_m)$ est un anneau d'intégrité dont le corps des fractions $K \subset K((x))$ est séparable sur $\mathbf{k}$. Par conséquent la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$$

est de rang $r = n+N-d$ où d est le degré de transcendance de K sur k , égal avec la dimension de Krull de A (Note 1). On peut donc supposer

$$\delta(x,\bar{y}) \neq 0$$

avec

$$\delta = \det(\partial f_i/\partial y_j)_{i,j=1,\ldots,r}$$

Lemme 2.6

Dans les hypothèses précédentes, il existe un nombre naturel M tel que

$$f_i(x,\tilde{y}) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,r$$

avec

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N) \in \widetilde{k[x]}^N \quad \text{et} \quad \tilde{y} \equiv \bar{y} \mod m^M$$

implique $f_i(x,\tilde{y}) = 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

Preuve. $I = (f_1,\dots,f_m)$ est un idéal premier minimal de $(f_1,\dots,f_r)$. En effet I contient un idéal premier minimal P de $(f_1,\dots,f_r)$. On a $\delta \notin P$ parce que $\delta \notin I$. Donc $\mathrm{tr.deg}_k(k[x,y]/P) \leq N+n-r$, parce que $\mathrm{tr.deg}_k(k[x,y]/P)$ est la dimension sur k de l'espace vectoriel des k-dérivations de celui-ci. C'est-à-dire la dimension de Krull de $k[x,y]/P$ est $\leq N+n-r = d$, ce qui prouve que la hauteur de $P \geq r = ht(I)$ i.e. $P = I$. Par conséquent, il existe $h \in k[x,y]$ et ρ tels que $h \notin I$ et $h\, I^{\rho} \subseteq (f_1,\dots,f_r)$. Alors $h(x,\overline{y}) \neq 0$ donc il existe un monom en $x_1,\dots,x_n$ qui a un coefficient différent de zéro dans $h(x,\overline{y})$. Si $\tilde{y} \equiv \overline{y}$ modulo $\underline{m}^M$ avec M suffisamment grand, ce monom aura le même coefficient dans $h(x,\tilde{y})$ donc $h(x,\tilde{y}) \neq 0$. Or $h(x,\tilde{y})\, f_i^{\rho}(x,\tilde{y}) = 0$, $1 \leq i \leq n$, ce qui prouve que $f_i(x,\tilde{y}) = 0$, $i = 1,\dots,m$.

On s'est réduit de cette façon au cas $m = r$ et $\delta(x,\overline{y}) \neq 0$ avec $\delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,m}$.

Lemme 2.7

Supposons 2.5. vrai pour $n-1$ variables x. Soit $g, f_i \in k[x,y]$ $(i = 1,\dots,m)$ et $\overline{y} = (\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_N) \in k[[x]]^N$ tel que

$$g(x,\overline{y}) \neq 0$$

et

$$g(x,\overline{y}) \mid f_i(x,\overline{y}) \quad \text{pour } i = 1,\dots,m .$$

Soit $c \in \mathbb{N}$. Il existe $\tilde{y} = (\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_N) \in \widetilde{k[x]}^N$ tel que

$$\tilde{y} \equiv \overline{y} \mod \underline{m}^c$$

et

$$g(x,\tilde{y}) \mid f_i(x,\tilde{y}) \qquad i = 1,\ldots,m$$

(cf. [A.E] lemma (2.9)).

On applique ce lemme avec $g(x,y) = \delta^2(x,y)$. On obtient ainsi $\tilde{y} = (\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N)$ avec $\tilde{y} \equiv \bar{y} \mod m^c$ et $\delta^2(x,\tilde{y}) \mid f_i(x,\tilde{y})$, $i = 1,\ldots,m$. On a $f_i(x,\tilde{y}) \equiv 0 \mod m^c$ parce que $f_i(x,\tilde{y}) \equiv f_i(x,\bar{y}) \mod m^c$ et $f_i(x,\bar{y}) = 0$. Donc

$$f_i(x,\tilde{y}) \equiv 0 \mod \delta^2(x,\tilde{y})\ m^{c'}$$

avec c' arbitrairement grand pourvu que c soit convenablement choisi. On conclut maintenant avec ([A.E] lemma (2.8)).

<u>Lemme 2.8</u>

Soit $f_1,\ldots,f_m \in k[x,y]$, $\delta = \det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})_{i,j=1,\ldots,m}$ et $\tilde{y} = (\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N) \in \widetilde{k[x]}^N$ tel que

$$f_i(x,\tilde{y}) \equiv 0 \mod \delta^2(x,\tilde{y})\ m^c$$

$i = 1,2,\ldots,m$. Alors il existe $y^0 = (y_1^0,\ldots,y_N^0) \in \widetilde{k[x]}^N$ tel que

$$\tilde{y} \equiv y^0 \mod \delta(x,y^0)\ m^c$$

et

$$f_i(x,y^0) = 0 \qquad i = 1,\ldots,m .$$

<u>Corollaire 2.9</u>

$\widetilde{k[x]}$ est la clôture algébrique de $k[x]$ dans $\bar{k}[[x]]$.

<u>Note</u>. Cela a été démontré dans des cas plus généraux par Nagata (Local Rings 44.3).

<u>Preuve</u>

Si (x',X') est un voisinage étale de (x,X) alors les éléments de $\widetilde{k[x]}$ sont algébriques sur $k[x]$ (Note 2). Réciproquement, soit $\bar{y} \in \bar{k}[[x]]$ une série formelle qui satisfait une équation $f(x,y) \in k[x,y]$. Alors, pour tout $c \in N$ il existe $y \in \widetilde{k[x]}$ tel que $f(x,\tilde{y}) = 0$ et $\tilde{y} \equiv \bar{y} \bmod m^c$. Mais une équation à une seule variable n'a qu'un nombre fini des solutions dans $\bar{k}[[x]]$. Donc $\bar{y} = \tilde{y}$ si c est assez grand.

Le théorème (2.4) s'applique pour obtenir un résultat similaire à (2.3) pour les foncteurs localement de présentation finie, dont (2.3) est en fait un cas particulier.

<u>Définition 2.10</u>

Soit A un anneau et F un foncteur $(A\text{-alg}) \to (\text{Ens})$. On dit que F est <u>localement de présentation finie</u> si pour tout système inductif filtrant de A-algèbres $\{B_i\}_{i \in I}$ on a

$$\varinjlim F(B_i) = F(\varinjlim B_i) .$$

<u>Exemples</u>

1) $F(B) = \{$classes d'isomorphisme des schémas de présentation finie sur $\operatorname{Spec} B\}$.

2) $F(B) = \{$classes d'isomorphisme de B-modules de présentation finie$\}$.

3) $F(B)$ = {classes d'isomorphisme des schémas qui sont :

- lisses
- étales
- finis
- quasi finis
- plats (non trivial)

sur Spec B} .

4) $F(B)$ = {classes d'isomorphisme de B-algèbres finies} .

Contre-exemple

$F(B) = \varprojlim B/I^n B = \hat{B}$ avec $I \subset A$ un idéal donné. Soit $B = A[Y]/M^2$ avec $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots)$ et M l'idéal engendré par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$. Soit $I \neq (0)$. On a $B = \varinjlim B_i$ avec $B_i = A[Y_1, \ldots, Y_i]/(Y_1, \ldots, Y_i)^2 = A \oplus AY_1 \oplus \ldots \oplus AY_i$ (comme A-module). Donc $\hat{B}_i = \hat{A}[Y_1, \ldots, Y_i]/(Y_1, \ldots, Y_i)^2$, d'où $\varinjlim \hat{B}_i = \hat{A}[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots]/M^2$. Or $\hat{B} \neq \hat{A}[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots]/M^2$ car si $a \in I$, $a \neq 0$, $aY_1 + a^2Y_2 + a^3Y_3 + \ldots = z \notin \hat{A}[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots]/M^2$.

Soit B une A-algèbre et $\xi \in F(B)$ avec $F : (A\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$ localement de présentation finie. On peut écrire $B = \varinjlim_{\alpha} B_\alpha$ avec B_α de présentation finie sur A . Comme F est localement de présentation finie ξ est donné par un $\xi_0 \in F(B_0)$ i.e.

$$\xi = F(\phi)(\xi_0)$$

avec ϕ le morphisme $B_0 \to B$. En d'autres paroles on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(B,\cdot) \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ & F \\ \mathrm{Hom}_A(B_0,\cdot) \arrow[ur, "\xi_0"'] & \end{tikzcd} .$$

Or $B_0 = A[y_1,\ldots,y_N]/(f_1,\ldots,f_n)$ donc $\phi : B_0 \to B$ est donné par une solution dans B de

$$f(y) = 0 \qquad\qquad f = (f_1,\ldots,f_n) \ , \ y = (y_1,\ldots,y_N) \ .$$

Donc pour tout B et tout $\xi \in F(B)$ il existe

1) un système de polynômes $f(Y) \in A[Y]$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_N)$;

2) une solution $y \in B^N$ de $f(Y) = 0$;

3) une règle fonctorielle qui, à chaque solution de $f(Y) = 0$ dans une A-algèbre C associe un élément de $F(C)$ telle que cette règle appliquée à la solution 2) donne ξ .

Corollaire 2.11

Soient A, $\tilde{A}$, $\hat{A}$ comme dans (2.4) et F : (A-alg) $\to$ (Ens) un foncteur localement de présentation finie. Soit $\bar{\xi} \in F(\hat{A})$ et $m \in N$. Il existe un élément $\xi \in F(\tilde{A})$ tel que $\xi \equiv \bar{\xi}$ (mod m^n) i.e. ξ et $\bar{\xi}$ ont la même image dans $F(\hat{A}/m^n) = F(\tilde{A}/m^n)$.

Preuve. D'après les considérations précédentes $\bar{\xi}$ est donné par une solution $\bar{y}$ dans $\hat{A}$ d'un système $f(Y) = 0$. Or ((2.4)) on peut trouver une solution y dans $\tilde{A}$ telle que $y \equiv \bar{y}$ mod m^n . Alors y donne un élément $\xi \in F(\tilde{A})$ tel que $\xi \equiv \bar{\xi}$ mod m^n .

Applications

(2.12) Soit $\overline{M}$ un $\hat{A}$-module de type fini qui est localement libre de rang n en dehors du point fermé de Spec $\hat{A}$. Il existe un $\tilde{A}$-module de type fini M' localement libre de rang n en dehors du point fermé de Spec $\tilde{A}$ tel que

$\underline{m}/\underline{m}^c\ \overline{M} \approx M'/\underline{m}^c\ M'$ ($\underline{m} \subset A$ l'idéal premier du point $x \in$ Spec A tel que $\tilde{A} = \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\hat{A} = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$)

Preuve. Soit $F(B) = \{$classes d'isomorphismes des B-modules de présentation finie qui sont localement libres de rang n en Spec $B \setminus$ Spec$(B/\underline{m}\ B)\}$. F est localement de présentation finie. En effet soit M un B-module tel qu'on a une suite exacte

$$B^{(r)} \to B^{(s)} \to M \to 0 .$$

Alors $B^{(r)} \to B^{(s)}$ est défini par une matrice. Soit $B = \lim B_i$ où B_i est noethérien. Alors les éléments de cette matrice proviennent d'un B_i donc $M \approx M_i \otimes_{B_i} B$ avec $M_i = \text{coker}(B_i^{(r)} \to B_i^{(s)})$. On prend $M_j = M_i \otimes_{B_i} B_j$ pour tout B_i-algèbre B_j du système inductif. On a $M \approx \varinjlim M_j$ parce que $M_i \otimes_{B_i} *$ commute avec les limites inductives. Soit $f \in B$ tel qu'il existe un isomorphisme $B_f^{(n)} \overset{\phi}{\to} M_f$. On peut supposer ϕ provenant d'un homomorphisme $\psi : B_i^{(n)} \to M_i$ i.e. $\psi \otimes_{B_i} B_f = \phi$. On a alors une suite exacte

$$0 \to \text{Ker}\ \psi \to B_i^{(n)} \to M_i \to \text{coker}\ \psi \to 0$$

donc $(\ker \psi) \otimes_{B_i} B_f = (\text{coker}\ \psi) \otimes_{B_i} B_f = 0$. Alors $\ker \psi$ et $\text{coker}\ \psi$

sont de type fini, ce qui implique l'existence d'un B_j tel que f provient de $f_j \in B_j$ et $(\ker \psi) \otimes_{B_i} (B_j)_{f_j} = 0$ $(\operatorname{coker} \psi) \otimes_{B_i} (B_j)_{f_j} = 0$ i.e. $(B_j)^{(n)}_{f_j} \xrightarrow{\sim} (M_j)_{f_j}$.

Maintenant si M est localement libre en tout point de $(\operatorname{Spec} B)-(\operatorname{Spec} B/\underline{m}\, B)$ on peut trouver $f_1,\ldots,f_t \in \underline{m}\, B$ tels que $\operatorname{Spec} B - \operatorname{Spec} B/\underline{m}\, B = \bigcup_{i=1}^{t} D(f_i)$, $D(f_i) = \operatorname{Spec} B_{f_i}$ et M_{f_i} soit libre de rang n sur B_{f_i} $(1 \leq i \leq t)$. Cela implique le fait que $I = \sum_1^t f_i\, B \subset \underline{m}\, B$ et que les deux idéaux ont le même radical i.e. $m^h\, B \subset I$ avec $h \in N$ convenable. Toutes ces conditions se descendent dans un B_j . Donc F est localement de présentation finie. Il s'ensuit que (2.12) est une conséquence de (2.11).

<u>Théorème</u> (Hironaka)

Soit $\overline{M}$ un $\hat{A}$-module de type fini qui est localement libre de rang n en dehors du point fermé de Spec $\hat{A}$. Il existe $c \in N$ tel que pour tout module $\overline{M}'$ de type fini sur $\hat{A}$, localement libre de rang n en dehors du point fermé, $\overline{M}/m^c\, \overline{M} \approx \overline{M}'/m^c\, \overline{M}'$ implique $\overline{M} \approx \overline{M}'$.

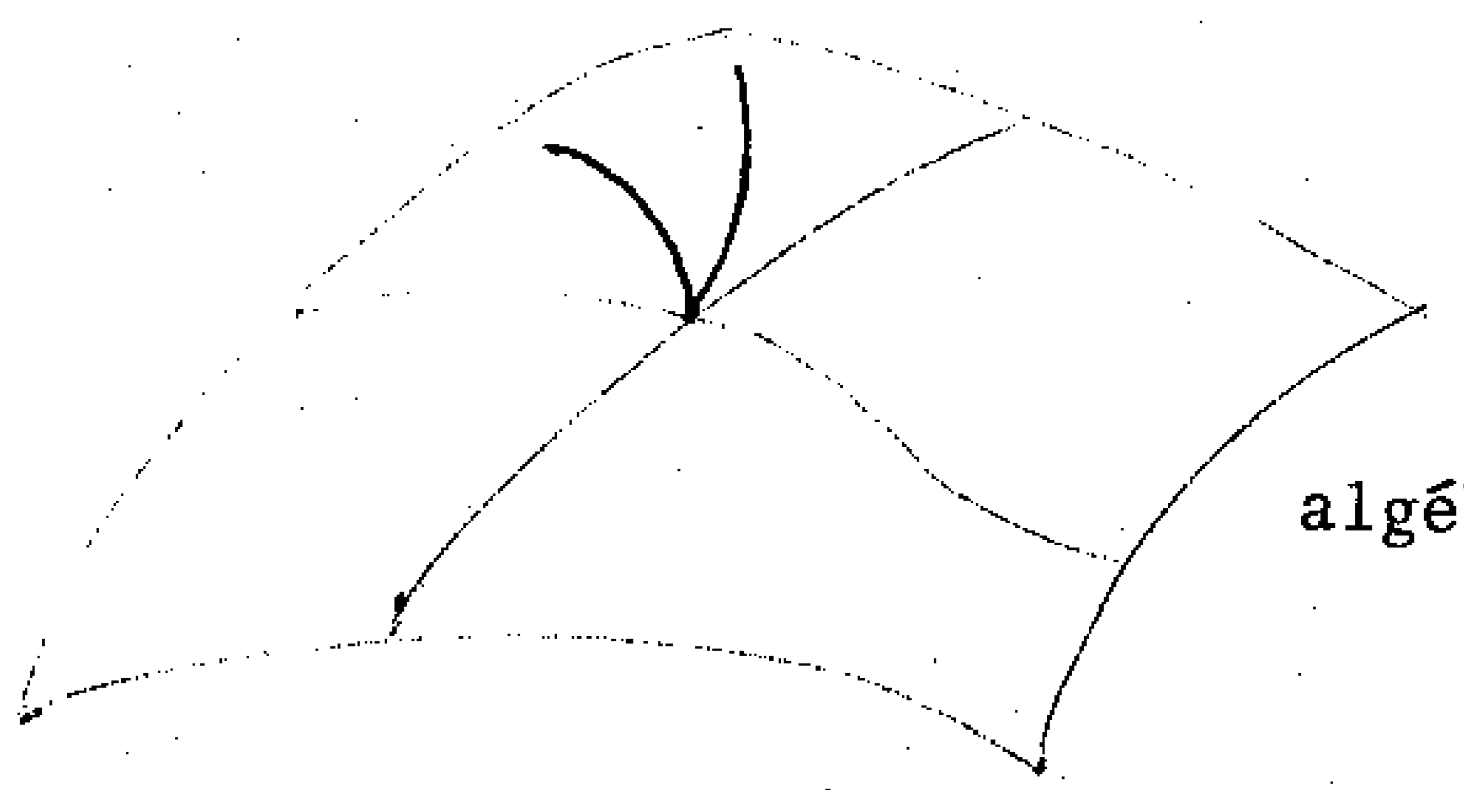
<u>Corollaire</u>

Dans les hypothèses de (2.12) $\overline{M}$ est algébrisable, i.e. il existe un module M' sur $\tilde{A}$ localement libre de rang n en dehors du point fermé et tel que $\hat{M}' \xrightarrow{\sim} M$.

(2.13). <u>Singularités isolées</u>. Soit k un corps et $\overline{X} = \operatorname{Spec} k[[x_1,\ldots,x_n]]/\underline{a}$ une singularité isolée irréductible de dimension d c'est-à-dire que si $\underline{a} = (f_1,\dots,f_N)$ les sous-déterminantes de degré $n-d$ de $(\partial f_i/\partial x_j)$ et $f_1,\dots,f_N$ engendrent un idéal I primaire pour l'idéal maximal de $k[[x_1,\dots,x_n]]$. Dans ces conditions, il existe une singularité isolée algébrique de dimension d, $X' = \operatorname{Spec} \widetilde{k[x]}/\underline{a}'$ telle que

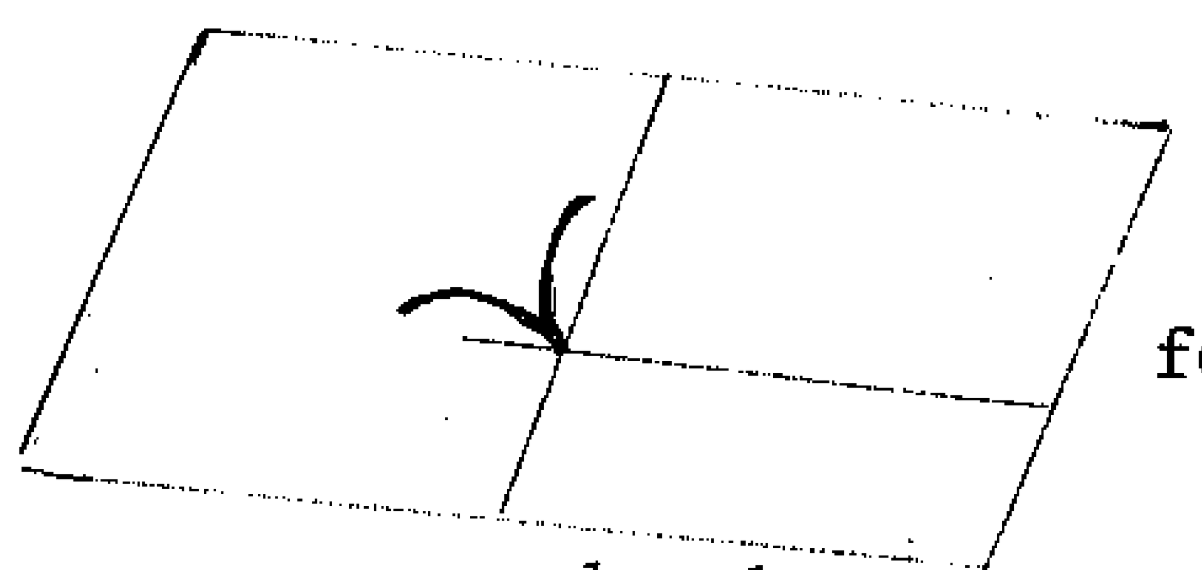
$$\overline{X} \equiv X' \bmod (x)^c$$

i.e. $\underline{a} + (x)^c = \underline{a}' + (x)^c$. Naturellement on peut descendre à un voisinage étale.



algébrique

recouvrement étale



formel

le plan

Preuve. Si $y_1,\dots,y_d \in k[x_1,\dots,x_n]$ est un système de paramètres de $\hat{A} = k[[x_1,\dots,x_n]]/\underline{a}$ alors $k[[y_1,\dots,y_d]] \subseteq \hat{A}$ et $\hat{A}$ est fini sur $k[[y_1,\dots,y_d]]$: $\hat{A}$ est séparé, $k[[y]]$ est complet et $\hat{A}/(y)\hat{A}$ fini sur k ([AL], II, A), 4, Cor.1). Si $\underline{p} \in \operatorname{Spec} k[[y_1,\dots,y_d]]$ est $S = k[[y]]-\underline{p}$ alors $\hat{A}_S$ est fini sur $(k[[y]])_{\underline{p}}$. Si $\underline{p} \neq (0)$, par hypothèse, $\hat{A}_S$ est régulier donc (à fortiori) c'est un anneau de Cohen-Macaulay.

D'après ([AL], chap. IV, Prop. 22) $\hat{A}_S$ est un module libre sur $k[[y]]_{\mathfrak{p}}$. Donc $\hat{A}$ est localement libre en dehors du point fermé de $\operatorname{Spec} k[[y]]$. Comme $\operatorname{Spec} k[[y]]$ est irréductible le rang de $\hat{A}$ dans tous les points de $\operatorname{Spec} k[[y]] \setminus \{$le point fermé$\}$ est le même, soit r. Soit

$$F : (k[y]\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$$

défini par

$F(B) = \{$classes d'isomorphismes de $B \otimes_{k[y]} k[x]$-algèbres finies sur B, localement libres de rang r sur $\operatorname{Spec} B$ en dehors de $V((y)B) = \operatorname{Spec}(B/(y)B)\}$. F est localement de présentation finie et $\hat{A}$ correspond à un élément de $F(k[[y]])$. D'après (2.11) il existe une $\widetilde{k[y]} \otimes_{k[y]} k[x]$-algèbre A' finie sur $\widetilde{k[y]}$, localement libre de rang r en dehors du point fermé de Spec k y et telle que

$$A'/(y)^c A' \approx \hat{A}/(y)^c \hat{A} .$$

Or A' étant finie sur $\widetilde{k[y]}$, c'est un anneau semi-local dont $(y)A'$ est un idéal de définition i.e. dont les idéaux maximaux de A' sont justement les idéaux premiers qui contiennent $(y)A'$. Donc l'isomorphisme précédent montre que A' est local. Il s'ensuit aussi que A' est hensélien, étant fini sur $\widetilde{k[y]}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & k[x] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A'/(y)^c A' \arrow[rr] & & \hat{A}/(y)^c \hat{A} \end{tikzcd} ,$$

ce qui montre que l'homomorphisme $k[x] \to A'$ défini par la structure de $\widetilde{k[y]} \otimes_{k[y]} k[x]$-algèbre de A, envoie $x_1, \ldots, x_n$ dans l'idéal maximal de A' donc s'étend uniquement à $\widetilde{k[x]} \to A'$ de sorte que

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{k[x]} \arrow[d] \\ \widetilde{k[y]} \arrow[ur] \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

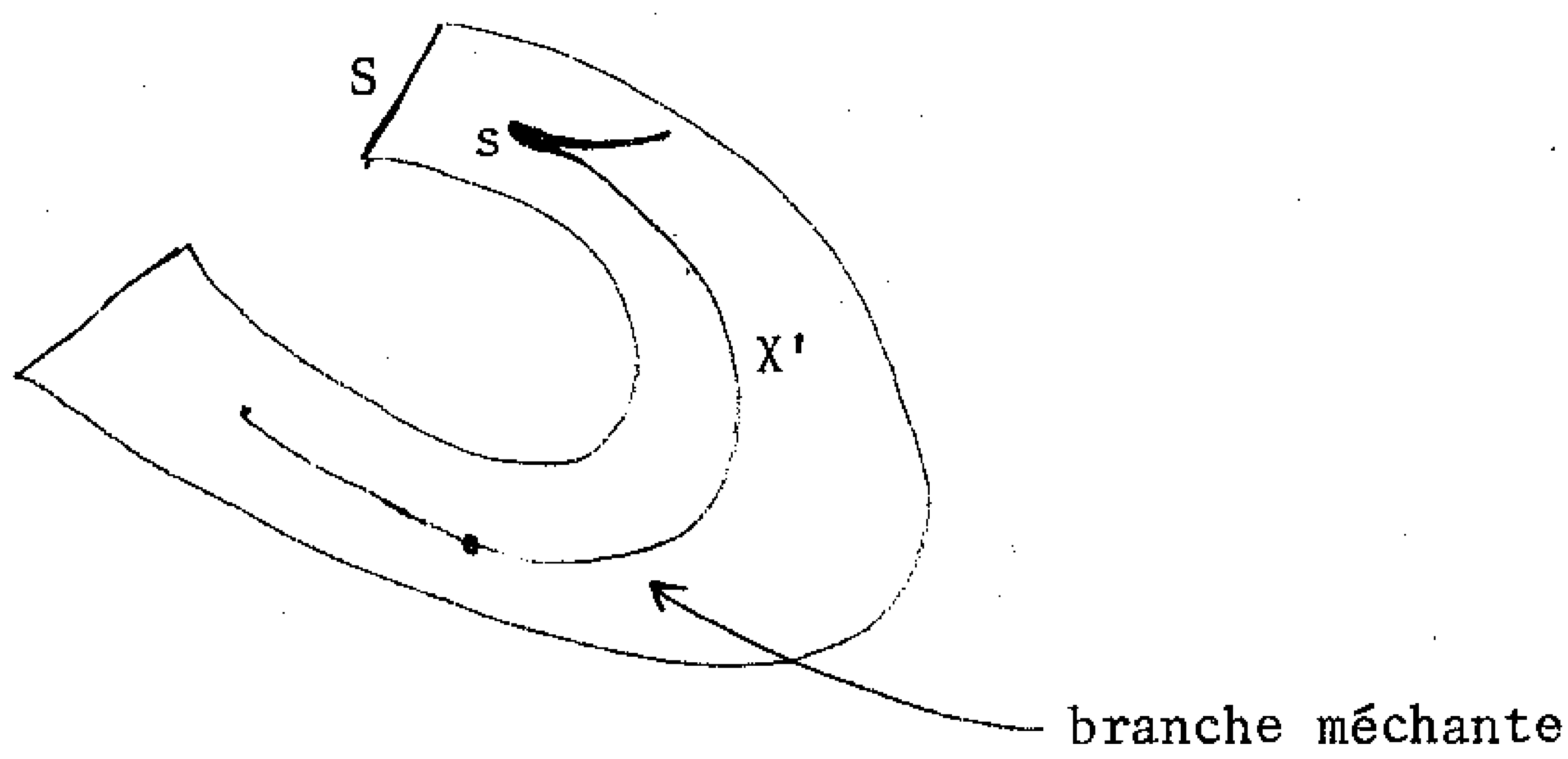
commute. On en déduit que A' est fini sur $\widetilde{k[x]}$. A ce moment-là, l'isomorphisme $A'/(y)^c A' \approx \hat{A}/(y)^c \hat{A}$ montre que l'application $\widetilde{k[x]} \to A'$ est surjective, par Nakayama. Donc $A' = \widetilde{k[x]}/\underline{a}'$ avec $\underline{a}' = \ker(\widetilde{k[x]} \to A')$. Montrons que l'image inverse $\underline{q}$ dans $\widetilde{k[y]}$ d'un idéal premier minimal $\underline{p}$ de A' est réduite à zéro. En effet A' est localement libre sur Spec $\widetilde{k[y]}$ en dehors du point fermé ce qui implique d'abord $\dim A' > 0$ donc $\underline{q} \neq (y)\widetilde{k[y]}$. Localisant en $\underline{q}$, l'homomorphisme

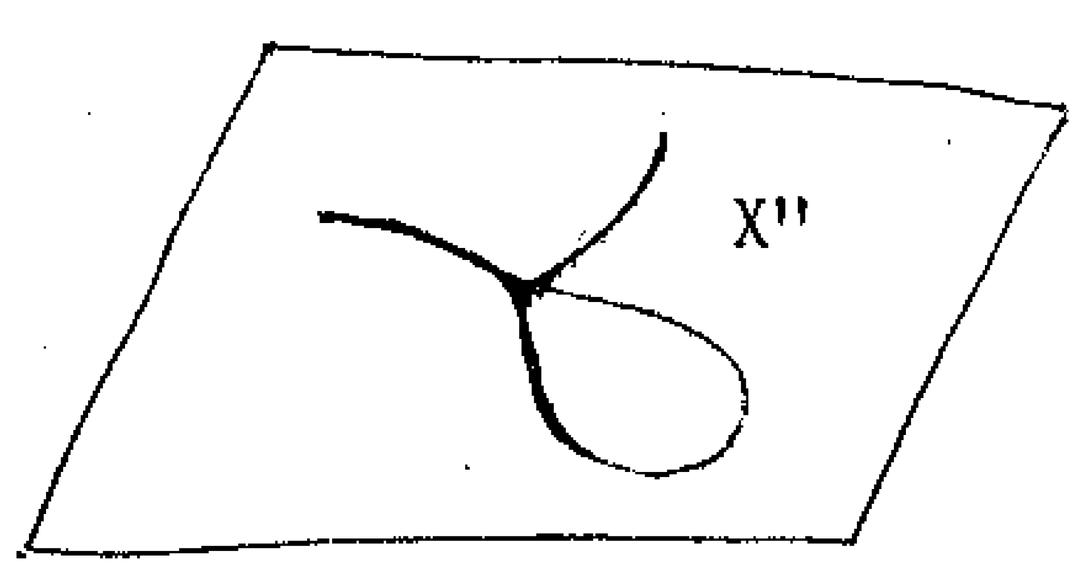
$$(\widetilde{k[y]})_{\underline{q}} \to A'_{\underline{q}}$$

ne transforme aucun élément différent de zéro $\widetilde{k[y]}_{\underline{q}}$ dans zéro, A'_q étant libre sur $\widetilde{k[y]}_{\underline{q}}$. Or $\underline{p}\,A'_{\underline{q}}$ est entièrement formé par des diviseurs de zéro donc $\underline{q}\,\widetilde{k[y]}_{\underline{q}} = (0)$ i.e. $\underline{q} = (0)$. Avec Cohen-Seidenberg on en déduit que $\underline{p}$ est de cohauteur d i.e. tout idéal premier minimal de A' est de cohauteur égal à d. Maintenant on peut voir que A' est non singulier en dehors du point fermé, pourvu que c soit assez grand. En effet, en vertu de la remarque précédente, tout idéal premier minimal associé à $\underline{a}'$ est de hauteur $n-d$. Pour démontrer que A' est non singulier en dehors de l'origine il suffit donc de prendre soin qu'il existe un système $f'_1,\ldots,f'_N$ des générateurs de $\underline{a}'$ tels que l'idéal I' engendré dans $\hat{A}$ par $f'_1,\ldots,f'_N$ et les mineurs d'ordre $n-d$ de $(\partial f'_i/\partial x_j)$ soit $\underline{m}$-primaire. Or f'_i peut être pris très proche de f_i parce que $\underline{a} + \underline{m}^c = \underline{a}' + \underline{m}^c$. Cela entraîne que I' sera très proche de I . D'autre part, si $I \supset \underline{m}^r$ et $I \equiv I' \pmod{\underline{m}^{r+1}}$ alors $I' \supset \underline{m}^r$. En effet $I' + \underline{m}^{r+1} = I + \underline{m}^{r+1} = I \supset \underline{m}^r$ donc $I' + \underline{m}^{r+1} \supset \underline{m}^r$ ce qui montre que I' contient $\underline{m}^r \setminus \underline{m}^{r+1}$ donc $I' \supset \underline{m}^r$.

Remarque 2.14

La démonstration montre qu'il existe un schéma S étale sur $\operatorname{Spec} k[x]$, qui contient un point $s \in S$ sans extension résiduelle au-dessus de l'origine, et un sous-schéma fermé $X' \subset S$ tel que $s \in X'$ et $X' \equiv \overline{X} \pmod{(x)^c}$ avec $\overline{X} = \operatorname{Spec} \hat{A}$. En fait, on peut voir qu'il existe un sous-schéma fermé $X'' \subset \operatorname{Spec} k[x]$ tel que $X'' \equiv \overline{X} \pmod{(x)^c}$. L'idée est de prendre pour X'' l'image de X' dans $\operatorname{Spec}[x]$. Malheureusement cette image peut être méchante à cause des "branches" se projetant dans l'origine





Par conséquent, on doit perturber la projection un petit peu pour déplacer ces branches. On a une immersion ouverte $S \subset \overline{S}$ avec $\overline{S}$ fini sur $k[x]$ car S est étale sur $\operatorname{Spec} k[x]$. Soit $\overline{X'}$ la clôture de X' dans $\overline{S}$. Alors X' est un ouvert de $\overline{X'}$. On a $\overline{X'} = \operatorname{Spec} C$ avec C une $k[x]$-algèbre finie. Donc tous les idéaux premiers associés à $(x)C$ sont maximaux. L'idéal $\underline{p}$ de s se trouve parmi eux, d'où $(x)C = I \cap J$ avec I $\underline{p}$-primaire est $I + J = C$. Donc pour tout ρ naturel il existe $z \in I^{\rho}$ et $t \in J$ tels que $z + t = 1$. On remplace l'image z_i de x_i dans C par $z_i' = z_i + z$. Soit $f : \overline{X'} \to \operatorname{Spec} k[x]$ défini par le k-homomorphisme $k[x] \to C$ qui transforme x_i dans z_i'. On voit aisément que $(z')C$ est $\underline{p}$-primaire, ce qui prouve que s est le seul point de $\overline{X'}$ situé au-dessus de l'origine par f. D'autre part $z_i \equiv z_i' \bmod I^{\rho}$ garantit que pour $\rho > c$ l'homomorphisme $k[[x]] \to O_{X',s}/\underline{m}^c$ qui transforme x_i dans la classe de z_i coïncide avec celui transformant x_i dans la classe de z_i'. Donc la condition $X' \equiv \overline{X} \bmod (x)^c$ se préserve pour f.

<u>Théorème</u> (Hironaka)

Etant donné $\hat{A}$ comme ci-dessus, il existe $c \in N$ tel que chaque anneau $\hat{A}'$ quotient de $k[[x]]$ qui est de dimension $\geq d$ et satisfait à $\hat{A} \approx \hat{A}'$ modulo $(x)^c$ soit isomorphe à $\hat{A}$.

Avec ce théorème, et (2.13) on conclut que

<u>Corollaire 2.15</u>

Toute singularité isolée irréductible est algébrisable.

ANNEXE

NOTE 1

$A = k[x,z]$, $z = (z_1,\dots,z_N)$, $z_i \in A$ l'image de y_i $(i = 1,\dots,N)$. Donc A est une algèbre intègre de type fini sur k . Il en résulte que la dimension de Krull de A coïncide avec $d = \text{tr degr}_k A = \text{tr degr}_k K$ ([AL] , III, D), 3, Prop. 14). D'autre part, soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel sur K des k-dérivations de K (dans K) . Alors d est la dimension $\mathcal{D}$ (N. Bourbaki, Algèbre, chap.5, §9, No 3, Th.2). Si $D \in \mathcal{D}$ alors

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,z)\, Dy_j = 0 \ .$$

Soit $r = \text{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,z)\right)$. On a alors $N-r$ solutions linéairement indépendantes $(Dy_1,\dots,Dy_N)$ du système linéaire homogène précédent. Toute dérivation $D \in \mathcal{D}$ est déterminée par les valeurs $Dx_1,\dots,Dx_N$, $Dy_1,\dots,Dy_N$ assujetties uniquement à $(*)$ (Bourbaki, Algèbre, Chap. 5, §9, No 1, Prop. 3). Donc $d = n+N-r$ i.e. $r = n+N-d$.

NOTE 2

Soit $f : X' \to X$ étale dans x' et $f(x') = x$ et $O_{X,x}$ intègre. Alors f est étale dans un voisinage V de x . Or $\text{Spec}\, O_{X,x} \subset V$ donc f est étale dans le point générique y de $\text{Spec}\, O_{X,x}$. Soit $F = O_{X,y}$. Alors $F = \text{Frac}(O_{X,x}) = (O_{X,x})_S$, $S = O_{X,x}-\{0\}$ et $F \to (O_{X',x'})$ est étale. Donc $F \to F'$ est quasi fini (Ch. I). Comme F'/F est de type fini, F'/F est finie. Cela montre que chaque élément de $O_{X',x'}$ satisfait une équation à coefficients dans F . En chassant les dénominateurs on en déduit qu'il est algébrique sur $O_{X,x}$.

CHAPITRE III
LE THEOREME D'ALGEBRISATION

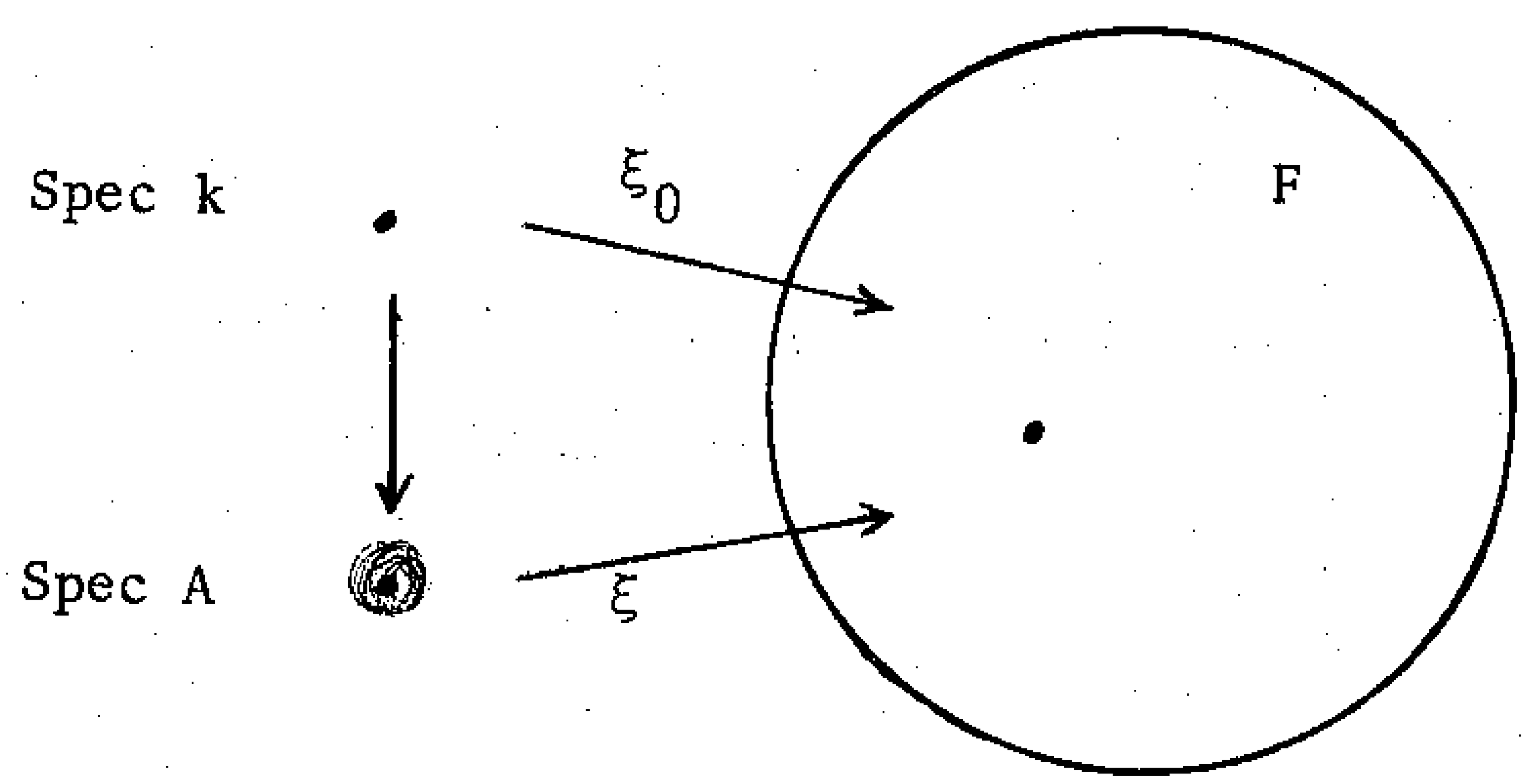
Soit k un corps algébriquement clos et

$$F : (k\text{-alg}) \to (\text{Ens})$$

un foncteur covariant. Par définition $F(k)$ sera appelé <u>l'ensemble des points de</u> F. Si $F(B) = X(B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\ k}(\mathrm{Spec}\ B, X)$ avec X un k-schéma fixé, alors $F(k) = X(k)$ est justement l'ensemble $|X|$ des points de X rationnels par rapport à k.

Définition 3.1

Soit $\xi_0 \in F(k)$. On appelle <u>déformation infinitésimale de</u> ξ_0 un couple (A,ξ) avec A une k-algèbre locale artinienne à corps résiduel k et $\xi \in F(A)$ qui induit ξ_0 par l'homomorphisme $A \to A/m = k$.



Définition 3.2

Soit $\xi_0 \in F(k)$. <u>Une déformation formelle de</u> ξ_0 est un couple $(\bar{A}, \{\xi_n\})$ avec $\bar{A}$ une k-algèbre noethérienne locale complète à corps résiduel k et $\xi_n \in F(\overline{A}/m^{n+1})$, $n = 0,1,\ldots$ tels que ξ_n induise ξ_{n-1} par l'application $F(A/m^{n+1}) \to F(A/m^n)$ déduite de l'homomorphisme $A/m^{n+1} \to A/m^n$. Ici l'élément ξ_0 de $\{\xi_n\}$ est justement l'élément ξ_0 donné.

<u>Définition 3.3</u>

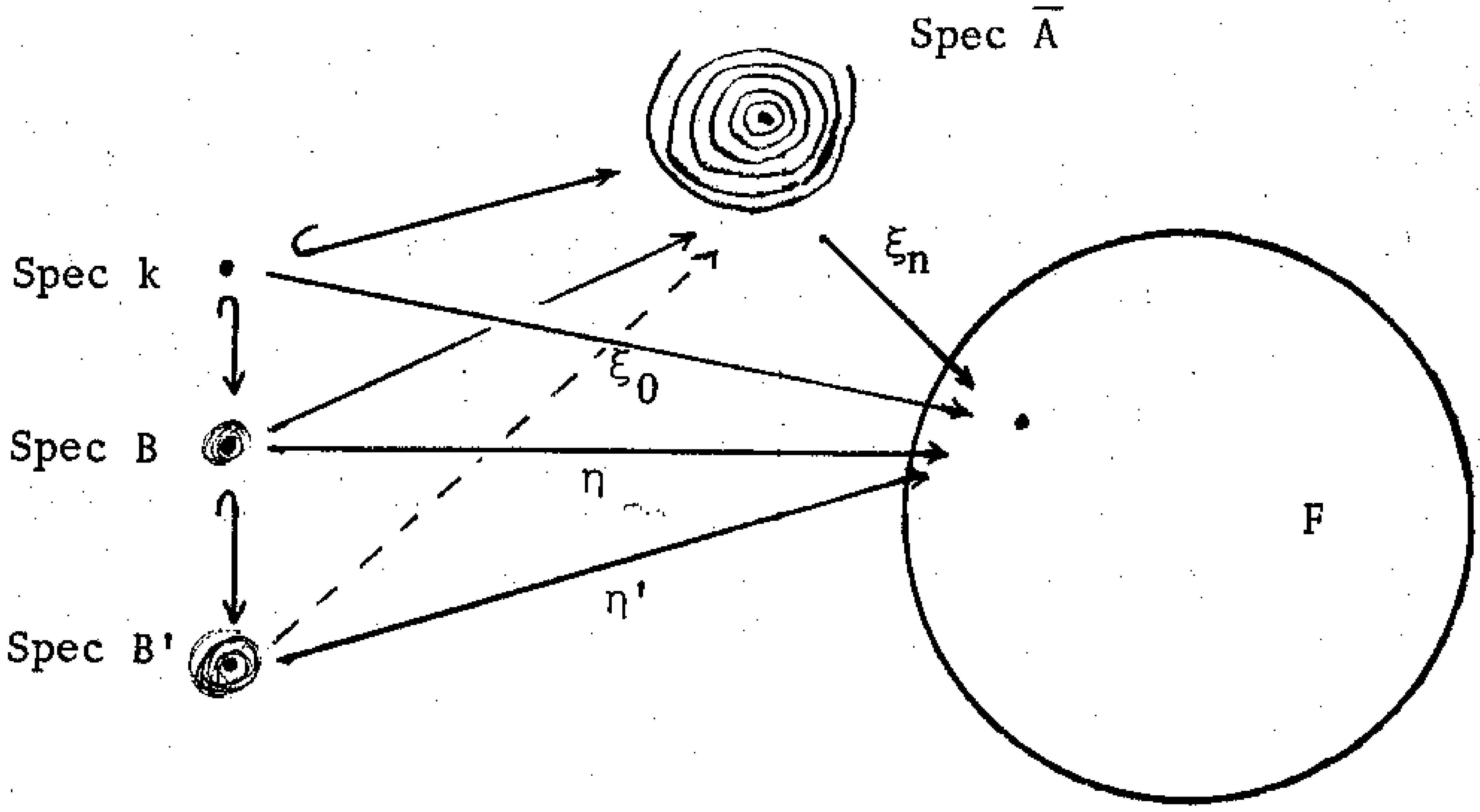
Soit $(\overline{A}, \{\xi_n\})$ une déformation formelle de ξ_0 . On dit que $(\overline{A}, \{\xi_n\})$ est <u>une déformation verselle (universelle) de</u> ξ_0 si elle possède la propriété suivante : soit (B',η') une déformation infinitésimale de ξ_0 , B un quotient de B' et $\eta \in F(B)$ induit par η' . Soit $\overline{A} \to B$ un homomorphisme de k-algèbres locales tel que $\xi_n \to \eta$ pour n assez grand (puisque B est artinienne et $\overline{A} \to B$ est local on peut factoriser en

$$\begin{tikzcd} & \overline{A}/m^{n+1} \arrow[dr] & \\ L\overline{A} \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

pour n assez grand). Alors il existe un k-homomorphisme (respectivement un k-homomorphisme unique $\overline{A} \to B'$) qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[d] \\ \overline{A} \arrow[ur] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

et tel que $\xi_n \to \eta'$, pour n assez grand.



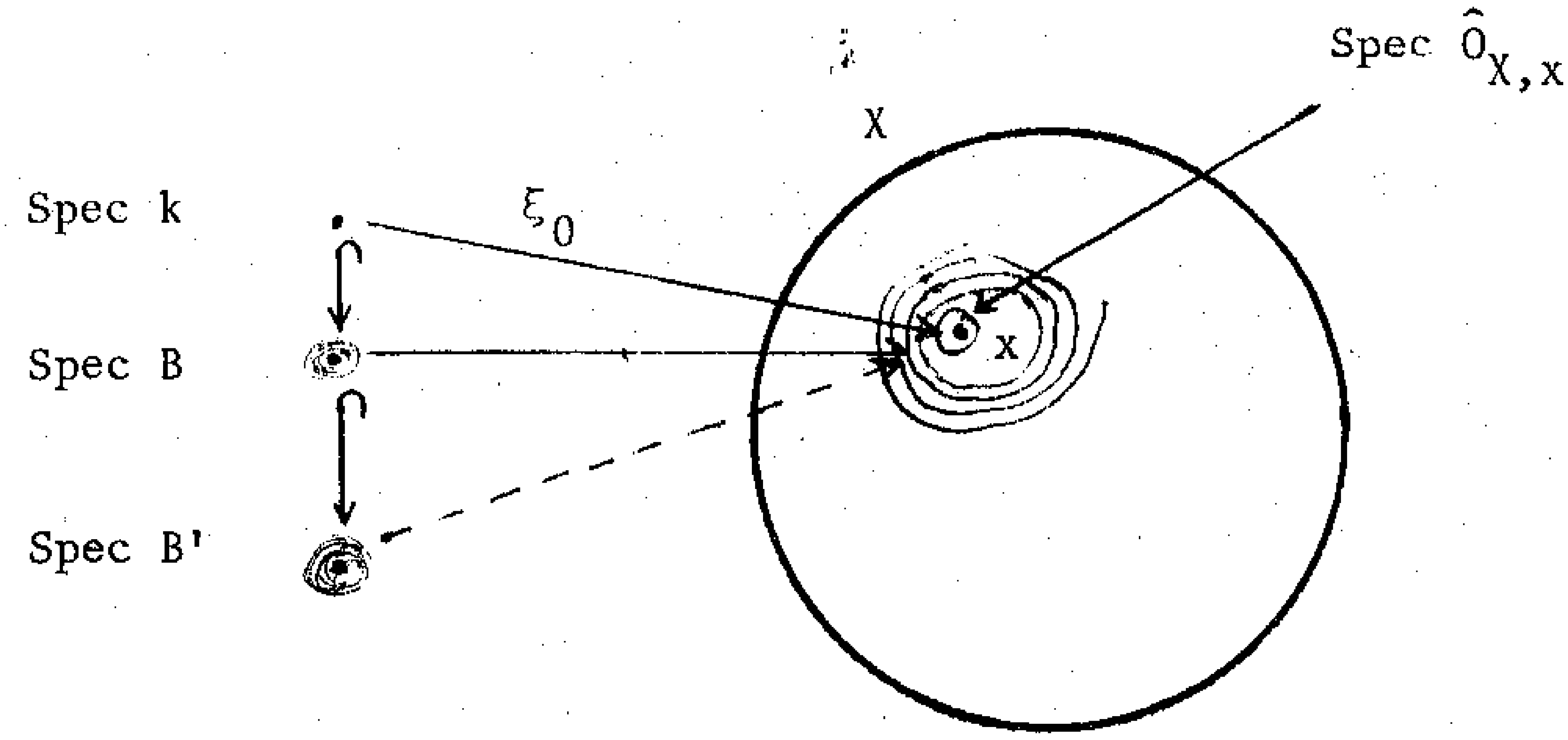
NOTE. Si $h_{\overline{A}/m^{n+1}}$, $h_{B'}$, h_B sont respectivement les foncteurs représentables définis par $\overline{A}/m^{n+1}$, B', B alors pour n assez grand on a

$$\begin{tikzcd}
h_B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, hook] & h_{\overline{A}/m^{n+1}} \arrow[d, "\xi_n"] \\
h_{B'} \arrow[r, "\eta'"'] \arrow[ur, dashed] & F
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que la versalité (universalité) est une espèce de lissité (une propriété d'être étale) pour les déformations formelles.

Exemple 3.4

Si F est représenté par un k-schéma X alors ξ_0 est un point $x \in X$ rationnel sur k et $\overline{A} = \hat{O}_{X,x}$ avec les morphismes ξ_n : Spec $\overline{A}/m^{n+1} \to X$ donnés par $O_{X,x} \to O_{X,x}/m^{n+1} = \overline{A}/m^{n+1}$ (n = 0,1,...) constituent une déformation universelle de ξ_0 .



Définition 3.5

Une déformation formelle $(\bar{A}, \{\xi_n\})$ de $\xi_0 \in F(k)$ est une déformation formelle effective s'il existe $\bar{\xi} \in F(\bar{A})$ qui induit $\{\xi_n\}$. Le couple $(\bar{A}, \bar{\xi})$ sera également appelé une déformation formelle effective.

Il arrive souvent que le foncteur F soit seulement défini pour les k-algèbres de type fini ou essentiellement de type fini (localisées des k-algèbres de type fini). Alors $F(\bar{A})$ n'a pas de sens. Mais si F est localement de présentation finie on peut étendre F à toutes les k-algèbres en prenant $F(B) = \varinjlim F(B_i)$ pour $B = \varinjlim B_i$ avec B_i de type fini sur k .

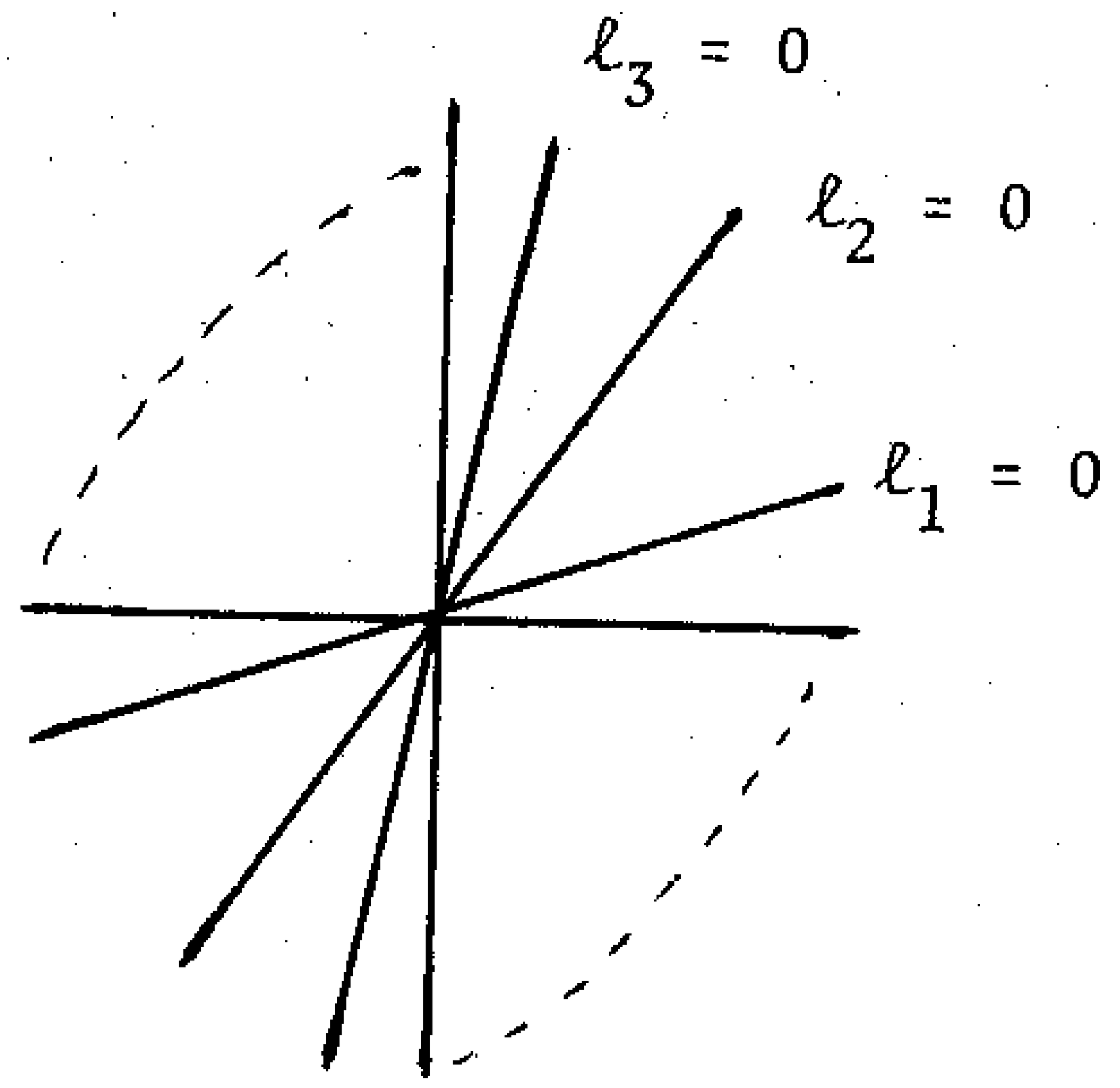
L'existence de $\bar{\xi} \in F(\bar{A})$ qui induit $\{\xi_n\}$ pour une déformation formelle $(\bar{A}, \{\xi_n\})$ donnée est un point assez subtil.

Exemple 3.6

Pour une surface de Kummer il existe des déformations universelles mais non effectives car non algébriques.

Exemple stupide 3.7 (cas de non-effectivité)

Le ind-schéma obtenu en ajoutant de plus en plus de droits



passant par l'origine du plan $P = \operatorname{Spec} k[x,y]$ est le subfoncteur F de P (i.e. de $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\cdot,P)$) défini par $F(B) = \varinjlim X_i(B)$ où B est une k-algèbre et $X_i(B) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} B, X_i)$ avec $X_i = \operatorname{Spec} k[x,y]/(\ell_1\ell_2\cdots\ell_i)$, $i = 1,2,\ldots$ donc

$$X_i(B) = \operatorname{Hom}_k(k[x,y]/(\ell_1\cdots\ell_i),B) .$$

Soit $\xi_0 \in P(k)$ l'origine i.e. le point défini par l'homomorphisme $k[x,y] \to k$ qui envoie x et y dans zéro. C'est également un point de F. On peut voir aisément que F coïncide formellement avec P à l'origine i.e. que toute déformation infinitésimale (B,η) de ξ_0 appartient à F. En effet B est une k-algèbre locale artinienne et η un k-homomorphisme $k[x,y] \to B$ qui envoie x, y dans le radical. Il s'agit de montrer que η se factorise par l'homomorphisme canonique $k[x,y] \to k[x,y]/(\ell_1\cdots\ell_r)$ avec r convenable. Or $\ell_1,\ell_2,\ldots$ s'envoient aussi dans l'idéal maximal de B donc si la puissance $r^{\text{ème}}$ de celui-ci est nulle $\ell_1\cdots\ell_r$ s'envoie dans zéro. Cela montre que F est formellement isomorphe à P en ξ_0. Conformément à une observation antérieure ((3.4)) P possède en ξ_0 une déformation universelle effective $\bar{\xi}$. C'est l'inclusion $k[x,y] \to k[[x,y]] = \bar{A}$.

On en déduit que $(\bar{A}, \{\bar{\xi}_n\})$ est une déformation universelle de ξ_0 par rapport à F avec $\bar{\xi}_n \in F(k[[x,y]]/m^{n+1})$ donné par les homomorphismes canoniques

$$k[x,y]/(\ell_1 \ldots \ell_r) \to k[x,y]/(x,y)^{n+1} = k[[x,y]]/m^{n+1}$$

$(r \geq n+1)$. Mais ce n'est pas effectif car aucun de ceux-ci ne se factorisent par $k[[x,y]] \to k[[x,y]]/m^{n+1}$.

Exemple 3.8 (deux déformations universelles différentes)

Deux droits avec un ordre de contact ∞ . C'est le ind-

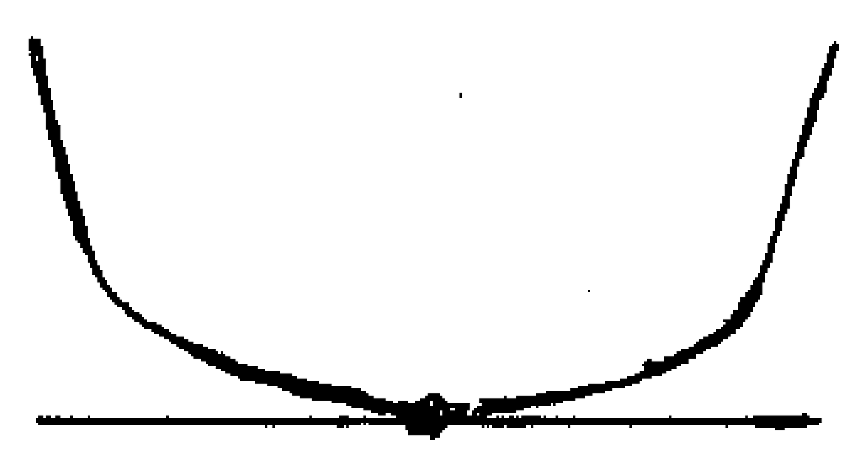
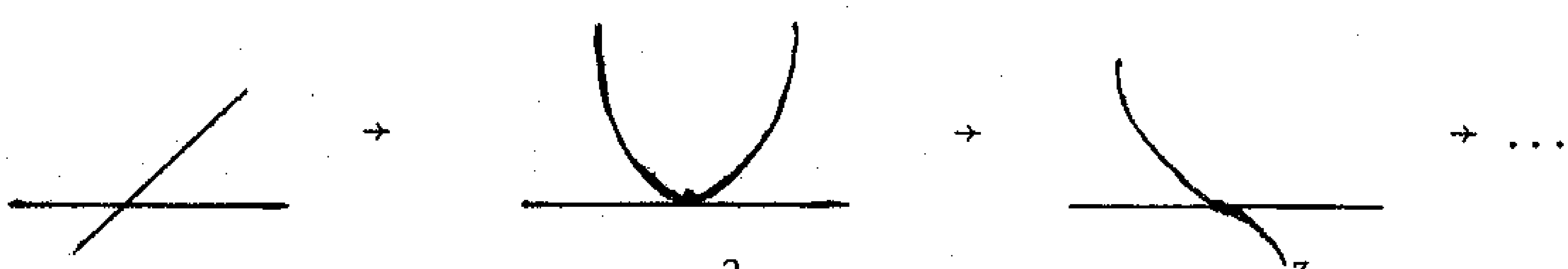


schéma X donné par $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_n \to \ldots$ où X_n est le sous-schéma du plan défini par $y(y-x^n) = 0$:



$y(y-x) = 0$ $\qquad$ $y(y-x^2) = 0$ $\qquad$ $y(y-x^3) = 0$

et $X_n \to X_{n+1}$ est défini par $(x,y) \to (x,xy)$. Par définition, pour toute k-algèbre B , on a

$$X(B) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_k(k[x,y]/y(y-x^n), B)$$

où $k[x,y]/y(y-x^{n+1}) \to k[x,y]/y(y-x^n)$ est le k-homomorphisme qui envoie x dans x et y dans xy .

Etudions les déformations au point $\xi_0 = (0,0)$. Soit B une k-algèbre locale artinienne. Une déformation infinitésimale (B,η) de ξ_0 est donnée par un k-homomorphisme $k[x,y]/y(y-x^n) \to B$ qui envoie x et y dans l'idéal maximal de B. Si $x \to a$, $y \to b$ alors $b^2 = b\, a^n$. Pour tout $i \geq 0$ l'homomorphisme composé

$$k[x,y]/y(y-x^{n+i}) \to k[x,y]/y(y-x^n) \to B$$

est le k-homomorphisme qui envoie x dans a et y dans $a^i b$. Donc si la $r^{\text{ème}}$ puissance de l'idéal maximal de B est nulle, à ce moment-là, $k[x,y]/y(y-x^{n+i})$ envoie x dans a et y dans 0 pour $i \geq r-1$. On en déduit que pour $i \geq r-1$, $k[x,y]/y(y-x^{n+i}) \to B$ se factorise par le $k[x]$-homomorphisme $k[x,y]/y(y-x^{n+i}) \to k[x]$ qui transforme y dans 0 . Soit $\zeta \in X(k[x])$ l'élément défini par cet homomorphisme. On a $\eta = X(\alpha)(\zeta)$ où $\alpha : k[x] \to B$ est déterminé par $\alpha(x) = a$. On voit ainsi que $\alpha \mapsto X(\alpha)(\zeta)$ établit une bijection entre les déformations infinitésimales de X dans ξ_0 et les déformations infinitésimales de la droite affine D en origine. Or D possède une déformation universelle effective en origine formée par $(\bar{A},\bar{\xi})$ où $\bar{A} = k[[x]]$ et $\bar{\xi}$ est l'homomorphisme d'inclusion $k[x] \to k[[x]]$. Soit $\bar{\xi} \in X(\bar{A})$ défini par le système compatible des homomorphismes

$$\phi_n : k[x,y]/y(y-x^n) \to k[[x]]$$

où $\phi_n(x) = x$, $\phi_n(y) = 0$, $n = 1,2,\ldots$ De ce qui précède, on déduit que $(\bar{A},\bar{\xi})$ est une déformation universelle effective de X dans ξ_0 . D'autre part, si

$$\psi_n : k[x,y]/y(y-x^n) \to k[[x]]$$

est le $k[x]$-homomorphisme défini par $\psi_n(y) = x^n$, il est clair que tout k-homomorphisme local

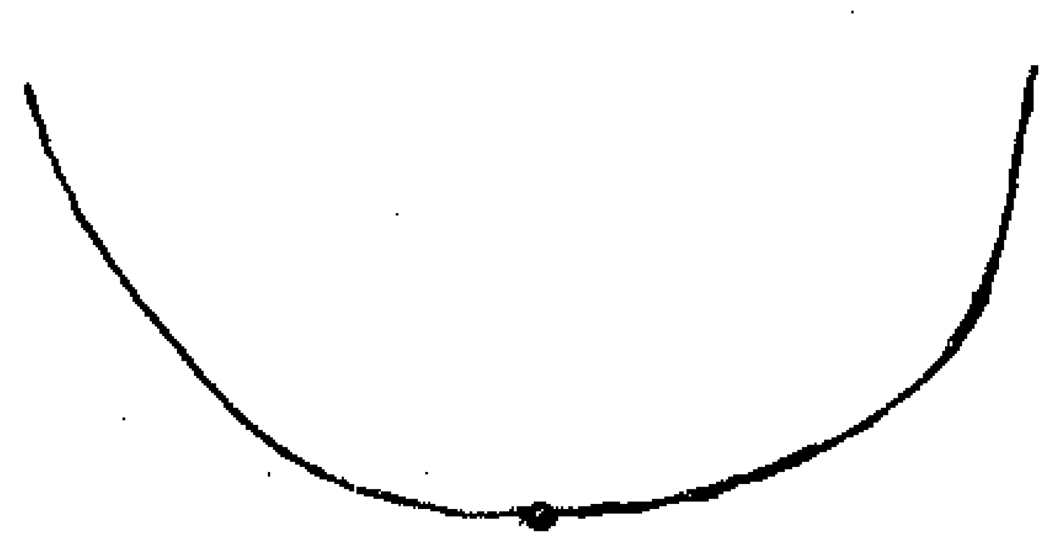
$$k[x,y]/y(y-x^n) \to B$$

(dans une k-algèbre locale artinienne) se factorise par ψ_n pour n assez g
Pour $n = 1,2,...$ les ψ_n constituent un système d'homomorphismes compatibl
avec les homomorphismes $k[x,y]/y(y-x^{n+1}) \to k[x,y]/y(y-x^n)$. Donc $\{\psi_n\}$ définit un point $\overline{\xi}' \in X(\overline{A})$ et $(\overline{A},\overline{\xi}')$ est également une déformation universelle effective de X en ξ_0 . Or $\phi_n \neq \psi_n$ pour tout n ce qui montre que $\overline{\xi} \neq \overline{\xi}'$. On obtient ainsi deux déformations universelles effectives distinctes.

<u>Observation</u>

$\ker(k[x,y] \to k[x,y]/y(y-x^n) \xrightarrow{\phi_n} k[[x]]) = (y)$, donc $\overline{\xi}$ correspond à la droite $y = 0$ de X

tandis que $\ker(k[x,y] \to k[x,y]/y(y-x^n) \xrightarrow{\psi_n} k[[x]]) = (y-x^n)$, donc $\overline{\xi}'$ correspond à la droite $y-x^n = 0$ de X



Définition 3.11

Soit $\xi_0 \in F(k)$. On appelle déformation algébrique de ξ_0 un triplet (Y,y,η) avec Y schéma de type fini sur k , $y \in Y(k)$ et $\eta \in F(Y)$ tel que l'application $F(Y) \to F(k)$ définie par $y : \operatorname{Spec} k \to Y$ envoie η dans ξ_0 .

Remarque 3.12

Soit (Y,y,η) une déformation algébrique de $\xi_0 \in F(k)$. Soit $\eta_n \in F(O_{Y,y}/m^{n+1})$ l'image de η par l'application $F(Y) \to F(O_{Y,y}/m^{n+1})$ qui correspond au morphisme canonique $\operatorname{Spec}(O_{Y,y}/m^{n+1}) \to Y$. On a $O_{Y,y}/m^{n+1} = \hat{O}_{Y,y}/m^{n+1}$ donc $\eta_n \in F(\hat{O}_{Y,y}/m^{n+1})$. Il est clair que $(\hat{O}_{Y,y}, \{\eta_n\})$ est une déformation formelle de ξ_0 .

Définitions 3.13

Soit (Y,y,η) une déformation algébrique de $\xi_0 \in F(k)$. Alors $(\hat{O}_{Y,y}, \{\eta_n\})$ s'appelle la déformation formelle de ξ_0 définie par (Y,y,η) .

Une déformation formelle algébrisable est une déformation formelle $(\bar{A}, \{\xi_n\})$ telle qu'il existe une déformation algébrique (Y,y,η) de ξ_0 et un isomorphisme $\hat{O}_{Y,y} \stackrel{\sim}{\to} \bar{A}$ qui envoie η_n en ξ_n . Une déformation formelle effective $(\bar{A},\bar{\xi})$ est dite algébrisable si $(\bar{A}, \{\xi_n\})$ est algébrisable. On observe que dans ce cas il n'arrive pas nécessairement que $\bar{\xi}$ corresponde à $\bar{\eta}$ (= l'image de η par $X \to F(O_{Y,y}) \to F(\hat{O}_{Y,y})$) . (3.8).

Unicité de l'algébrisation. Soit (X,x,ξ) une déformation algébrique de ξ_0 dont la déformation associée $(\hat{O}_{X,x}, \{\xi_n\})$ est verselle. Soit (Y,y,η) une déformation algébrique de ξ_0 . On dit que η <u>provient localement de</u> ξ <u>par un morphisme local pour la topologie étale</u> s'il y a un voisinage étale $(\tilde{Y},\tilde{y}) \to (Y,y)$ et un k-morphisme $(\tilde{Y},\tilde{y}) \to (X,x)$ tel que

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x) \arrow[dr, "\xi"] & \\
(\tilde{Y},y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (F,\xi_0) \\
 & (Y,y) \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

<u>Proposition 3.14</u>

Dans les hypothèses précédentes, supposons de plus que pour tout k-algèbre locale noethérienne complète B à corps résiduel k et tout couple $\bar{\xi}$, $\bar{\eta} \in F(B)$, $\bar{\xi}_n = \bar{\eta}_n$ (dans B/m^{n+1}) pour tout n implique $\bar{\xi} = \bar{\eta}$. Alors toute déformation algébrique de l'élément ξ_0 considéré ci-dessus provient localement de ξ , par un morphisme local pour la topologie étale.

<u>Preuve</u>. C'est presque trivial à partir du théorème d'approximation. Par la définition de la versalité on a un morphisme $(\hat{Y},y) \xrightarrow{\hat{f}} (X,x)$ avec $\hat{Y} = \operatorname{Spec} \hat{O}_{Y,y}$ tel que pour tout n

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[dr, "\xi_n"] & \\
 & F \\
Y_n \arrow[uu, "\hat{f}_n"] \arrow[ur, "\eta_n"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif ou $Y_n = \mathrm{Spec}(O_{Y,y}/m^{n+1})$ et $X_n = (O_{X,x}/m^{n+1})$. Soit $\xi' \in F(\hat{Y})$ l'image de ξ par $\hat{f}$ et η' l'image de η par le morphisme canonique $\hat{Y} \to Y$. On a $\xi'_n = \eta'_n$ en vertu du diagramme commutatif précédent donc $\xi' = \eta'$ selon l'hypothèse, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x) \arrow[dr, "\xi"] & \\
(\hat{Y},y) \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[dr] & & (F,\xi_0) \\
 & (Y,y) \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

est aussi commutatif. On obtient ainsi un morphisme $(\hat{Y},y) \to X \times_F Y$ et on peut appliquer le théorème d'approximation pour le foncteur $X \times_F Y$. On trouve ainsi un voisinage étale $(\tilde{Y},\tilde{y})$ et un morphisme $(\tilde{Y},\tilde{y}) \to X \times_F Y$ qui fait commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\hat{Y},y) \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times_F Y \\
 & (\tilde{Y},\tilde{y}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et qui donne un élément $\xi \in F(Y)$ aussi proche qu'on veut de ξ' .

<u>NOTE</u>. On pourrait exprimer l'hypothèse de 3.14 par le fait que l'application

$$F(B) = F(\varprojlim B/m^n) \to \varprojlim F(B/m^n)$$

soit injective.

LE THEOREME D'ALGEBRISATION

Théorème (d'algébrisation) 3.15

Soit F : (k-algèbres) $\to$ Ens localement de présentation finie et $\xi_0 \in F(k)$. Toute déformation verselle effective de ξ_0 est algébrisable.

Preuve. Nous allons d'abord démontrer le théorème dans l'hypothèse supplémentaire que l'anneau $\overline{A}$, dans la déformation verselle effective donnée $(\overline{A},\overline{\xi})$, est le complété $\hat{O}_{S,s}$ d'un anneau local géométrique (S schéma de type fini sur k , $s \in S(k)$) . La démonstration en est bien facile dans ce cas là, à partir du théorème d'approximation, en raison de l'algébricité de $\overline{A}$.

Par le théorème d'approximation il existe $\xi' \in F(\tilde{O}_{S,s})$ tel que $\overline{\xi} \equiv \xi' \bmod m^2$. Comme $\tilde{O}_{S,s} = \varinjlim_{(X,x)} \Gamma(X)$ quand (X,x) décrit les voisinages étales de (S,s) et F est localement de présentation finie, il y a un voisinage étale (X,x) de (S,s) et $\xi \in F(X)$ tel que $\overline{\xi} \equiv \xi \bmod m^2$ (noter que $\hat{O}_{X,x} = \hat{O}_{S,s}$) . Par versalité on peut trouver un morphisme $\overline{A} \xrightarrow{\psi_2} O_{X,x}/m^3$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \overline{A} & \xrightarrow{\psi_2} & O_{X,x}/m^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{A}/m^2 & \xrightarrow{1} & O_{X,x}/m^2 \end{array}$$

commute et $\overline{\xi} \to \xi'_2$. On peut continuer ainsi indéfiniment pour obtenir une suite de morphismes $\psi_n : \overline{A} \to O_{X,x}/m^{n+1}$ tels que

$$\begin{tikzcd} & O_{X,x}/m^{n+2} \arrow[dd] \\ \overline{A} \arrow[ur, "\psi_{n+1}"] \arrow[dr, "\psi_n"'] & \\ & O_{X,x}/m^{n+1} \end{tikzcd}$$

commute et $\overline{\xi} \to \xi'_n$. En définitive on trouve un homomorphisme local $\psi : \overline{A} \to \overline{A} = \hat{O}_{X,x}$ tel que $F(\psi)(\overline{\xi}) \equiv \xi'_n \bmod m^{n+1}$, pour tout n . Pour conclure, il suffit de voir que ψ est un isomorphisme. Or $\psi_1 = 1$, i.e. ψ est congruent avec l'application identique modulo m^2 et tout endomorphisme d'un anneau local noethérien complet congruent modulo m^2 avec l'application identique est un isomorphisme (Note 1).

Observation

Dans ce cas on peut remplacer l'hypothèse d'effectivité par l'hypothèse plus faible que l'application $F(\overline{A}) \to F(\overline{A}/m^2)$ soit surjective qui est vérifiée, en particulier quand l'image de $F(\overline{A})$ par $F(\overline{A}) \to \varprojlim F(\overline{A}/m^n)$ est dense. La démonstration précédente marche encore et on en déduit aussi l'effectivité à posteriori.

Dans le cas général $\overline{A}$ n'est pas algébrique à priori et on doit l'approcher en même temps que $\overline{\xi}$. On veut trouver (A',ξ') algébrique et assez proche de $(\overline{A},\overline{\xi})$ i.e. tel que

$$\overline{A}/m^{N+1} \approx A'/m'^{N+1}$$

$$\overline{\xi}_N \leftarrow \xi'_N \quad .$$

A ce moment-là, par versalité, on peut relever

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\overline{A} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \tilde{A}'/m^{N+2} \arrow[d] & \xi'_{N+1} \arrow[d] \\
\overline{A}/m^{N+1} \arrow[r, "\sim"] & \tilde{A}'/m'^{N+1} & \xi'_N \; .
\end{tikzcd}$$

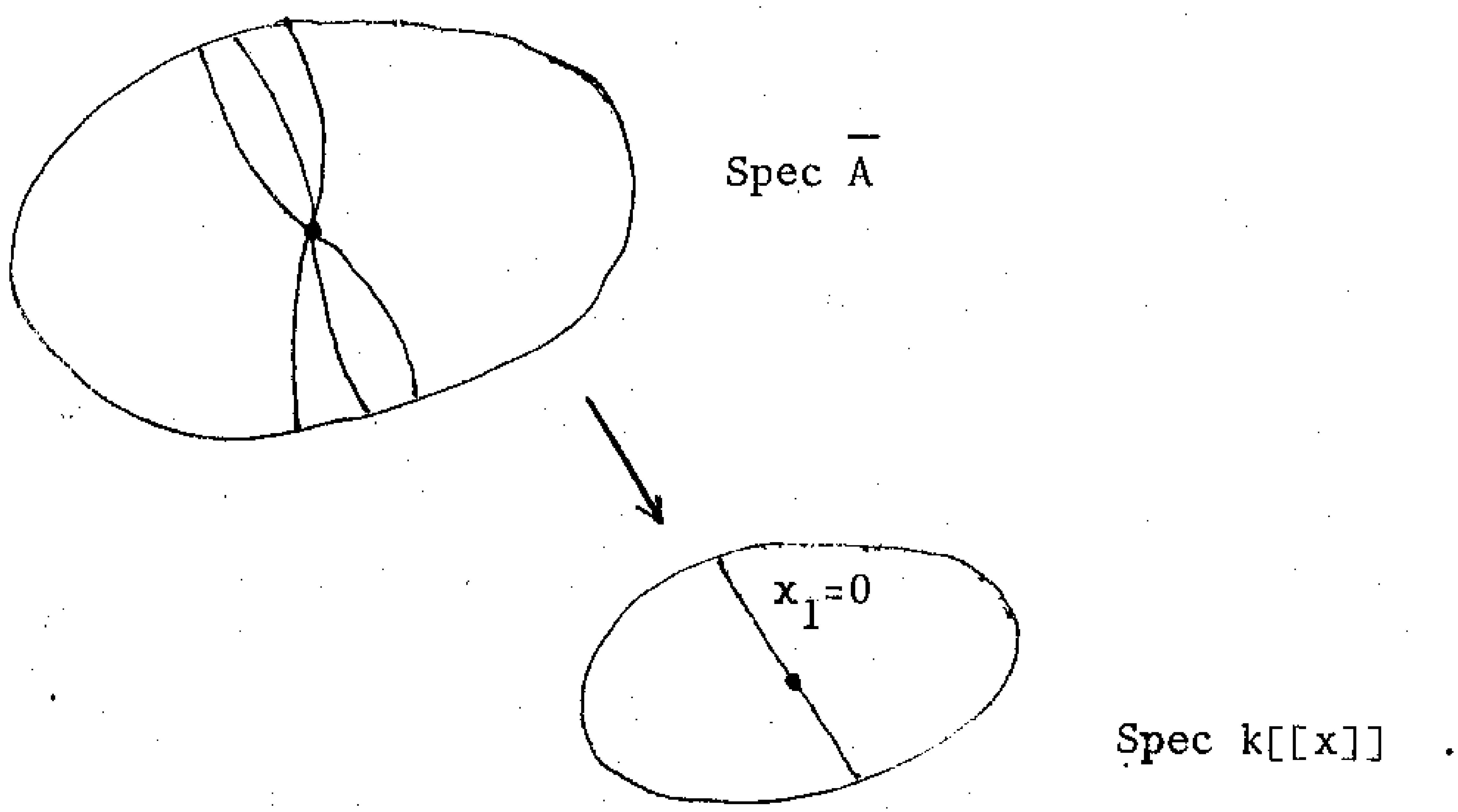
A la limite, on obtient

$$\psi : \overline{A} \to \hat{A}'$$

$$\{\overline{\xi}_n\} \to \{\xi'_n\} \quad .$$

On a que ψ est surjectif parce que $\overline{A}/m^{N+1} \approx \tilde{A}'/m'^{N+1}$ (Note 1, lemme 1). Ce qu'il faut prouver c'est l'injectivité. Pour cela il faut contrôler soigneusement $\tilde{A}'$ (sinon on pourrait par exemple tout simplement tronquer $\overline{A}$!).

Si $\overline{A}$ était intègre de dimension n il suffirait de contrôler la dimension de $\tilde{A}'$ (ce qui est facile) car alors $n = \dim \tilde{A}'$ implique l'injectivité de ψ : en divisant $\overline{A}$ par un idéal différent de zéro on fait chuter la dimension. On est ennuyé par les composantes immergées de $\overline{A}$ i.e. de l'idéal zéro de $\overline{A}$. Pour contrôler la situation on prend un anneau des séries formelles $k[[x]]$ contenu dans $\overline{A}$ et tel que $\overline{A}$ soit un $k[[x]]$-module fini (on peut en trouver un par Weierstrass ou bien justement en prenant pour $x_1,\dots,x_n$ un système de paramètres de $\overline{A}$). Alors $\overline{A}$ est libre sur le point générique de $k[[x]]$ et l'ensemble des points $p \in \operatorname{Spec} \bar{A}$ tels que $\bar{A}_{p'}$ soit libre sur $k[[x]]_{p'}$, avec $p' = p \cap k[[x]]$ est l'ensemble des points de $\operatorname{Spec} \bar{A}$ qui sont de Cohen-Macaulay ([AL] IV-37, prop. 22). C'est un ouvert de $\operatorname{Spec} \bar{A}$ qui correspond à un ouvert de $\operatorname{Spec} k[[x]]$. D'après Weierstrass, on peut réaliser la condition que $\bar{A}$ soit localement libre sur $k[[x]]$ en dehors de $x_1 = 0$. Puis on prend $\bar{A}/x_1 \bar{A}$ qui est un $k[[x]]/(x_1)$-module fini est un continue



C'est ce qu'on va faire soigneusement dans ce qui suit.

Soit M un module fini sur $B = k[[d_1,\ldots,d_n]]$, anneau des séries formelles. Posons

$$M_\nu = M/(d_1,\ldots,d_\nu)\, M$$
$$B_\nu = B/(d_1,\ldots,d_\nu)$$

$\nu = 1,\ldots,n$; $M_0 = M$, $B_0 = B$.

Définition

On appelle préparation de M une collection :

(a) des k-espaces vectoriels $L_\nu = L_\nu(M) = k \oplus \ldots \oplus k$, $\nu = 0,1,\ldots,n$.

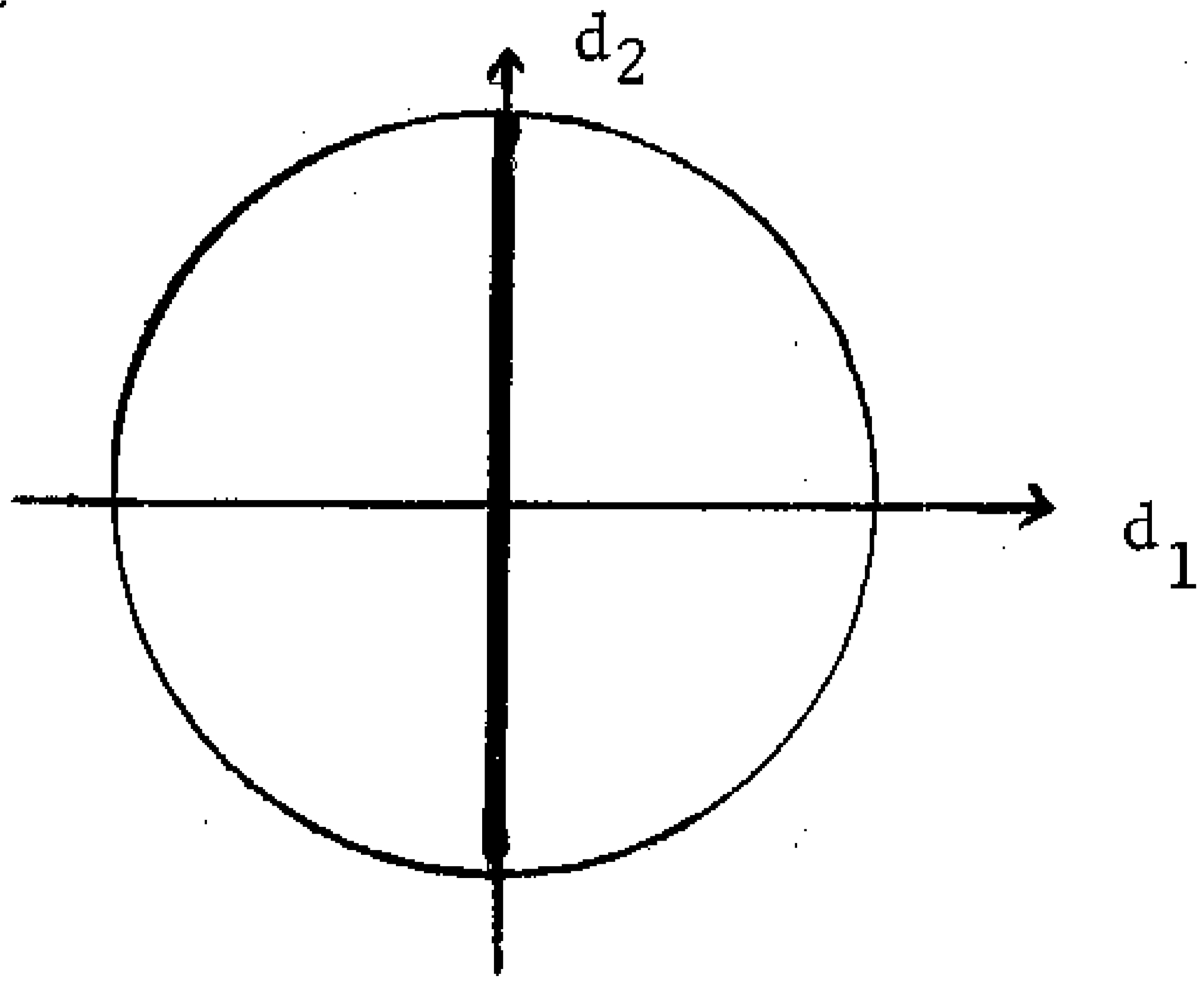
(b) des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} M_\nu \arrow[r, "d_{\nu+1}"] \arrow[dr, "v_\nu"] & M_\nu \\ L_\nu \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"] \arrow[r, "d_{\nu+1}"'] & L_\nu \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"'] \end{tikzcd} \qquad \nu = 0,1,\ldots,n-1$$

c'est-à-dire que u_ν , v_ν définissent des isomorphismes presque inverses l'un de l'autre entre $(L_\nu \otimes_k B_\nu)_{\frac{1}{d_{\nu+1}}}$ et $(M_\nu)_{\frac{1}{d_{\nu+1}}}$.

(c) un isomorphisme $u_n = v_n^{-1} : L_n \xrightarrow{\sim} M_n$.

La condition (b) dit que M_ν est libre en dehors de $d_{\nu+1} = 0$. Voici le dessin pour $n = 2$.



M_0 est libre en dehors de $d_1 = 0$; puis sur l'axe d_2 M_1 est libre en dehors de $d_2 = 0$.

Lemme 3.16

Soit $\{M_\alpha\}$ une famille finie des modules finis sur

$k[[x_1,\ldots,x_n]]$. Alors il existe $d_1,\ldots,d_n \in k[[x_1,\ldots,x_n]]$ qui engendrent un idéal primaire pour $(x_1,\ldots,x_n)$ tels que les M^α admettent des préparations en tant que modules sur $k[[d]]$. (A.F.M.I. Proposition 2.2).

<u>Notation</u>

$I^u(M) = \{m \in M \mid \dim \operatorname{supp}(m) \leq u\}$ $(u = 0,1,\ldots,n-1)$. Ici $\operatorname{supp}(m)$ est le fermé de $\operatorname{Spec} B$ formé par $\{p \in \operatorname{Spec} B \mid m A_p \neq 0\}$. On voit aisément que $I^u(M)$ est un sous-module de M .

Soit $x_1,\ldots,x_n \in \bar{A}$ analytiquement indépendants par rapport à k et tel que $\bar{A}$ soit fini sur $k[[x_1,\ldots,x_n]]$. On applique 3.16 pour préparer $\bar{A}$ et $I^u(\bar{A})$, $u = 0,\ldots,n-1$ par rapport à $B = k[[d_1,\ldots,d_n]] \subseteq k[[x_1,\ldots,x_n]]$.

Notons que $I^{n-\nu}(\bar{A}) \subset \bar{A}_\nu$ i.e. $I^{n-\nu}(\bar{A}) \cap ((d_1,\ldots,d_\nu)) = (0)$, $\nu = 1,2,\ldots,n-1$. En effet $L_\nu(\bar{A}) \neq 0$ donc $L_\nu(\bar{A}) \otimes_k B_\nu \xrightarrow{d_{\nu+1}} L_\nu(\bar{A}) \otimes_k B_\nu$ est injectif. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{A}_\nu \arrow[r, "d_{\nu+1}"] \arrow[dr, "v_\nu"] & \bar{A}_\nu \\
L_\nu(\bar{A}) \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"] \arrow[r, "d_{\nu+1}"'] & L_\nu(\bar{A}) \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que u_ν est injectif. Donc $d_1 \bar{A} \subset L_0(\bar{A}) \otimes_k B$ qui est libre sur B ce qui montre que $I^{n-1}(\bar{A}) \cap d_1(\bar{A}) = 0$. On peut continuer de cette façon avec $A_1,\ldots,A_{n-1}$.

On en déduit en particulier que $I^{n-\nu}(\overline{A})$ est tué par $d_1,\dots,d_\nu$. Donc $L_\mu(I^{n-\nu}(\overline{A})) = 0$ pour $\mu = 0,1,\dots,\nu-1$.

On peut étendre la notion de préparation pour les B-modules finis où B est une $k[d_1,\dots,d_n]$-algèbre arbitraire.

Lemme 3.17

Soit G le foncteur qui associe à toute $k[d_1,\dots,d_n]$-algèbre B l'ensemble des classes d'isomorphismes des systèmes de la forme suivante :

(a) Une B-algèbre finie A qui est préparée comme B-module de telle façon que $L_\nu(A) = L_\nu(\overline{A})$.

(b) Un élément $\eta \in F(A)$.

(c) Un système des A-modules finis J^μ qui sont préparés en tant que B-modules avec $L_\nu(J^\mu) = L_\nu(I^\mu(\overline{A}))$ pour $\mu = 1,0,\dots,n$.

(d) Un système des A-homomorphismes $J^\mu \to A$.

G est localement de présentation finie.

$\overline{A}$ avec $I^\mu(\overline{A})$ supposés préparés, les inclusions $I^\mu(\overline{A}) \to \overline{A}$ et $\overline{\xi} \in F(\overline{A})$ nous donne un élément de $G(k[[d]])$. On applique le théorème d'approximation pour le rapprocher à l'ordre N près : on obtient une $k[\tilde{d}]$-algèbre finie A , η etc. On a $\overline{A}/(d)^{N+1} \approx A/(d)^{N+1}$ et $\overline{\xi}_N \to \eta_N$. Posons $\hat{A} = A \otimes_{k[\tilde{d}]} k[[d]]$ le complété de A pour la topologie (d)-adique. Puisque $(\overline{A},\overline{\xi})$ est verselle on peut relever le morphisme $\overline{A} \to A/(d)^{N+1}$, par lequel on a $\overline{\xi} \to \eta_N$, en un $\overline{A} \to A/(d)^{N+2}$ par lequel $\overline{\xi} \to \eta_{N+1}$ et ainsi de suite. On en obtient $\psi : \overline{A} \to \hat{A}$ tel que $\{\overline{\xi}_n\} \to \{\eta_n\}$. ψ est surjectif si $N > 0$ (Note 1, lemme 1). On conclut en montrant que ψ est injectif.

Il se peut que ψ ne soit pas linéaire par rapport à $k[[d]]$ parce que $d_\nu \in \overline{A}$ ne s'envoie pas nécessairement en $d_\nu \in \hat{A}$ par ψ, mais ψ est $k[[d]]$-linéaire à l'ordre N près. Donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[rr, "\psi"] & & \hat{A} \\ & k[[d]] \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

n'est pas nécessairement commutatif. Si on prend $d_\nu^* \in \psi^{-1}(d_\nu)$, on obtient une autre flèche $k[[d]] \overset{*}{\to} \overline{A}$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[rr, "\psi"] & & \hat{A} \\ & k[[d]] \arrow[ul, "*"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et qui coïncide avec $k[[d]] \to \overline{A}$ à ordre N près. Mais $\overline{A}$ n'est plus préparé pour $k[[d]] \overset{*}{\to} \overline{A}$.

Soit $K = \ker \psi$ et $\dim(\mathrm{Supp}(K)) = n-\nu$ donc $K \subseteq I^{n-\nu}(\overline{A})$, $K \not\subseteq I^{n-\nu-1}(\overline{A})$, $(I^{-1}(\overline{A}) = 0)$. Puisque $(\overline{A})_{\frac{1}{d_1}} \approx L_0(\overline{A}) \otimes_k (B)_{\frac{1}{d_1}}$, $B = k[[d]]$, $(A)_{\frac{1}{d_1}} \approx L_0(\overline{A}) \otimes_k (\widetilde{k[d]})_{\frac{1}{d_1}}$, on voit que

$(\hat{A})_{\frac{1}{d_1}} \approx L_0(\overline{A}) \otimes_k (B)_{\frac{1}{d_1}}$ donc $(\overline{A})_{\frac{1}{d_1}}$ et $(\hat{A})_{\frac{1}{d_1}}$ sont des $(B)_{\frac{1}{d_1}}$-modules libres finis du même rang. Comme ψ est surjectif, il s'ensuit que $\psi \otimes_B k((d))$ est un isomorphisme, i.e. $K \otimes_B k((d)) = 0$. Cela prouve que la dimension du $\mathrm{supp}(K)$ sur B est $\leq n-1$. Or la dimension du $\mathrm{Supp}(K)$ par rapport à $\overline{A}$ est égale à la dimension du $\mathrm{Supp}(K)$ par rapport à B car $\overline{A}$ est finie sur B . Donc on a $K \subset I^{n-1}(\overline{A})$, i.e. $\nu > 0$. Comme ψ est surjectif, $K \subset I^{n-\nu}(\overline{A})$ entraîne que le morphisme $I^{n-\nu}(\overline{A}) \to I^{n-\nu}(\hat{A})$ induit par ψ est aussi surjectif (Note 2). Ainsi la suite

$$(*) \qquad 0 \to K \to I^{n-\nu}(\overline{A}) \to I^{n-\nu}(\hat{A}) \to 0$$

est exacte. Or $I^{n-\nu}(\overline{A})$ est un module fini au-dessus de $B_\nu = k[[d_{\nu+1},\ldots,d_n]]$ car tué par $d_1,\ldots,d_\nu$. On va voir que le rang de $I^{n-\nu}(\overline{A})$ au point générique P de B_ν est strictement plus grand que le rang de $I^{n-\nu}(\hat{A})$ dans P . On observe que $(*)$ est linéaire par rapport à la structure de B-algèbre de $\overline{A}$ définie par $B \overset{*}{\to} \overline{A}$. On a donc $rg_*(I^{n-\nu}(\overline{A})) > rg(I^{n-\nu}(\hat{A}))$ où rg_* est le rang en P par rapport à cette deuxième structure. On utilise le fait que les deux structures sont assez proches en appliquant

<u>Lemme 3.18</u>

Soit M un $k[[x]]$ module fini. Il existe un entier c tel que pour tout $k[[x]]$-module fini M' avec $M/(x)^c \underset{\sim}{\approx} M'/(x)^c$ on ait $rgM \geq rgM'$ (où rg désigne le rang dans le point générique de $k[[x]]$).

On en déduit que $rg(I^{n-\nu}(\overline{A})) \geq rg_*(I^{n-\nu}(\overline{A}))$ si c est convenablement choisi. D'autre part $\mathcal{J}^{n-\nu}$ est tué par $d_1,\ldots,d_\nu$ car $L_\mu(\mathcal{J}^{n-\nu}) = L_\mu(I^{n-\nu}(\overline{A}))$ et $L_\mu(I^{n-\nu}(\overline{A})) = 0$ pour $\mu = 0,\ldots,\nu-1$. Donc la dimension du support par rapport à B de $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu}$ est $\leq n-\nu$ ce qui prouve aussi que la dimension du support par rapport à $\hat{A}$ de $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu}$ est également $\leq n-\nu$, car $\hat{A}$ fini sur B . Donc l'homomorphisme $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu} \to \hat{A}$

défini par $\mathcal{J}^{n-\nu} \to A$ envoie $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu}$ dans $I^{n-\nu}(\hat{A})$. Or le rang de $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu}$ dans P est justement $rg(I^{n-\nu}(\overline{A}))$ car $L_\nu(\mathcal{J}^{n-\nu}) = L_\nu(I^{n-\nu}(\overline{A}))$. Comme $rg(I^{n-\nu}(\overline{A})) > rg(I^{n-\nu}(\hat{A}))$ il s'ensuit que $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu} \to I^{n-\nu}(\hat{A})$ n'est pas injective au point générique P de Spec B_ν . Pour conclure, il suffit donc de voir que ce morphisme est injectif.

Maintenant, pour déduire l'injectivité de $\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu} \to \hat{A}_\nu$ on utilise la préparation. On a vu que $I^{n-\nu}(\overline{A}) \subset \overline{A}_\nu$ et on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} I^{n-\nu}(\overline{A}) \arrow[r] & \overline{A}_\nu \arrow[d, "v_\nu"] \\ L_\nu(I^{n-\nu}(\overline{A})) \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"] \arrow[r] & L(\overline{A}_\nu) \otimes_k B_\nu \end{tikzcd} .$$

En vertu de la préparation, on en déduit que le morphisme en bas $L_\nu(I^{n-\nu}(\overline{A})) \otimes_k B \to L(\overline{A}_\nu) \otimes_k B$ est injectif en dehors de $d_{\nu+1} = 0$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J}^{n-\nu} \arrow[r] & \hat{A}_\nu \arrow[d, "v_\nu"] \\ L_\nu(\mathcal{J}^{n-\nu}) \otimes_k B_\nu \arrow[u, "u_\nu"] \arrow[r] & L_\nu(\hat{A}_\nu) \otimes_k B_\nu \end{tikzcd}$$

il suffit de démontrer que $L_\nu(\hat{\mathcal{J}}^{n-\nu}) \to L_\nu(\hat{A}_\nu)$ est injectif au point générique P de B_ν . On observe que d'après l'hypothèse, ce morphisme coïncide avec $L_\nu(I^{n-\nu}(\overline{A})) \otimes_k B_\nu \to L_\nu(\overline{A}_\nu) \otimes_k B_\nu$ modulo m^{N+1} pour $N >> 0$. On peut donc conclure avec

Lemme 3.19

Soit $f : L \to L'$ un morphisme des modules libres sur $k[[x_1,\dots,x_n]]$. On prend un morphisme $f' : L \to L'$ très proche de f i.e. tel que $f \equiv f' \bmod m^N$ pour N assez grand. Si f est injectif dans le point générique de $k[[x]]$ alors f' l'est aussi.

Preuve. L'injectivité de f s'exprime par le fait que certains déterminants sont $\neq 0$ c'est-à-dire n'appartiennent pas à m^h avec h convenable. Ces déterminants sont congruents avec les déterminants correspondants associés à f' mod m^N . Si on prend $N > h$ on trouve que ces derniers ne s'annulent pas aussi.

APPLICATIONS DU THEOREME D'ALGEBRISATION

1. Le schéma de Picard

Soit $X \to k$ un schéma propre sur k . On considère le foncteur de Picard

$$P : (k\text{-alg}) \to (\text{Ens})$$

défini par

$$A \mapsto \operatorname{coker}(H^1(\operatorname{Spec} A, O^*_{\operatorname{Spec} A}) \to H^1(X_A, O^*_{X_A}))$$

où $X_A = X \times \operatorname{Spec} A$ et l'homomorphisme précédent est défini par la projection $X_A \to \operatorname{Spec} A$. Un élément de $P(A)$ s'interprète, grosso modo, comme une famille des classes de faisceaux inversibles sur les fibres de $X_A \to \operatorname{Spec} A$.

Théorème 3.20 (Seshadri, pour le cas projectif, Grothendieck Murre pour le cas général).

P est représentable par un schéma en groupes localement de type fini, noté $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$.

Note 1. $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ n'est pas de type fini, par exemple dans le cas d'une courbe C on a la suite exacte

$$0 \to J \to \underline{\mathrm{Pic}}(C) \xrightarrow{\deg} Z \to 0$$

où J est la jacobienne, donc $\underline{\mathrm{Pic}}(C)$ est la réunion disjointe d'une infinité dénombrable des schémas de type fini, toutes isomorphes à J.

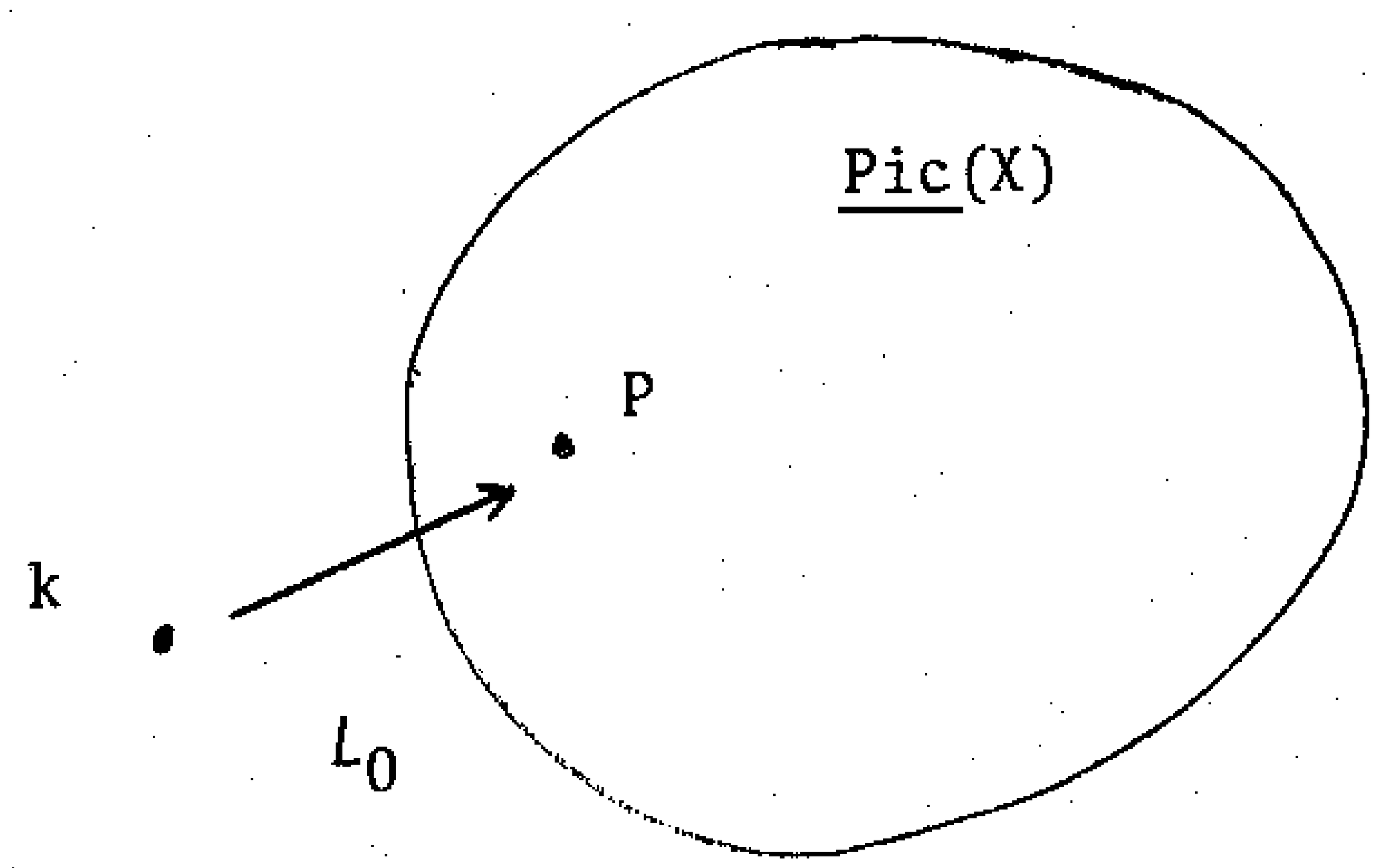
Note 2. P est un faisceau pour la topologie de Zariski sur les schémas affines donc s'étend à tous les k-schémas.

Note 3. Par définition on a un isomorphisme $P(A) \approx \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A, \underline{\mathrm{Pic}}(X))$ établi de la façon suivante : il y a sur $\underline{\mathrm{Pic}}(X) \times X$ un faisceau inversible L tel que toute classe de faisceaux inversibles sur X_A provient de l'image inverse de L par un morphisme

$$X_A \to \underline{\mathrm{Pic}}(X) \times X$$

de la forme $\phi \times 1$ avec $\phi : \operatorname{Spec} A \to \underline{\mathrm{Pic}}(X)$ un k-morphisme univoquement déterminé.

Le premier pas de la démonstration du théorème est de prouver l'existence des jolies déformations pour les points de $P(k)$. Soit $L_0 \in P(k)$ et supposons $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ déjà connu. L_0 correspond alors à un point $p \in \underline{\mathrm{Pic}}(X)(k)$ i.e. à un morphisme de k-schémas.



Soit $\overline{L} \in P(\hat{O}_p)$ défini par le morphisme canonique $\mathrm{Spec}\ \hat{O}_p \to \underline{\mathrm{Pic}}(X)$, i.e. $\overline{L}$ est la classe de l'image inverse de L par le X-morphisme $\mathrm{Spec}\ \hat{O}_p \times X \to \underline{\mathrm{Pic}}(X) \times X$. On vérifie aisément que $(\hat{O}_p, \overline{L})$ est une déformation effective universelle de L_0 .

On va maintenant montrer directement l'existence de $\overline{A} \approx \hat{O}_p$ et de $\overline{L} \in P(\overline{A})$ tels que $(\overline{A}, \overline{L})$ soit universelle pour L^0 , sans supposer l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$. Puis on trouvera une algébrisation (Y,y,L) $L \in P(Y) = H^1(X \times Y, O^*_{X \times Y})/H^1(Y, O^*_Y)$ donnée par un faisceau inversible sur $X \times Y$. On aura comme cela l'équivalent d'un morphisme

$$Y \to \underline{\mathrm{Pic}}(X)$$

qui transforme y dans p et qui induit un isomorphisme $\hat{O}_y \approx \hat{O}_p$, i.e. c'est un morphisme étale en y . Quitte à restreindre Y à un voisinage de y on peut supposer que $Y \to \underline{\mathrm{Pic}}(X)$ est étale, donc (Y,y) est un voisinage étale de p dans $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$. Ensuite en recollant, on obtient $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$.

<u>L'existence de</u> $(\overline{A},\overline{L})$. Il suffit de prendre L_0 = l'élément zéro de $P(k)$ i.e. l'anneau O_X parce que $P(k)$ est un groupe et on peut translater. L'outil est le théorème de Schlessinger ([FAR]) .

<u>Théorème</u>

Soit F : (k-alg finies locales) $\to$ (Ens) . Soit $F(k)$ réduit à un point, $F(k) = \{\xi_0\}$. Il existe une déformation universelle $(\overline{A},\{\xi_n\})$ de ξ_0 si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

1) Soit (*) $0 \to (\varepsilon) \to A' \to A \to 0$ une suite exacte et $B \to A$ un morphisme arbitraire dans la catégorie des k-algèbres finies locales. On suppose $\dim_k(\varepsilon) = 1$. On a alors le diagramme commutatif

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (\varepsilon) & \to & A' \times_A B & \to & B & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow q & & \\ 0 & \to & (\varepsilon) & \to & A' & \xrightarrow[p]{} & A & \to & 0 \end{array}$$

où $A' \times_A B$ est le produit fibré dans la catégorie des k-algèbres finies locales, $A' \times_A B = \{(a',b) \in A' \times B \mid p(a') = q(b)\}$ avec la multiplication et l'addition par composantes. On demande que

$$F(A' \times_A B) \xrightarrow{\sim} F(A') \times_{F(A)} F(B)$$

où $F(A' \times_A B) \to F(A') \times_{F(A)} F(B)$ soit défini par les morphismes canoniques $F(A' \times_A B) \to F(A')$, $F(A' \times_A B) \to F(B)$.

2) $F(k[t]/t^2)$ est muni d'une structure canonique d'espace vectoriel sur k (Note 3). On demande que

$$\dim_k F(k[t]/t^2) < \infty .$$

On applique le théorème de Schlessinger à $P_0 = P_{\xi_0}$ défini par

$$P_{\xi_0}(A) = \{\xi \in P(A) \mid \xi \mapsto \xi_0\} .$$

<u>Vérification de la condition 1).</u> A étant une k-algèbre finie artinienne X et X_A ont le même espace sous-jacent et

$$\begin{array}{l} X \\ \quad X_A \\ A \end{array}$$

$O_{X_A} = O_X \times_k A$ est une O_X-algèbre finie plate. Il s'ensuit que $\Gamma(X_A, O_{X_A}) = \Gamma(X, O_{X_A}) = \Gamma(X, O_X) \times_k A$ donc le foncteur $A \to \Gamma(X_A, O_{X_A})$ est exact sur la catégorie des k-algèbres finies artiniennes. La suite exacte $(*)$ donne une suite exacte

$$0 \to O_X \to O_{X_{A'}} \to O_{X_A} \to 0$$

où $O_X \to O_{X_{A'}}$ est défini par $a \mapsto a\varepsilon$. Cela donne une suite exacte

$$0 \to O_X \to O^*_{X_{A'}} \to O^*_{X_A} \to 0$$

où la dernière flèche envoie a dans $1 + \varepsilon a$ (et O_X est muni de sa structure additive). On en déduit la suite exacte de cohomologie

$$H^0(X, O^*_{X_{A'}}) \to H^0(X, O^*_{X_A}) \to H^1(X, O_X) \to H^1(X, O^*_{X_{A'}}) \to H^1(X, O^*_{X_A}) \to H^2(X, O_X) .$$

On peut voir aisément que $H^0(X,O^*_{X_{A'}}) \to H^0(X,O^*_{X_A})$ est surjectif. En effet $H^0(X,O_{X_{A'}}) = \Gamma(X,O_{X_{A'}}) \to \Gamma(X,O_{X_A}) = H^0(X,O_{X_A})$ est surjectif, $H^0(X,O^*_{X_{A'}}) = (\Gamma^0(X,O_{X_{A'}}))^*$, $H^0(X,O^*_{X_A}) = (\Gamma^0(X,O_{X_A}))^*$ (les groupes multiplicatifs de ces algèbres) et $H^0(X,O^*_{X_A}) \to H^0(X,O^*_{X_A})$ est l'homomorphisme déduit de $\Gamma(X,O_{X_{A'}}) \to \Gamma(X,O_{X_A})$. Comme le noyau de ce dernier, égal à $\varepsilon\Gamma(X,O_X)$ est nilpotent, il s'ensuit que $H^0(X,O^*_{X_{A'}}) \to H^0(X,O^*_{X_A})$ est surjectif. On obtient donc la suite exacte

$$0 \to H^1(X,O_X) \to H^1(X,O^*_{X_{A'}}) \to H^1(X,O^*_{X_A}) \to H^2(X,O_X)$$

où $H^1(X,O^*_{X_{A'}}) = P(A')$, $H^1(X,O^*_{X_A}) = P(A)$. Comme l'image de $H^1(X,O_X) \to H^1(X,O^*_{X_{A'}}) \to H^1(X,O^*_{X_A})$ est le sous-groupe formé par l'élément unité, l'image $H^1(X,O_X) \to H^1(X,O^*_{X_{A'}})$ est contenue dans $P_0(A')$. La suite exacte précédente nous donne alors une suite exacte

$$(***) \qquad 0 \to H^1(X,O_X) \to P_0(A') \to P_0(A) \to H^2(X,O_X) .$$

En appliquant ce résultat au diagramme (**) on trouve

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X,O_X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0(A' \times_A B) \arrow[r] \arrow[d] & P_0(B) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X,O_X) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^1(X,O_X) \arrow[r] & P_0(A') \arrow[r] & P_0(A) \arrow[r] & H^2(X,O_X)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que le carré

$$\begin{tikzcd}
P_0(A' \times_A B) \arrow[r] \arrow[d] & P_0(B) \arrow[d] \\
P_0(A') \arrow[r] & P_0(A)
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

<u>Vérification de la condition 2)</u>. On prend $A' = k[t]/(t^2)$ $(\varepsilon) = tA'$, $A = k$ dans (***). On a $P_0(A) = \{\xi_0\}$ donc $H^1(X,O_X) \tilde{\to} P_0(A')$ (Annexe, Note 3), ce qui prouve que $P_0(A')$ est un espace vectoriel fini sur k (parce que X/k étant propre, $H^1(X,O_X)$ est fini sur k). Ainsi la condition du théorème de Schlessinger est vérifiée. Il s'ensuit qu'il existe une déformation universelle $(\overline{A},\{\xi_n\})$ de ξ_0.

Prouvons maintenant que $(\overline{A},\{\xi_n\})$ est effective. On a $\xi_n \in P(\overline{A}/m^{n+1})$ et $\xi_n \to \xi_{n-1}$; L_n est une classe des faisceaux inversibles sur $X_n = X \otimes_k \overline{A}/m^{n+1}$ donnée par un O_{X_n}-faisceau L_n et $L_n \otimes_{O_{X_n}} O_{X_{n-1}} \approx L_{n-1}$. Soit $\overline{X} = X \otimes_k \overline{A}$. On a $X_n = \overline{X} \otimes_A (\overline{A}/m^{n+1})$ et $\mathcal{X} = \varinjlim X_n$ est un voisinage formel de $X = X_0$ dans $\overline{X}$. La suite $L_0, L_1, \ldots$ définit un faisceau formel sur $\mathcal{X}$. D'après un théorème de Grothendieck (EGA, III,(5.1.4)) il existe un $O_{\overline{X}}$-faisceau $\overline{L}$ tel que $\overline{L} \otimes_{O_{\overline{X}}} O_{X_n} \approx L_n$ pour tout n. Il en résulte d'abord (par Nakayama) que $\overline{L}$ est monogène et ensuite c'est inversible. Donc $\overline{L}$ définit un élément $\overline{\xi} \in P(\overline{A})$ tel que $\overline{\xi} \to \xi_n$ pour tout n, i.e. $(\overline{A},\{\xi_n\})$ est effective.

2. <u>Le foncteur de Brauer</u>

Soit X/k propre. On définit

$$B_r(A) = H^2(X_A, O^*_{X_A})/H^2\,(\mathrm{Spec}\ A,\ O^*_{\mathrm{Spec}\ A}) .$$

Pour toute suite exacte (*), on a la suite exacte

$$H^1(X_A,O^*_{X_A}) \to H^2(X_k,O^*_{X_k}) \to H^2(X_{A'},O^*_{X_{A'}}) \to H^2(X_A,O^*_{X_A}) \to H^3(X_k,O^*_{X_k}) .$$

Dans $H^1(X_A, \mathcal{O}^*_{X_A}) \to H^2(X_k, \mathcal{O}^*_{X_k})$ il y a une obstruction qui correspond à l'existence des déformations verselles qui ne sont pas généralement universelles (elles le sont si $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ est lisse). On trouve des déformations verselles qui ne sont pas effectives, donc on obtient un groupe formel qui n'est pas algébrique.

3. Les singularités isolées

On considère les schémas pointés (X,x) où x est une singularité isolée de X. On introduit une relation d'équivalence

$$(X,x) \sim (X',x')$$

s'il existe un isomorphisme local pour la topologie étale entre (X,x) et (X',x'). Cela veut dire qu'il existe (X'',x'') et un diagramme

$$\begin{tikzcd} & (X'',x'') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X,x) & & (X',x') \end{tikzcd}$$

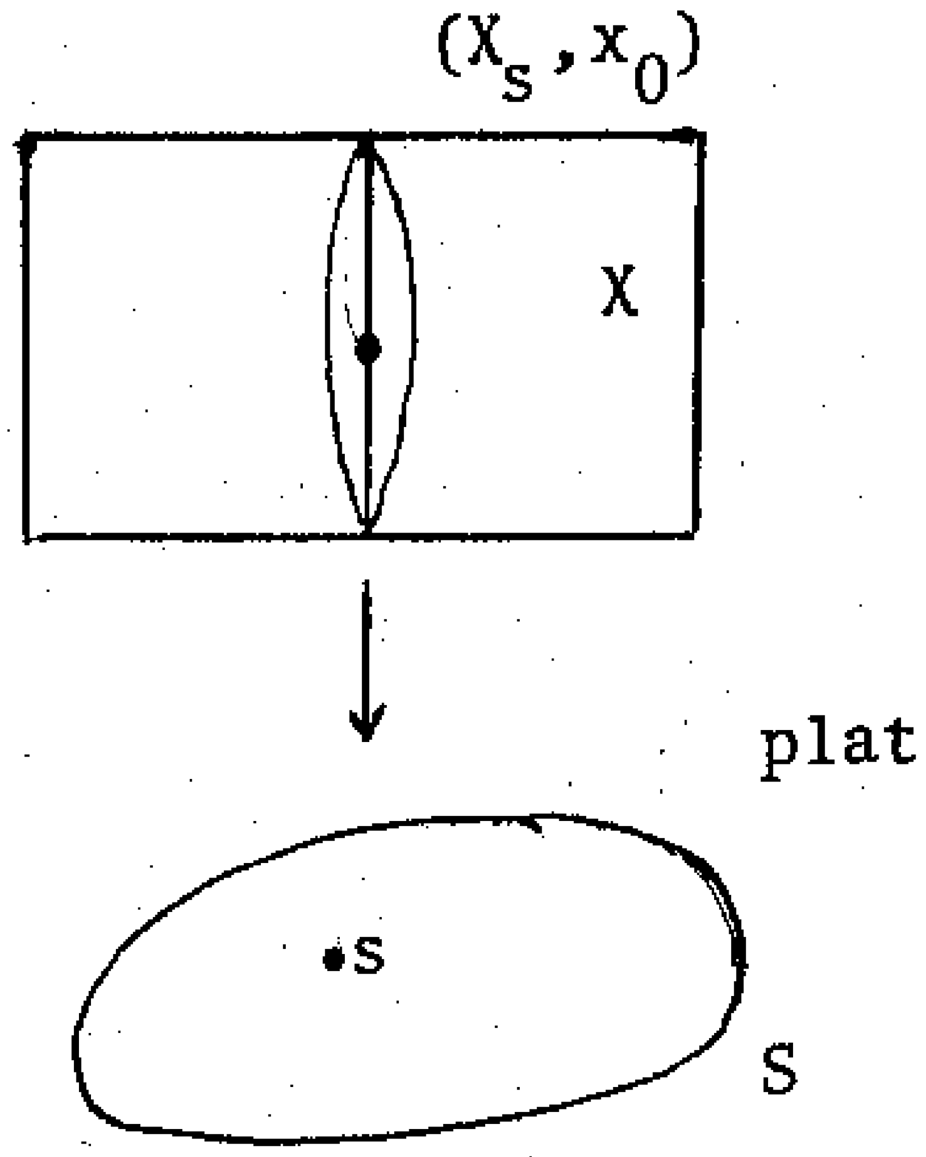
où les deux flèches sont étales, ce qui revient à demander qu'on ait $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x} \approx \tilde{\mathcal{O}}_{X',x'}$ ou encore $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \approx \hat{\mathcal{O}}_{X',x'}$.

<u>Définition</u>

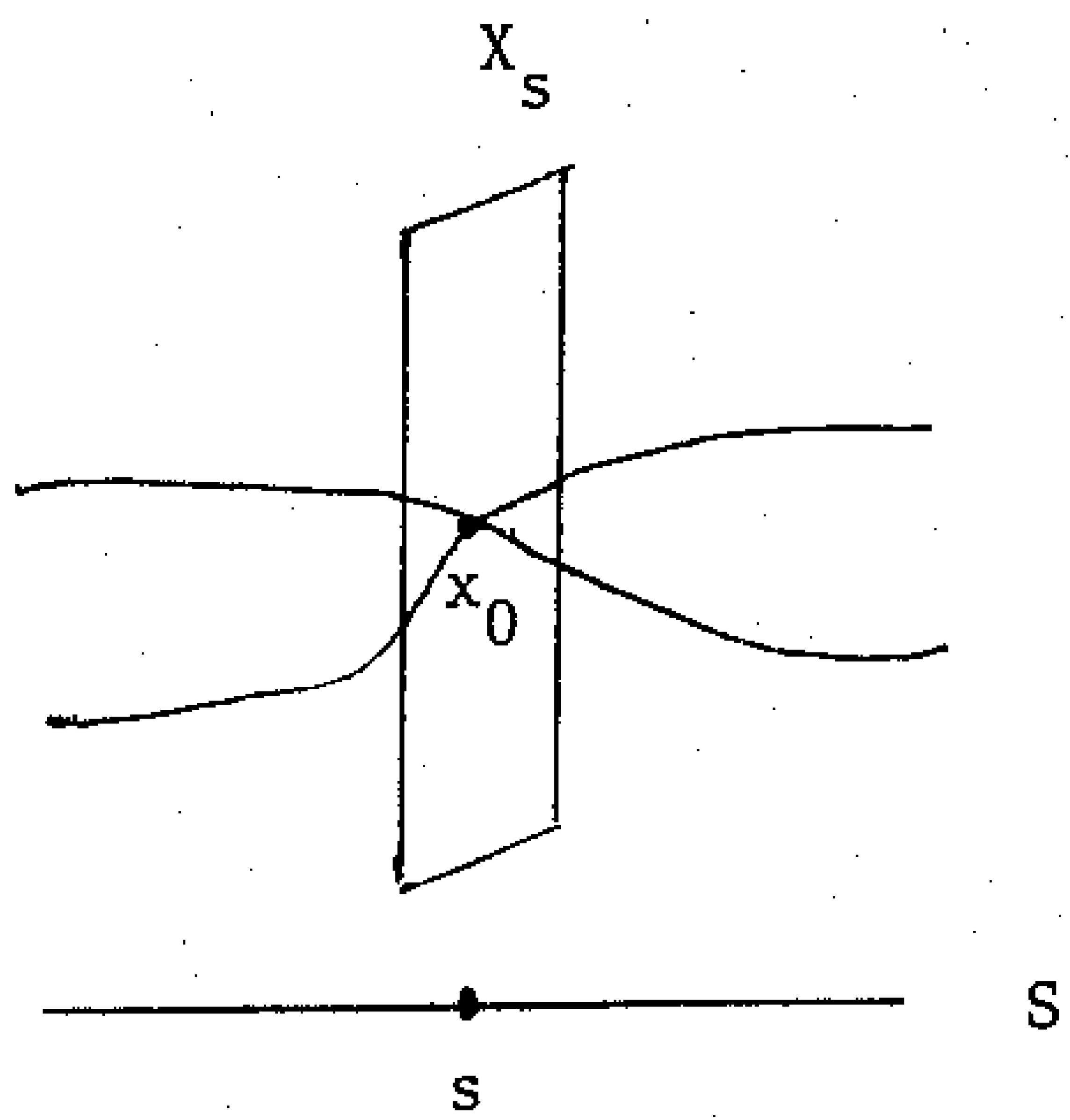
<u>Une déformation de</u> (X_0,x_0) est donnée par un morphisme plat des schémas pointés

$$(X,x_0) \to (S,s)$$

tel que la fibre au-dessus de s soit une singularité isolée équivalente avec (X_0,x_0) .

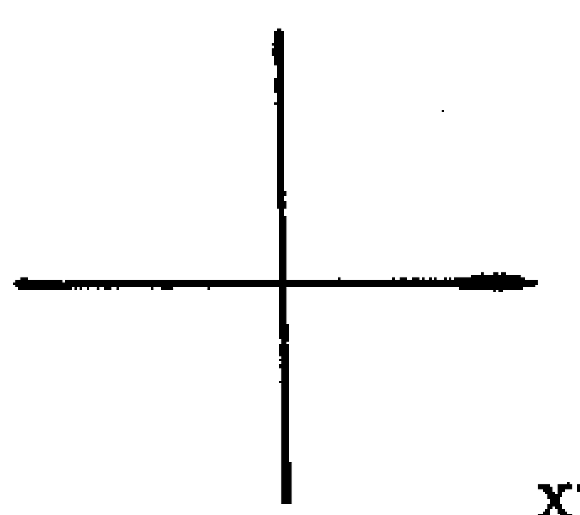


Dans cette définition, X peut tout simplement n'avoir aucune singularité et il se peut bien que les fibres de $X \to S$ excepté X_s soient non singulières. Il est aussi bien possible que la singularité se splitte de sorte qu'on obtient des fibres avec plusieurs points singuliers

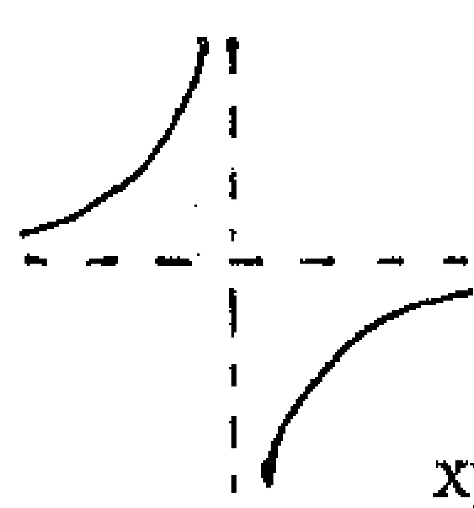


Exemple

$xy = t$ est une déformation pour $xy = 0$ paramétrée par la droite affine S de coordonnée t . X est un paraboloïde donc non singulier et la seule fibre singulière est obtenue pour $t = 0$.



$xy = 0$



$xy = t$

Un isomorphisme des déformations est donné par un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X,x_0) & \longrightarrow & (X',x_0') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S,s) & \longrightarrow & (S',s') \end{array}$$

où les deux flèches horizontales sont des isomorphismes locaux pour la topologie étale compatibles avec les équivalences de (X_0,x_0) avec (X_s,x_0) et (X_s', x_0') .

Théorème (Schlessinger)

Toute classe d'isomorphismes des singularités isolées possède une déformation formelle verselle.

On peut se poser le problème d'algébrisation d'une telle déformation. Le problème a été résolu pour les cas des intersections complètes par Schlessinger et Kac dans le cas algébrique et par Deligne dans le cas analytique.

ANNEXE

NOTE 1

Soit A un anneau noethérien, m un idéal et $f : A \to A$ un endomorphisme congruent modulo m^2 avec l'application identique. Si A est complet dans la topologie m-adique, f est un automorphisme.

La démonstration résulte des lemmes suivants :

Lemme 1

Soit A , A' deux anneaux, $f: A \to A'$ un homomorphisme, m un idéal de A tel que A soit complet m-adiquement. Soit $m' = mA'$ $(= f(m)\, A')$. Si l'application induite $A/m \to A'/m'$ est surjective $m' = f(m) + m'^2$ et A' est séparé dans la topologie m'-adique, f est surjectif.

Preuve. L'application $Gr(f) : Gr(A) \to Gr(A')$ est surjective car $Gr(A') = A'/m' \oplus m'/m'^2 \oplus \ldots$ est engendré sur A'/m' par m'/m'^2 . Donc f est surjective (si $a' \in A'$, $a' = f(a_1) + b_1$ avec $a_1 \in A$, $b_1 \in m'$, $b_1 = f(a_2) + b_2$ avec $a_2 \in m$, $b_2 \in m'^2$ et ainsi de suite ; on obtient ainsi une série convergente $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ telle que $a\text{-}f(a_1 + \ldots + a_n) = b_n \in m'^{n+1}$ i.e. dont la limite a donne $f(a) = a'$).

Lemme 2

Soit $f : A \to A$ un endomorphisme d'un anneau noethérien. Si f est surjectif, alors f est un isomorphisme.

<u>Preuve</u>. $\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \dots$ et il suffit à voir que $\ker(f^n) = 0$ avec n convenable. Or, on peut supposer $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$. Cela veut dire, en remplaçant f par f^n, que l'on peut supposer en plus $\ker(f) = \ker(f^2)$. Soit $a \in \ker(f)$. Par hypothèse $a = f(b)$ donc $f(a) = f^2(b) = 0$, d'où $b \in \ker(f^2)$. Comme $\ker(f) = \ker(f^2)$, $b \in \ker(f)$ i.e. $a = f(b) = 0$.

<u>NOTE 2</u>

Soit $a \in I^{n-\nu}(\hat{A})$ et $b \in \overline{A}$ tel que $\psi(b) = a$. On a la suite des $\overline{A}$-modules

$$0 \to K \to E \to F \to 0$$

avec $E = K + b\overline{A}$, $F = a\overline{A} = a\hat{A}$. Pour tout $p \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ cela donne également une suite exacte

$$0 \to K_p \to E_p \to F_p \to 0 \quad .$$

On en déduit que $\operatorname{Supp}(E) \subset \operatorname{Supp}(K) \cup \operatorname{Supp}(F)$ donc $b \in I^{n-\nu}(\overline{A})$.

<u>NOTE 3</u>

$k[t]/(t^2)$ est un espace vectoriel sur k dans la catégorie des k-algèbres finies artiniennes, i.e.

$$\operatorname{Hom}_k(A, k[t]/(t^2))$$

a une structure d'espace vectoriel par rapport à k fonctorielle (en A). En effet il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\operatorname{Hom}_k(\cdot, k[t]/(t^2)) \to \operatorname{Der}_k(A,k)$$

où $\mathrm{Der}_k(A,k)$ est l'ensemble des k-dérivations de A , défini en vertu de l'observation suivante. Si $\varepsilon \in k[t]/(t^2)$ est la classe de t $k[t]/(t^2) = k \oplus k\varepsilon$ avec $\varepsilon^2 = 0$ donc pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_k(A,k[t]/(t^2))$ on a $\phi(a) = \rho(a) + \delta(a)\varepsilon$, $a \in A$, $\delta \in \mathrm{Der}_k(A,k)$, où $\rho : A \to k$ est l'homomorphisme composé $A \to k[t]/t^2 \to k$. Cette structure d'espace vectoriel sur $k[t]/(t^2)$ est donnée par des morphismes

$$\alpha : k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2) \to k[t]/(t^2)$$
$$\gamma_c : k[t]/(t^2) \to k[t]/(t^2) \qquad (c \in k)$$

censés de faire commutatifs certains diagrammes . Comme $F(k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2)) = F(k[t]/(t^2)) \times F(k[t]/(t^2))$, car $F(k) =$ point, ces diagrammes sont transformés dans des diagrammes commutatifs qui montrent que $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ munissent $F(k[t]/(t^2))$ d'une structure d'espace vectoriel par rapport à k .

Nous allons cependant donner une description directe des opérations d'espace vectoriel sur $P_0(k[t]/(t^2))$ ce qui sera nécessaire d'ailleurs pour la vérification de la condition 2).

D'abord $k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2) = k \oplus k\varepsilon \oplus k\varepsilon'$ avec la multiplication donnée par $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \varepsilon\varepsilon' = 0$. Alors

$$\alpha(a + b\varepsilon + b'\varepsilon') = a + (b + b')\varepsilon \quad .$$

Pour tout $c \in k$

$$\gamma_c(a + b\varepsilon) = a + cb\varepsilon \quad .$$

Soit $X' = X \times_k k[t]/(t^2)$, $X'' = X \times_k k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2)$.

Ce sont des schémas avec le même espace sous-jacent que X dont les faisceaux structurels sont respectivement $O_X \oplus \varepsilon O_X$, $O_X \oplus \varepsilon O_X \oplus \varepsilon' O_X$ $(\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \varepsilon\varepsilon' = 0)$. Soit L , L' deux X'-faisceaux inversibles qui induisent sur X le faisceau O_X^* . Alors on peut trouver un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X tel que L , L' soient donnés respectivement par $1 + b_i\varepsilon$, $1 + b_i'\varepsilon$ $(b_i, b_i' \in \Gamma(U_i, O_X))$. Nous voulons expliciter

$$P_0(k[t]/(t^2)) \times P_0(k[t]/(t^2)) \to P_0(k[t]/(t^2)) .$$

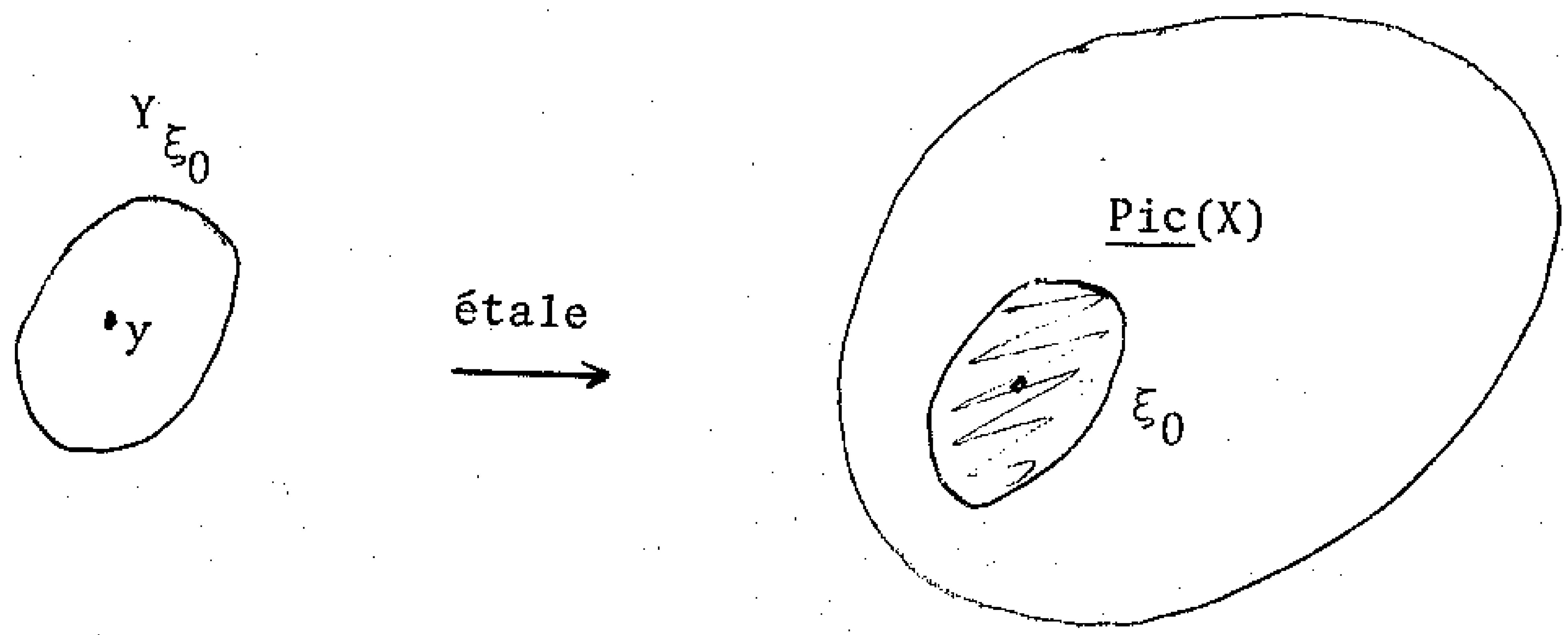
Le X''-faisceau L'' défini par $\{U_i\}$ et $1 + b_i\varepsilon + b_i'\varepsilon'$ donne un élément de $P_0(k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2))$ qui se projette sur les classes de L et L' . Donc $P_0(\alpha)(L'')$ est précisément l'élément qui correspond à (L, L') . Or le morphisme $X' \to X''$ défini par α est donné par l'application $O_{X''} \to O_{X'}$ qui envoie $a + b\varepsilon + b'\varepsilon' \in \Gamma(U, O_{X''})$ dans $a + (b + b')\varepsilon$. On voit ainsi que $1 + b_i\varepsilon + b_i'\varepsilon' \mapsto 1 + (b_i + b_i')\varepsilon$ i.e. $P_0(\alpha)\ (L'') = L \otimes L'$. Donc la structure de groupe définie par $P_0(\alpha)$ dans l'ensemble sous-jacent de $P_0(k[t]/(t^2))$, est précisément la structure de groupe de $P_0(k[t]/(t^2))$. La multiplication avec $c \in k$ est donnée par $P_0(\gamma_c)$. L'application $X' \to X'$ définir par γ_c est donnée par l'homomorphisme $O_{X'} \to O_{X'}$ qui associe à $a + b\varepsilon \in \Gamma(U, O_{X'})$ l'élément $a + bc\varepsilon \in \Gamma(U, O_{X'})$. Donc $1 + b_i\varepsilon \mapsto 1 + cb_i\varepsilon$ i.e. $P_0(\gamma_c)$ appliqué à la classe de L donne la classe du faisceau L_c défini par $\{1 + cb_i\varepsilon\}$. Soit $O_X \to O_X^*$ l'homomorphisme $a \mapsto 1 + a\varepsilon$. Ce qui précède montre que l'homomorphisme $H^1(X, O_X) \to P_0(k[t]/(t^2))$ qu'on en déduit est compatible avec la multiplication par les éléments de k . Donc c'est un homomorphisme d'espaces vectoriels sur k .

CHAPITRE IV

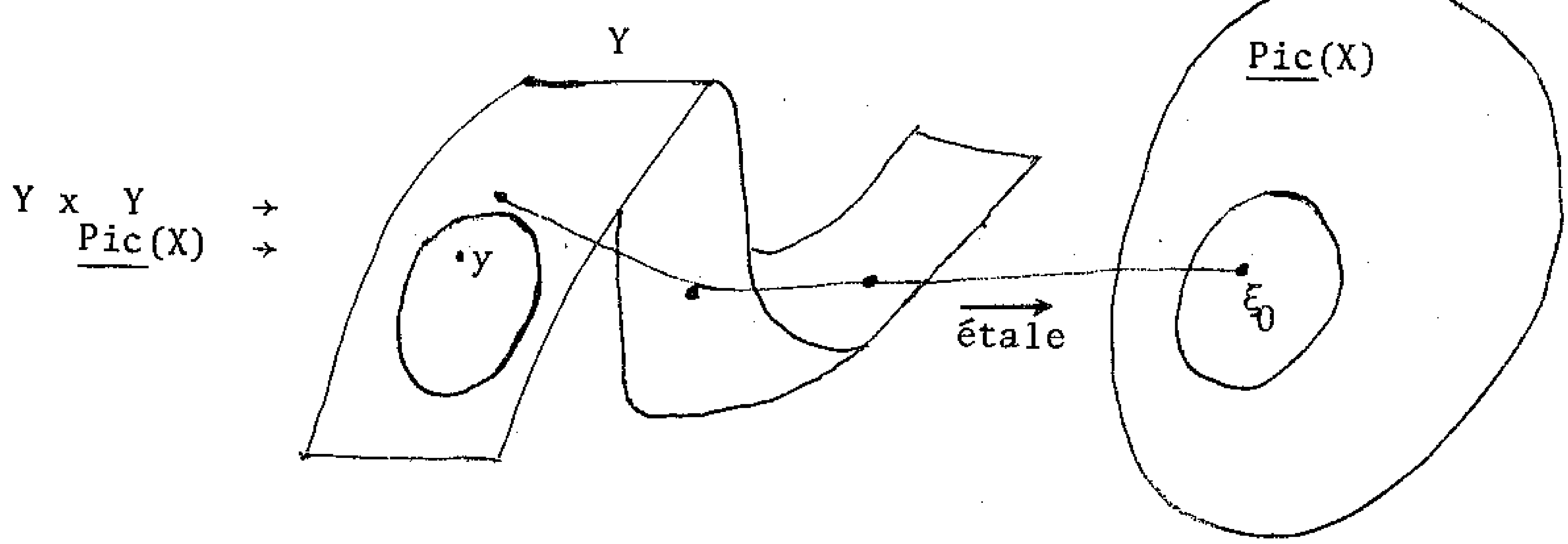
LA NOTION D'ESPACE ALGEBRIQUE

Exemple

Soit X/k propre. Il s'agit de construire $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ (Chap. 3). On connaît les points de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$, ce sont les classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X . Par le théorème d'algébrisation on arrive à trouver pour tout point ξ_0 de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ un voisinage affine étale Y_{ξ_0}



On obtient ainsi un recouvrement étale de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$. Classiquement, un schéma s'obtient par recollement des schémas affines qui forment un recouvrement ouvert dans la topologie de Zariski. Mais ici les flèches $Y_{\xi_0} \to \underline{\mathrm{Pic}}(X)$ ne sont pas injectives. Pour obtenir $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ il fallait identifier deux points de $Y = \coprod Y_{\xi_0}$ qui ont la même image dans $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$. C'est-à-dire qu'il faut considérer le quotient de Y par la relation d'équivalence $Y \times_{\underline{\mathrm{Pic}}(X)} Y \subset Y \times Y$



Ici, dans ce cas particulier, on obtiendra bien un schéma comme on va voir plus tard. En général, ce qu'on obtient est seulement un espace algébrique.

<u>1re définition d'espace algébrique</u> (séparé)

<u>Définitions</u>

Soit S un schéma et R un sous-schéma de $S \times S$. On dit que R est <u>une relation d'équivalence</u> si pour tout schéma Z, $R(Z) = \mathrm{Hom}(Z,R) \subset \mathrm{Hom}(Z, S \times S) = S(Z) \times S(Z)$ est une relation d'équivalence sur $S(Z) = \mathrm{Hom}(Z,S)$. Dire que R est une relation d'équivalence revient à demander que les conditions suivantes soient remplies :

1) <u>Réflexivité</u> : on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr] & & S \times S \\ & R \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

où $S \to S \times S$ est le morphisme diagonale (id_S, id_S).

2) <u>Symétrie</u> : on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & S \times S \arrow[d, "\sigma"] \\ R \arrow[r] & S \times S \end{tikzcd}$$

avec σ la symétrie $\sigma = (pr_2, pr_1)$.

3) <u>Transitivité</u> : on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R \times_S R \arrow[r] \arrow[d] & S \times S \times S \times S \arrow[d] \\ R \arrow[r] & S \times S \end{tikzcd}$$

où $R \times_S R \to S \times S \times S \times S = (S \times S) \times (S \times S)$ est défini par $R \times_S R \xrightarrow{pr_i} R \to S \times S$ $(i = 1,2,)$ et $S \times S \times S \times S \to S \times S$ est (pr_1, pr_4) .

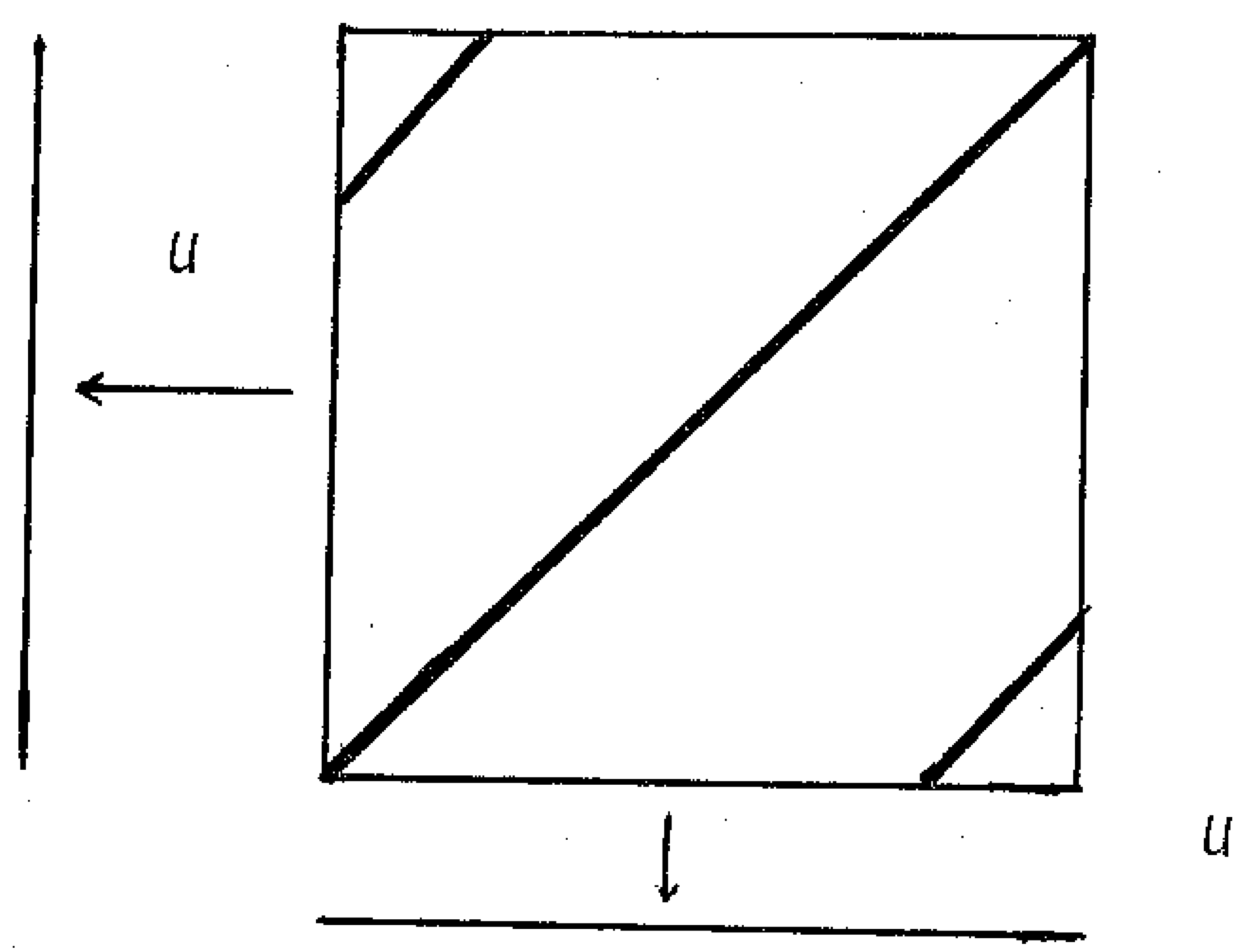
On dit que R est <u>une relation d'équivalence fermée</u> si R est un sous-schéma fermé de S ; R est <u>une relation d'équivalence étale</u> si les deux projections $R \rightrightarrows S$ sont étales (R étant symétrique on peut demander seulement que pr_1 soit étale).

Dans l'exemple précédent $Y \times_P Y \rightrightarrows Y$ avec $P = \underline{\mathrm{Pic}}(X)$ sont étales car $Y \to P(X)$ l'est.

<u>Digression sur le cas analytique</u>. Soit $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques. Par définition f est étale ssi f est un isomorphisme local (i.e. pour tout $x' \in X'$ il existe un voisinage U' de x' dans X' tel que $f|U'$ soit une immersion ouverte).

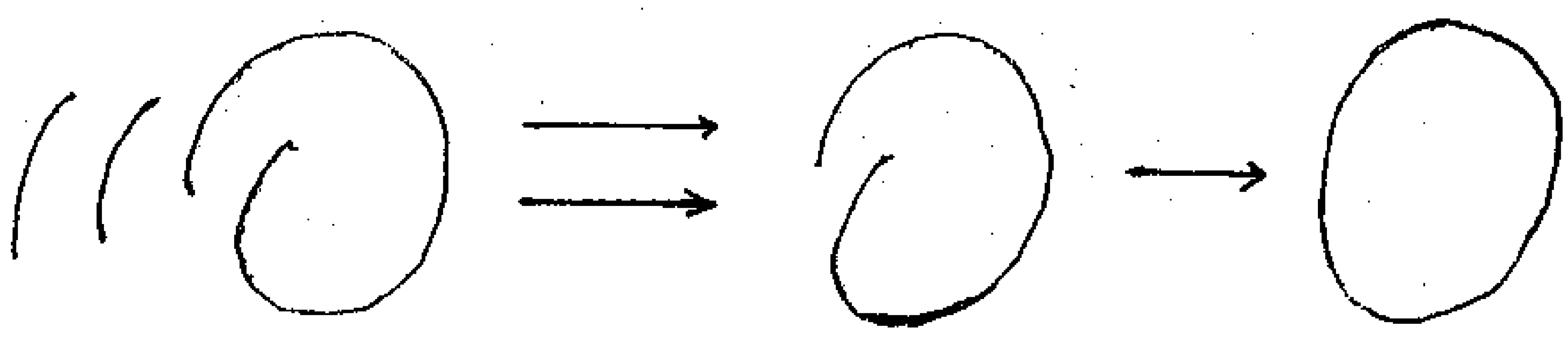
<u>Exemple</u> dans le cas C^∞

Soit $\mathcal{U}$ un intervalle ouvert de la droite réelle. Considérons la relation d'équivalence R donnée par le graphe



.

Les deux projections sont des isomorphismes locaux. Le quotient $X = \mathcal{U}/R$ est également une variété de classe C^∞



Aussi on n'obtient rien de nouveau en prenant des quotients des variétés analytiques par des relations d'équivalence étales, à cause du fait que tout morphisme étale est un isomorphisme local. Par contre,dans le cas des schémas,un morphisme étale n'est pas nécessairement un isomorphisme local pour la topologie de Zariski. Si $k = \mathbb{C}$ tout schéma de type fini sur k possède une structure analytique sur-jacente et tout morphisme étale de k-schémas de type fini définit un isomorphisme local pour les espaces analytiques associés. Donc on peut construire le quotient par une relation d'équivalence étale dans le cadre analytique (ce sera un espace analytique). Il s'agit cependant de trouver une structure algébrique sous-jacente de ce quotient.

La définition fonctorielle de schéma. Soit X un k-schéma séparé. D'après Yoneda on peut identifier X avec le foncteur $\mathrm{Hom}_k(\cdot,X)$. On voit aisément que X satisfait à l'axiome de descente (ou de faisceau) si Z est un k-schéma et $\{Z_i\}$ un recouvrement ouvert de Z alors on a un diagramme exact d'ensembles

$$\mathrm{Hom}_k(Z,X) \to \prod_i \mathrm{Hom}_k(Z_i,X) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X) \quad ,$$

où les deux flèches sont définies par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(Z_j,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \prod_i \mathrm{Hom}_k(Z_i,X) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_k(Z_i,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X) \end{array} .$$

En particulier l'application $\mathrm{Hom}_k(Z,X) \to \prod_i \mathrm{Hom}_k(Z_i,X)$ est injective. Donc si $\{Di_j,\alpha\}_\alpha \to Z_i \cap Z_j$ est un recouvrement ouvert $\prod_{i,j} \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X) \to \prod_{i,j,\alpha} \mathrm{Hom}_k(D_{ij,\alpha},X)$ est injective. En composant avec les deux flèches $\prod_i \mathrm{Hom}_k(Z_i,X) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_k(Z_i \cap Z_j,X)$ on obtient un diagramme exact

$$\mathrm{Hom}_k(Z,X) \to \prod_i \mathrm{Hom}_k(Z_i,X) \rightrightarrows \prod_{i,j,\alpha} \mathrm{Hom}_k(D_{ij,\alpha},X) .$$

Cela montre bien que X est déterminé par sa restriction aux k-algèbres, $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\ \bullet,X) : (k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$.

Il s'ensuit qu'on peut identifier X avec ce foncteur. Soit maintenant F un foncteur $(k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$. On peut se demander dans quelles conditions il est un schéma ou plutôt isomorphe à un schéma.

<u>Définitions</u> : Soient F , F' deux foncteurs $(k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$. Un morphisme fonctoriel $F \to F'$ est <u>une immersion ouverte</u> (fermée) si pour tout schéma affine $Z = \mathrm{Spec}\ A$ et pour tout morphisme $Z \to F$ le produit fibré $F' \times_F Z$ est représenté par un sous-schéma ouvert (fermé) de Z i.e. il existe un sous-schéma ouvert (fermé) V de Z et un morphisme fonctoriel $V \to F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \longrightarrow & F \end{array}$$

soit cartésien.

$\{F_i \to F\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de F si pour tout schéma affine Z est tout morphisme $Z \to F$, $\{Z \times_F F_i \to Z\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de Z i.e. $Z \times_F F_i \to Z$ est représenté par un sous-schéma ouvert V_i de Z et $\bigcup_{i \in I} V_i = Z$.

Définition 4.1

Soit $F : (k\text{-alg}) \to (Ens)$. F est un schéma séparé si

1) F satisfait l'axiome de descente : pour tout recouvrement ouvert $\{Z_i \to Z\}$, avec Z, Z_i des schémas affines, le diagramme

$$F(Z) \to \prod_i F(Z_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(Z_i \times_Z Z_j)$$

est exact.

2) Il existe un recouvrement ouvert $\{\mathcal{U}_i \to F\}$ avec $\mathcal{U}_i$ des schémas affines satisfaisant à une des conditions équivalentes suivantes (de séparabilité) :

a) le morphisme canonique $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U}_j \to \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$ est une immersion fermée

b) Pour tout schéma affine Z et tout morphisme $Z \to F$, le morphisme canonique $Z \times_F \mathcal{U}_i \to Z \times \mathcal{U}_i$ est une immersion fermée (pour tout i)

c) Pour tout foncteur $F' : (k\text{-alg}) \to (Ens)$ et tout morphisme $F' \to F$, le morphisme canonique $F' \times_F \mathcal{U}_i \to F' \times \mathcal{U}_i$ est une immersion fermée (pour tout i).

La relation entre cette définition et la définition classique (avec des atlas) s'établit de la façon suivante. Rappelons la définition classique. Soit $\mathcal{U} = \coprod \mathcal{U}_i$ avec $\mathcal{U}_i$ des schémas affines et $R \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

une relation d'équivalence fermée. Posons $R_{ij} = R/\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$. Supposons que les projections $R_{ij} \to \mathcal{U}_i$, $R_{ij} \to \mathcal{U}_j$ sont des immersions ouvertes (en particulier $R_{ii} = \Delta_i$ la diagonale de $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i$). Le quotient $X = \mathcal{U}/R$ est un schéma d'après la définition classique. Montrons comme on construit le foncteur $\mathcal{U}/R$. Soit $Y = \operatorname{Spec} A$. Un morphisme

$$\phi : Y \dashrightarrow X$$

est donné par un recouvrement ouvert $Y' \to Y$ est une flèche $Y' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{U}$ telle qu'il existe une flèche $Y' \times_Y Y' \to R$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
Y' \times_Y Y' \arrow[r, "pr_i"] \arrow[d, "\phi''"'] & Y' \arrow[d, "\phi'"] \\
R \arrow[r, "pr_i"'] & \mathcal{U}
\end{tikzcd} \qquad (i = 1,2)$$

i.e. telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y' \times_Y Y' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\phi''"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & Y \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{U} \arrow[r, dashed] & X
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. On peut également demander que ϕ'' rende commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y' \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"'] & Y' \times Y' \arrow[d, "\phi' \times \phi'"] \\
R \arrow[r] & \mathcal{U} \times \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

ce qui exprime la compatibilité de ϕ' avec R (et montre aussi que ϕ'' s'il existe est unique). Deux flèches $Y' \rightrightarrows \mathcal{U}$ définissent la même flèche s'il existe $Y' \dashrightarrow R$ qui fait commutatif

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dl, dashed] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire si le morphisme $Y' \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ défini par ces deux flèches se factorise par $R \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\
R \arrow[r] & \mathcal{U} \times \mathcal{U}
\end{tikzcd} .$$

Si cette flèche $Y' \dashrightarrow R$ existe, il est clair qu'elle est unique. On vérifie alors que $R = \mathcal{U} \times_X \mathcal{U}$. En effet tout couple des flèches $Z \rightrightarrows \mathcal{U}$ qui sont égalées par $\mathcal{U} \to X$ se factorise par $R \rightrightarrows \mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, dashed] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[r, no head] & Z \arrow[d] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{U} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

et $Z \dashrightarrow R$ est unique, si elle existe. Il est facile maintenant de voir que $\{\mathcal{U}_i \to X\}$ est un recouvrement ouvert de X satisfaisant la condition b) de 4.1. En effet par construction X est un schéma dans le sens classique et $\mathcal{U}_i \to X$ est une immersion ouverte, donc, pour tout schéma affine Z et tout morphisme $f : Z \to X$, $\mathcal{U}_i \times_X Z = f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ est représenté par un sous-schéma ouvert de Z . La condition a) est remplie en vertu du fait que $R = \mathcal{U} \times_X \mathcal{U}$ et de l'hypothèse que R est fermée (i.e. $R_{ij} = \mathcal{U}_i \times_X \mathcal{U}_j$ est fermé dans $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$). Ainsi la condition 2) de 4.1 est vérifiée. La condition 1) est satisfaite par tout schéma dans le sens classique. Donc tout schéma classique est un schéma dans le sens de 4.1.

Réciproquement soit F un schéma dans le sens de 4.1. Soit $\mathcal{U} = \coprod \mathcal{U}_i$ et $R = \mathcal{U} \times_F \mathcal{U}$. Alors R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}$ et $F = \mathcal{U}/R$ évidemment. R est fermée en vertu de a). De plus $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U}_j = R_{ij} \to \mathcal{U}_i$ est une immersion ouverte car $\mathcal{U}_i \to F$ en est une.

Définition

Soient F , F' deux foncteurs $(k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$. Un morphisme fonctoriel $F' \to F$ est étale si pour tout schéma affine Z et tout morphisme $Z \to F$, le produit fibré $Z \times_F F'$ est représentable par un schéma et la projection $Z \times_F F' \to Z$ est un morphisme étale. Une famille $\{F_i \to F\}$ des morphismes étales est un recouvrement étale si pour tout schéma affine et tout morphisme $Z \to F$, $\{F_i \times_F Z \to Z\}$ est un recouvrement étale.

Définition 4.2

Un foncteur $F : (k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$ est un espace algébrique si

1) F est un faisceau pour la topologie étale : pour tout recouvrement étale $\{Z_i \to Z\}$ avec Z , Z_i des schémas affines le diagramme

$$F(Z) \to \prod_i F(Z_i) \rightrightarrows \prod F(Z_i \times_Z Z_j)$$

est exact.

2) Il existe un recouvrement étale $\{\mathcal{U}_i \to F\}$ avec $\mathcal{U}_i$ des schémas affines satisfaisant à une des conditions équivalentes suivantes :

a) $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U}_j \to \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$ est une immersion fermée ;

b) ......

c) ...... (comme dans 4.1).

On a également une définition équivalente par des atlas : F est un espace algébrique si c'est le quotient d'un schéma X par une relation d'équivalence $R \subset X \times X$ fermée et étale.

<u>Remarque</u>

La condition 1) (l'axiome de descente) n'est pas triviale même pour un recouvrement de la forme $Z' \to Z$. On a alors

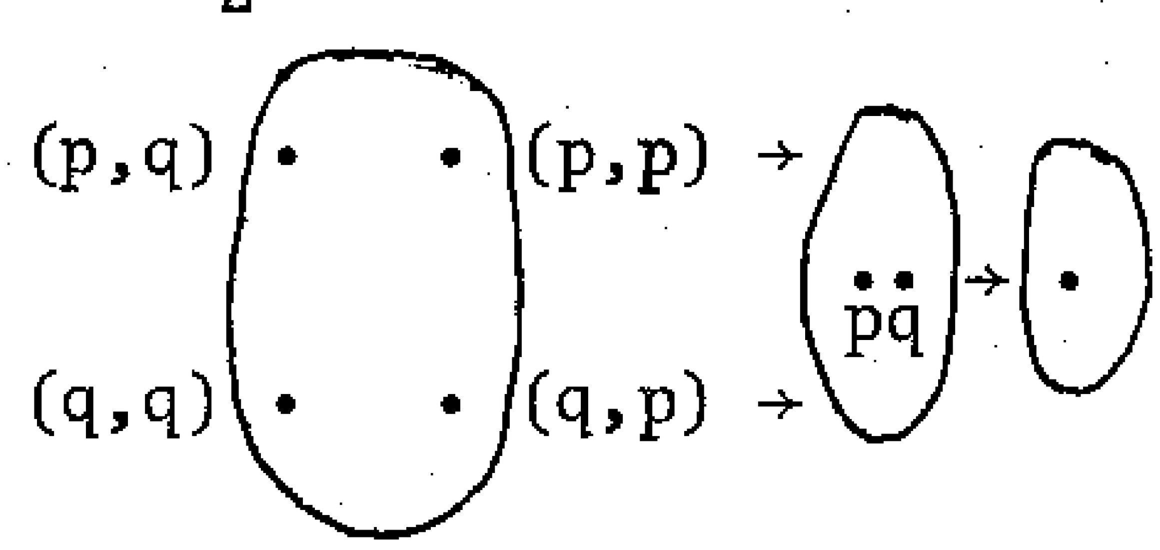
$$Z' \times_Z Z' \rightrightarrows Z' \to Z$$

donc

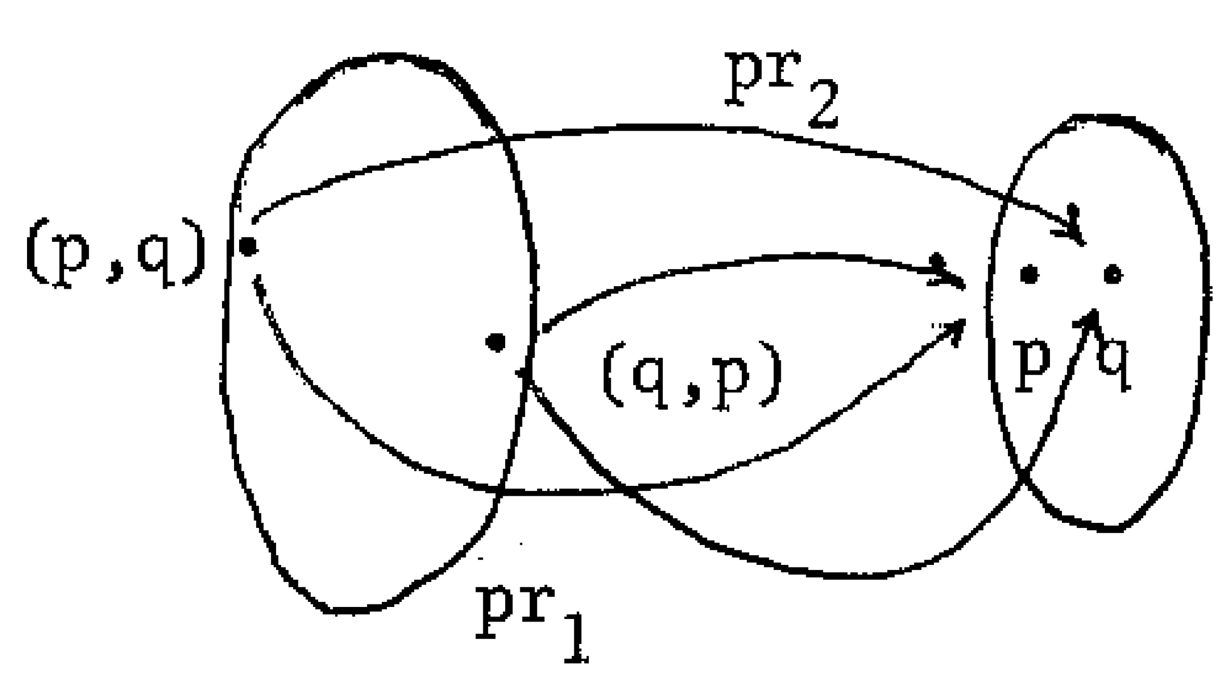
$$F(Z) \to F(Z') \rightrightarrows F(Z' \times_Z Z') \ .$$

Soit $\alpha \in F(Z')$ i.e. $\alpha : Z' \to F$ d'après Yoneda. Soient p,q deux points de Z', i.e. $p,q \in Z'(k)$, qui s'envoient dans le même point de Z . On a alors

$$Z' \, z_Z \, Z' \rightrightarrows Z' \to Z$$



et



d'où on voit que $\alpha \; pr_1 = \alpha \; pr_2$ implique $\alpha(k)(p) = \alpha(k)(q)$ i.e. si $\alpha \in F(Z)$ les deux points doivent avoir la même image.

Exemple 4.3

Soit G un groupe fini qui opère sur un schéma X librement, i.e. l'application

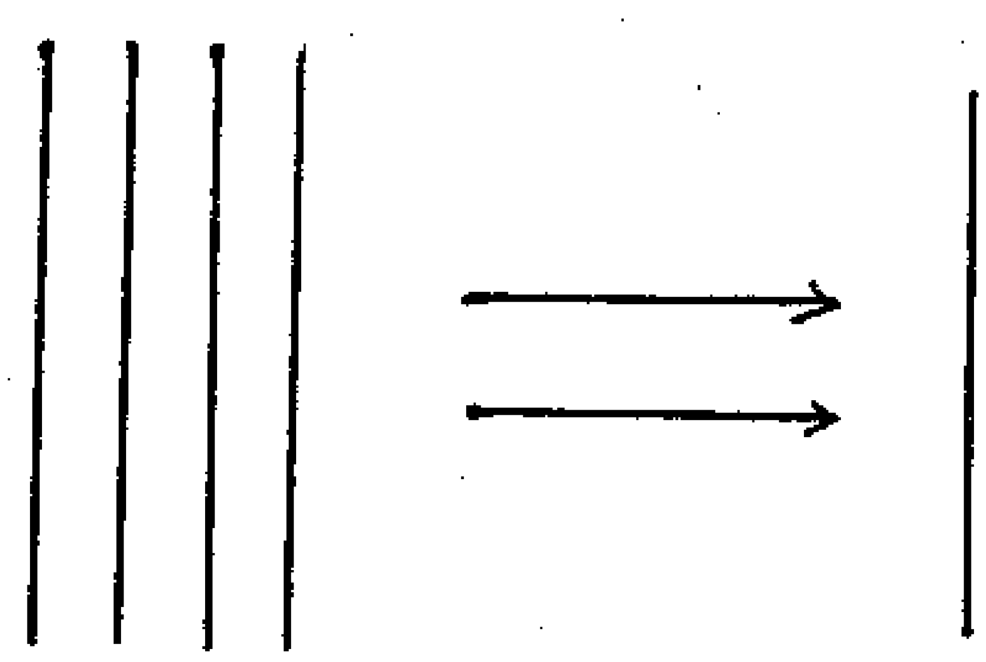
$$G \times X \to X \times X$$

définie par $(g,x) \to (gx,x)$ est injective. Donc on peut identifier $G \times X$ avec son image. Pour g fix $\{(gx,x) \mid x \in X\}$ est le graphe de g i.e. l'image de X par l'immersion $X \to X \times X$

$$\begin{tikzcd} & & X \\ X \arrow[urr, "1"] \arrow[rr] \arrow[drr] & & X \times X \arrow[u, "pr_2"'] \arrow[d, "pr_1"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

$$x \mapsto gx$$

Comme $X \to X \times X \xrightarrow{g^{-1} \times 1} X \times X$ est le morphisme diagonal qui est fermé, $X \to X \times X$ est une immersion fermée. Donc $G \times X$ est identifié avec un sous-schéma fermé de $X \times X$. Les deux projections $G \times X \rightrightarrows X$, définies par $(g,x) \to gx$, $(g,x) \to x$ sont évidemment étales, c'est X étalé en plusieurs feuilles (une pour chaque élément de G)



au-dessus de X . Ainsi $G \times X \subset X \times X$ est une relation d'équivalence étale. Donc X/G est un espace algébrique.

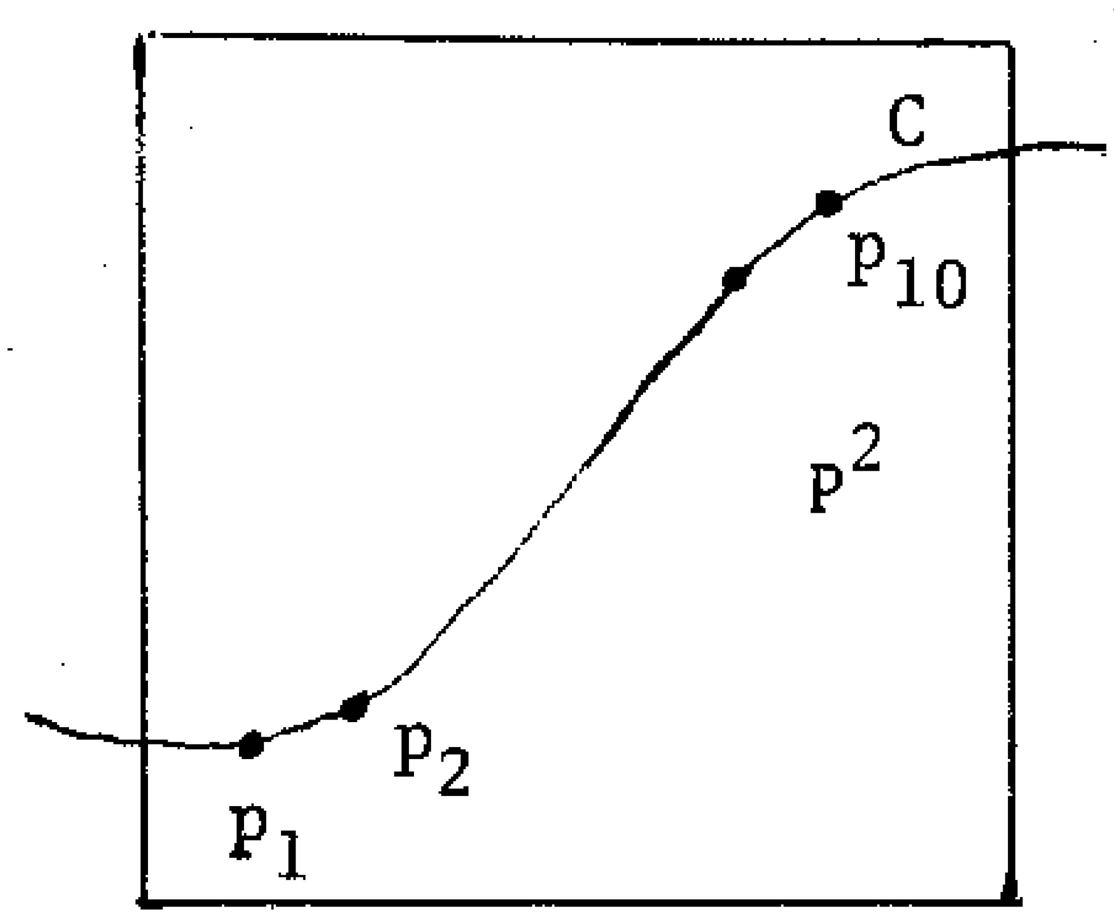
Si X est affine on peut voir que X/G est également un schéma (SGAD, exp.V). Mais en général X/G n'est pas un schéma (il y a un exemple de Hironaka avec X schéma de dimension 3 lisse sur C sur lequel $Z/2Z$ opère librement et tel que X/G n'a pas une structure de schéma [H]).

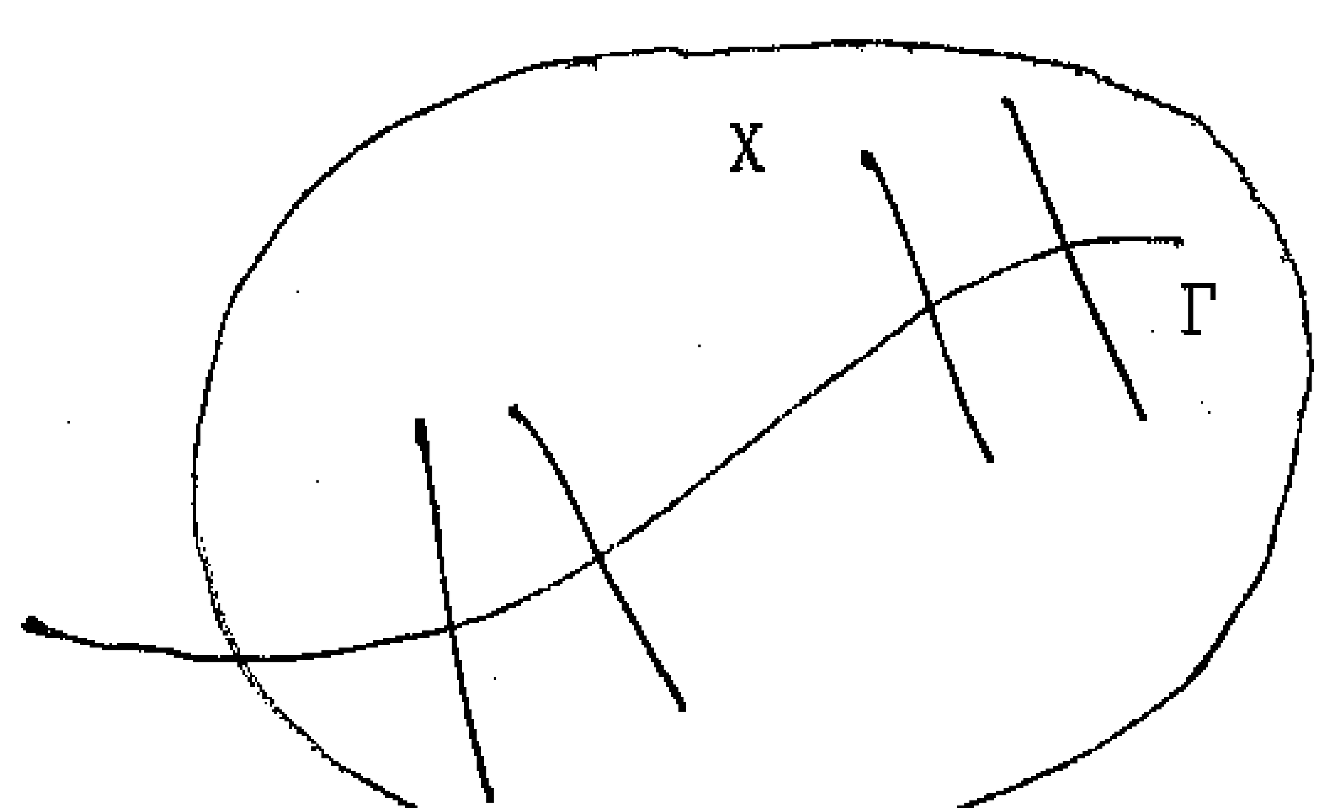
Exemple 4.4

Soit X une surface lisse sur k et C une courbe sur X . On se demande si on peut contracter C à un point p normal d'une autre surface $\overline{X}$ par un morphisme birationnel $X \to \overline{X}$ qui induit un isomorphisme $X\setminus C \cong \overline{X}\setminus\{p\}$. Il faut pour cela que C soit connexe d'après le théorème de connexion de Zariski (EGA III_1) et que la matrice carrée symétrique

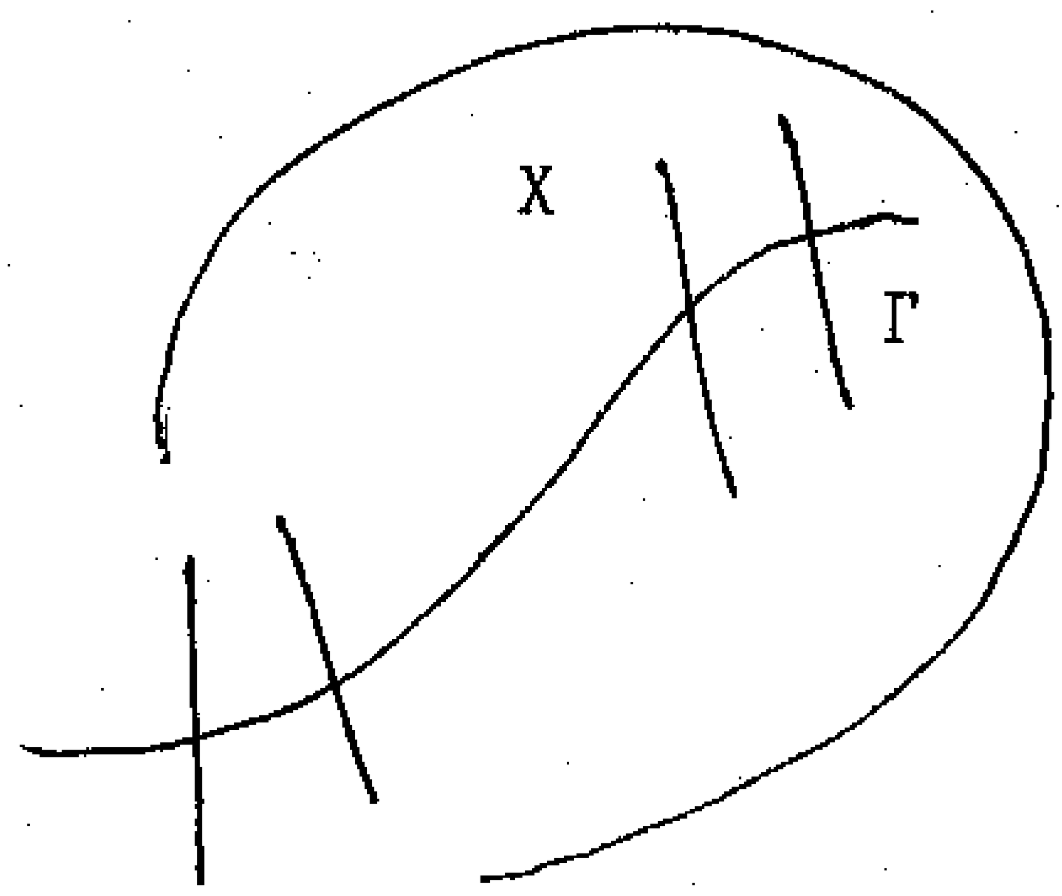
$$||(C_i,C_j)||$$

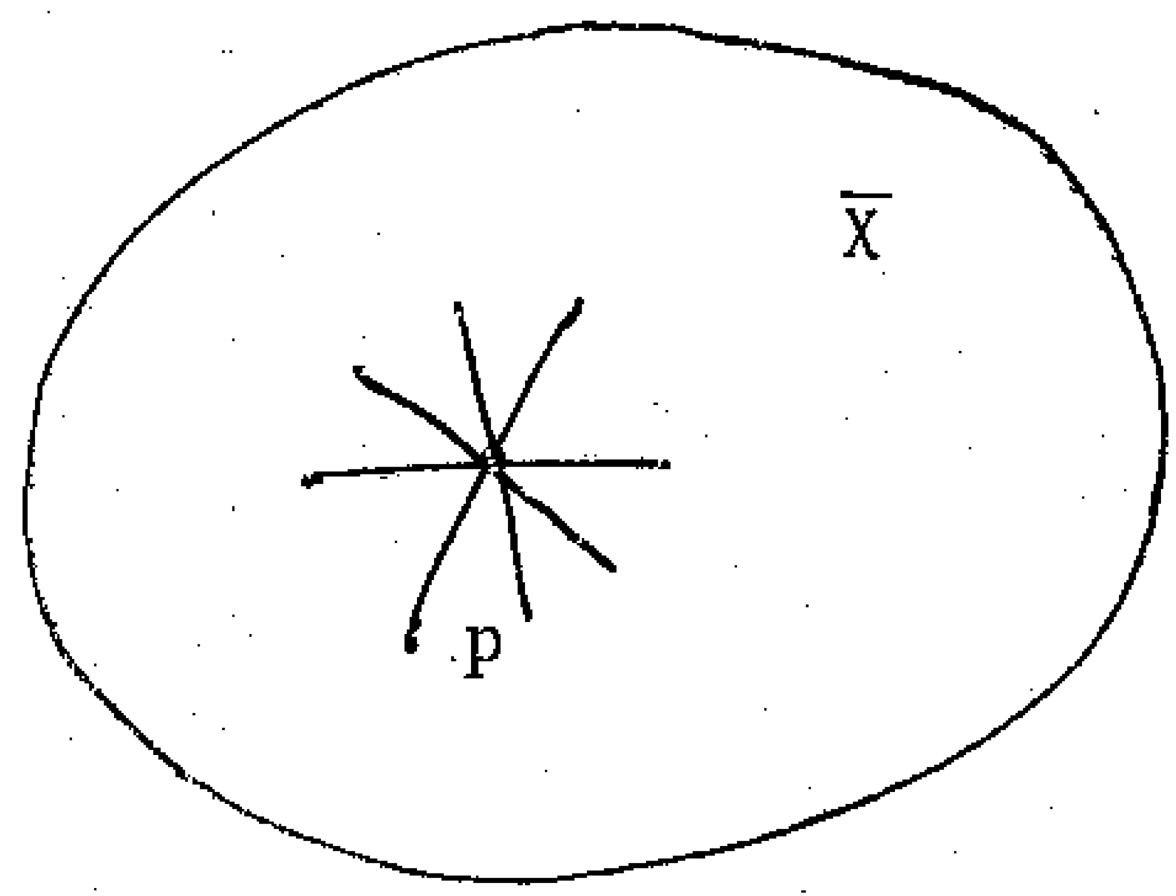
formée par les indices d'intersections deux à deux des composantes irréductibles de C , soit négativement définie ([M]) . Ces deux conditions sont aussi suffisantes pour l'existence d'un espace algébrique $\overline{X}$ comme on verra plus tard. Elles sont aussi nécessaires et suffisantes dans le cas analytique (Grauert, Math. Ann. 146 (1962), 331-368). Mais un exemple de Nagata montre que $\overline{X}$ n'existe pas toujours en tant que schéma. Soit P_2 le plan projectif et C une cubique non singulière et soit X la surface déduite de P_2 en éclatant dix points $p_1,\ldots,p_{10}$ de C



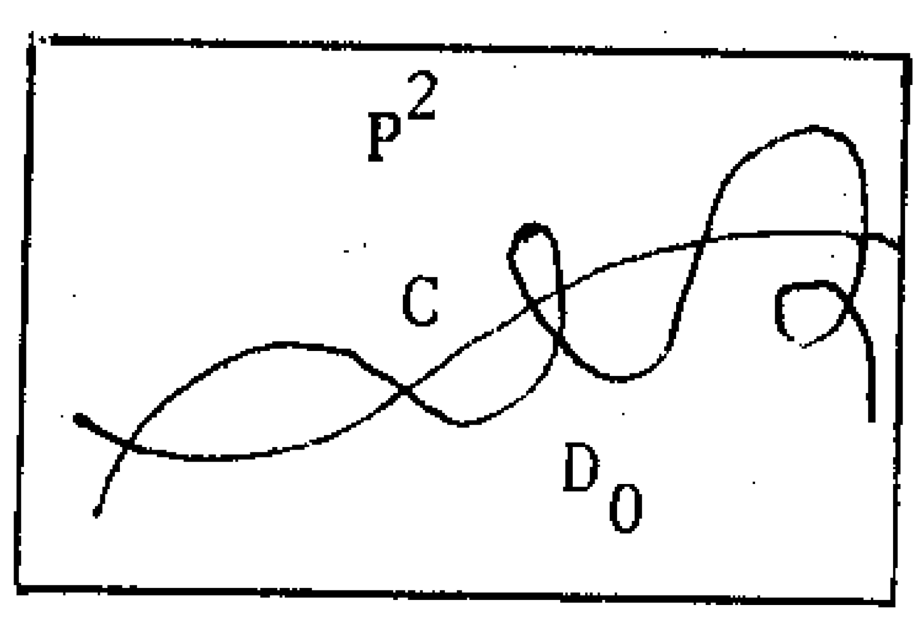


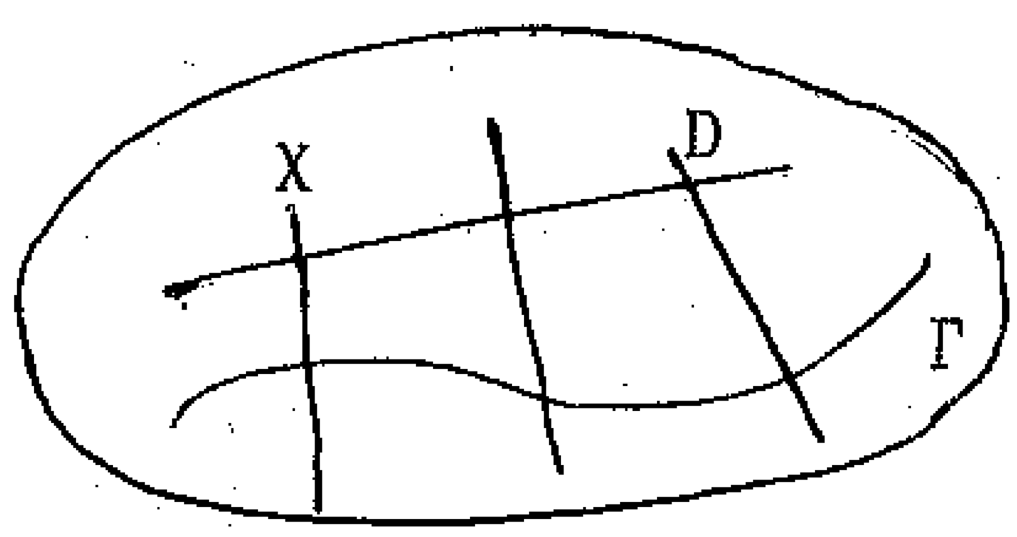
Les points $p_1,\ldots,p_{10}$ sont remplacés par dix droites projectives et la courbe irréductible Γ de X correspondant à C satisfait à $(\Gamma\cdot\Gamma) = -1$ car l'indice d'autointersection diminue d'unité après chaque éclatement d'un point. Montrons qu'en général, Γ ne peut pas être contractée à un point normal d'un schéma. Supposons le contraire, soit $X \to \overline{X}$ un morphisme qui transforme Γ dans un point p et qui est un isomorphisme en dehors de Γ .

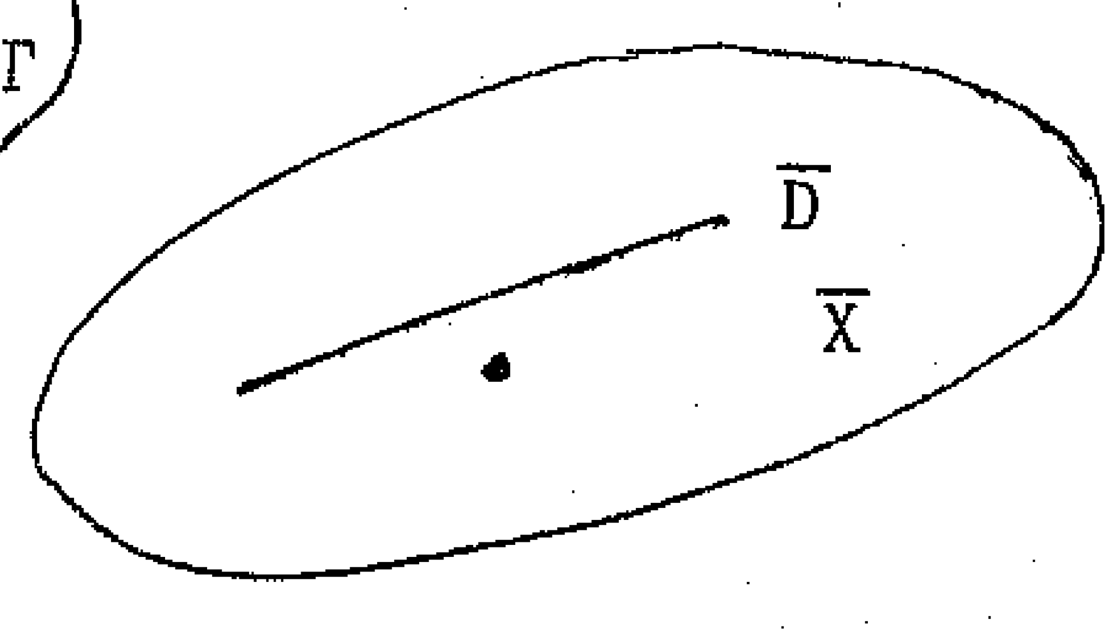




p a un voisinage affine dont la complémentaire est une courbe $\overline{D}$ (qui ne passe pas par p) . Prenons l'image inverse D de $\overline{D}$ sur X . Alors $D \cap \Gamma = \phi$. Il en résulte que l'image D_0 de D dans P^2 ne peut rencontrer C qu'en les p_i







Soit $D_0 \sim nL$ où L est une droite de P^2 et $n > 0$. Si r_i est la multiplicité de p_i dans $D^0 \cdot C$ on trouve sur C l'équivalence linéaire

$$\sum_{i=1}^{10} r_i\, p_i \sim n(L\cdot C)$$

ce qui est impossible si on avait choisi les p_i convenablement. En effet C est une courbe elliptique dont la jacobienne J est un tore dans le cas complexe. Si on fixe un point $c_0 \in C$ comme zéro les points de J correspondent aux points de C par l'application $x \in C \to \overline{x} =$ classe de $x-c_0$ pour l'équivalence linéaire. Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{10} r_i\, \overline{p}_i = ng \qquad n > 0$$

avec g le point correspondant à $L\cdot C$. Excepté des choix particuliers de k , J est un groupe abélien qui contient des sous-groupes de rang arbitraire. Donc on peut choisir $p_1,\ldots,p_{10}$ de telle façon qu'aucune relation $\sum_1^{10} r_i\, \overline{p}_i = ng$, $n > 0$ ne soit possible.

Cependant $\overline{X}$ existe en tant qu'espace algébrique. Cela veut dire qu'il existe un schéma $\overline{\mathcal{U}}$ et une relation d'équivalence étale $\overline{R} \subset \overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{U}}$ telle que $\overline{\mathcal{U}}/\overline{R} = \overline{X}$. Le morphisme $X \to \overline{X}$ est donné par un morphisme étale $\mathcal{U} \to X$ et un morphisme $\mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ (compatibles avec $\overline{R}$). Soit $\overline{C}$ l'image inverse de C dans $\mathcal{U}$. Alors $\mathcal{U}$ est un voisinage étale de C tel que sur $\mathcal{U}$ on puisse contracter $\overline{C}$ à un point dans la catégorie des schémas, $\mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ est la contraction. L'espace algébrique $\overline{X}$ est isomorphe à X en dehors du point p . Au point p il n'y a pas de fonction définie non constante.

<u>Définitions</u>

Un espace algébrique F est <u>localement de présentation finie</u> si F est un foncteur localement de présentation finie.

Cela revient à demander que F possède un recouvrement étale $\{Z_i \to F\}$ avec $Z_i = \operatorname{Spec} A_i$ et A_i k-algèbre de type fini.

F est <u>un espace algébrique de présentation finie</u> si c'est localement de présentation finie et il existe un recouvrement étale $\{Z_i \to F\}$ avec Z_i schéma affine indexé par un ensemble fini. En prenant $\mathcal{U} = \coprod Z_i$, $\mathcal{U}$ est un schéma affine de type fini sur k et le morphisme $\mathcal{U} \to F$ défini par les $Z_i \to F$ donne un recouvrement étale avec une seule composante.

<u>Proposition 4.5</u>

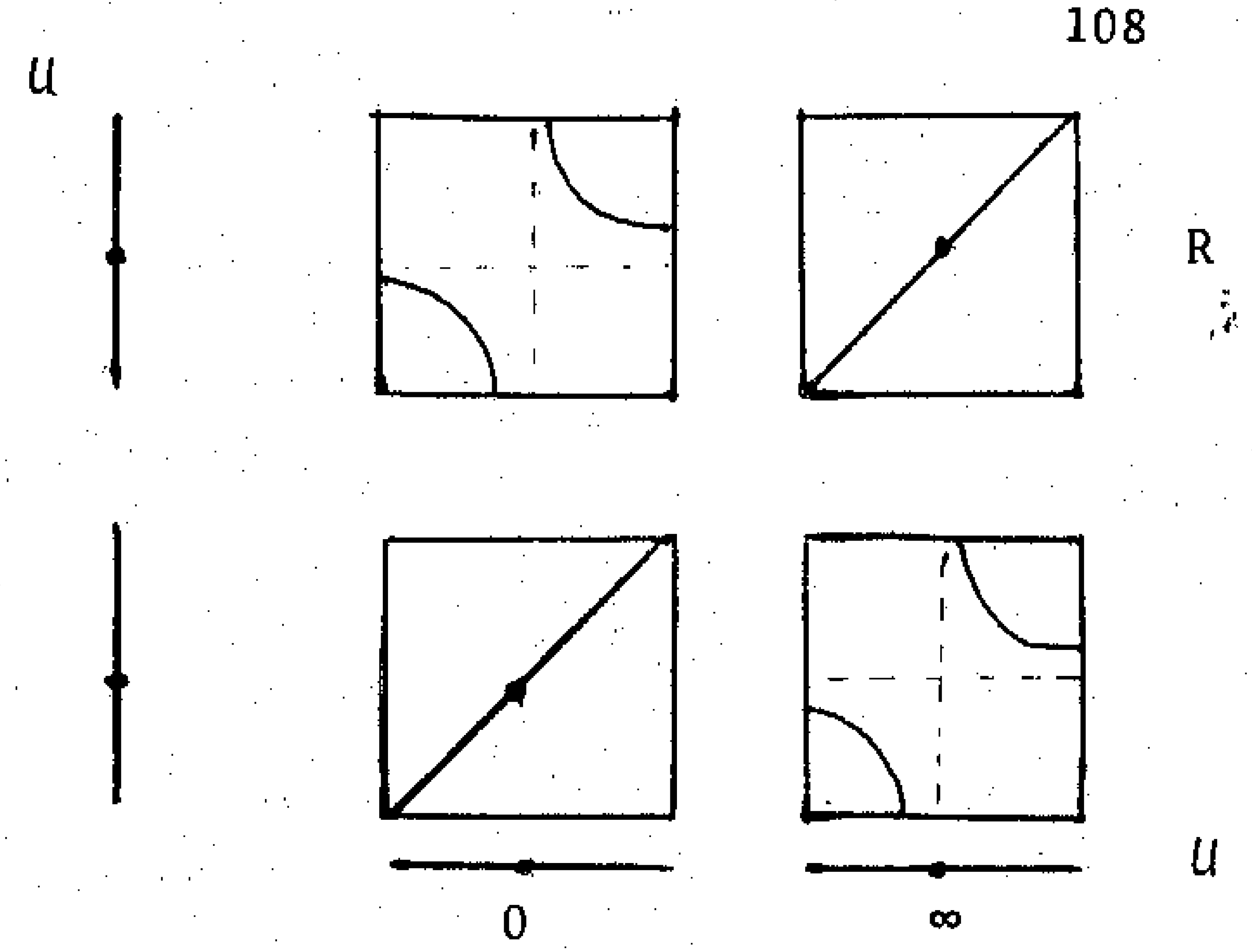
Soit X un espace algébrique de présentation finie sur k. Il existe un ouvert dense de X qui est un schéma.

<u>Remarques</u>

1) Un morphisme $F' \to F$ d'espaces algébriques est une immersion ouverte dense si pour tout morphisme $Z \to F$ avec Z schéma affine la projection $F' \times_F Z \to Z$ est une immersion ouverte dense.

2) <u>Théorème</u> (Grothendieck, SGAD exp.V, No 4). Soit $\mathcal{U}$ un schéma quasi affine et $R \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ une relation d'équivalence plate et finie (i.e. les projections $R \rightrightarrows \mathcal{U}$ sont plates et finies). Alors le quotient $\mathcal{U}/R$ en tant que faisceau dans la topologie f.p.p.f. est un schéma affine.

On pourrait essayer de démontrer la proposition en appliquant ce théorème. Mais dans notre cas R n'est généralement pas fini, il est seulement quasi fini (car étale). Par exemple, si $X = P^1$, $\mathcal{U} = 2E^1 = E^1 \coprod E^1$ (E^1 la droite affine) et $R \subset 4E^1$ a le graphe



où au-dessus de 0 et ∞ il n'y a q'un point tandis que au-dessus de tout autre point il y en a deux. Il en résulte que $R \rightrightarrows \mathcal{U}$ ne sont pas finies car tout morphisme étale étant non ramifié, les fibres d'un morphisme étale fini au-dessus d'une composante connexe ont le même nombre de points. Si on enlève les points 0 et ∞ de $\mathcal{U}$ on trouve un ouvert $V = \mathcal{U} \setminus \{0,\infty\}$ tel que la restriction de R à V soit $R_V = R \times_{\mathcal{U}} V$ qui est fini sur V. Donc V/R_V est un ouvert affine dans notre cas $P^1 \setminus \{0,\infty\} = E^1 \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[x,\frac{1}{x}]$ qui est partout dense dans P^1. On pourrait essayer d'étendre ce raisonnement dans le cas général. Puisque X est de présentation finie on a déjà remarqué qu'il existe un recouvrement étale $\mathcal{U} \to X$ avec $\mathcal{U}$ schéma affine (de type fini sur k). Comme R est étale, $R \xrightarrow{pr_1} \mathcal{U}$ est étale donc il existe un ouvert dense V de $\mathcal{U}$ tel que la restriction de pr_1 à V soit finie i.e. tel que la projection $R \times_{\mathcal{U}} V \to V$ soit finie où R est muni de la structure de $\mathcal{U}$-schéma définie par pr_1. Or la relation d'équivalence induite sur V par R a le graphe $R_V = R \times_{(\mathcal{U}\times\mathcal{U})} V \times V$ qui ne coïncide pas nécessairement avec $R \times_{\mathcal{U}} V$, c'est seulement un ouvert de $R \times_{\mathcal{U}} V$. Donc on n'est plus certain que $R_V \to V$ soit étale, ce qui gâche les choses. Nous allons prendre une autre voie.

Preuve de 4.5.

Soit $\mathcal{U} \to X$ un recouvrement étale avec $\mathcal{U}$ un k-schéma affine de type fini. Pour tout $u \in \mathcal{U}$ soit $N(u)$ les nombres des points géométriques de $\mathcal{U}_u$, avec $\mathcal{U}_u$ défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_u & \longrightarrow & k(u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} & \longrightarrow & X \end{array}$$

$(k(u) \to X = k(u) \hookrightarrow \mathcal{U} \to X)$ $\mathcal{U}_u \to k(u)$ est un recouvrement étale de type fini de $k(u)$ donc défini par une $k(u)$-algèbre finie séparable A. Donc $A = \prod_{i=1}^{r} k_i$ avec k_i extension finie séparable de $k(u)$. Par définition $N(u)$ est le nombre des points de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{k(u)}(A, \overline{k(u)})$, donc $N(u) = \sum_{i=1}^{r} [k_i : k(u)]$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_u & \longrightarrow & k(u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{pr_i} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle pr_j}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} & \longrightarrow & X \end{array} \qquad (i \neq j)$$

dont tous les carrés sont cartésiens, ce qui fait voir que $N(u)$ est aussi le nombre des points géométriques de la fibre de pr_i au-dessus de u $(i = 1,2)$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des points $u \in \mathcal{U}$ de maximum relatif de N tels que, en plus, l'anneau réduit de $O_{\mathcal{U},u}$ (i.e. $O_{\mathcal{U},u}/I$ avec I le radical nilpotent de $O_{\mathcal{U},u}$) soit normal. On va voir que $\mathcal{V}$ est un ouvert dense de $\mathcal{U}$ et que

$$R \times_P (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = R \times_P (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) \qquad (P = \mathcal{U} \times \mathcal{U})$$

Note 1

Donc $R \times_p (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) = R \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) = R \times_p (\mathcal{V}$ car $(\mathcal{V} \times \mathcal{U}) \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) = \mathcal{V} \times \mathcal{U}$. Comme $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, il en résulte $R \times_p (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = R \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ i.e. $R \times_p (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ c'est précisément la relation d'équivalence R_V induite par R dans $\mathcal{V}$. Or le diagramme

$$\begin{tikzcd}
R \times_p (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \arrow[r] & \mathcal{V} \\
R \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr_2"'] & \mathcal{U} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

est cartésien et de même

$$\begin{tikzcd}
R \times_p (\mathcal{V} \times \mathcal{U}) \arrow[r] & \mathcal{V} \\
R \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr_1"'] & \mathcal{U} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

On en déduit que

$$\begin{tikzcd}
R_V \arrow[r] & \mathcal{V} \\
R \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr_i"'] & \mathcal{U} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad i = 1,2$$

est cartésien ce qui montre que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r] & Y = v/R_V \arrow[d] \\
\mathcal{U} \arrow[u, hook] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc $Y \to X$ est une immersion ouverte dense. Il n'en reste qu'à voir que Y est un schéma. Pour cela, il suffit de prouver que

$R_V \to \mathcal{V}$ est fini (SGAD. exp. V, No 4 ou [Q]). Or $R \to \mathcal{U}$ est étale surjectif donc on a une factorisation (de Stein)

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

avec $S \to \mathcal{U}$ un recouvrement fini et $R \hookrightarrow S$ immersion ouverte (EGA, $\underline{\overline{N}}$,)
On peut supposer aussi $R \hookrightarrow S$ dense en remplaçant S par la clôture de R dans S, le cas échéant. Maintenant, il suffit de voir que $S \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V} = R \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}$ car alors $R_V \to \mathcal{V}$ sera fini (on voit facilement que $R \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V} = R \times_P (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, $P = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$). Donc il reste seulement à vérifier ensemblistiquement que $f^{-1}(\mathcal{V}) \subset R$. Le problème étant local sur $\mathcal{U}$ et "topologique", on peut supposer $\mathcal{U}$ réduit. De plus, par définition, $\mathcal{V}$ est contenu dans l'ouvert dense de $\mathcal{U}$ fermé par les points u tels que $\mathcal{O}_{\mathcal{U},u}$ soit normal. Donc on peut supposer $\mathcal{U}$ normal. Cela implique R normal (EGA1, exp. I, Th. 9.5). On peut remplacer donc S par S_{red} de façon à avoir S réduit. Enfin, en remplaçant S par la somme directe de ses composantes irréductibles on aura

$$R = \coprod_{i=1}^{m} R_i$$

$$S = \coprod_{i=1}^{m} S_i$$

avec $S_i = \overline{R}_i$, S affine. Soit $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A$, $S_i = \operatorname{Spec} A_i$, $K = \operatorname{Frac} A$, $K_i = \operatorname{Frac} A_i$ $(i = 1,\dots,m)$. K_i est une extension finie séparable de K car ce sont les fibres dans les points génériques de S_i et $\mathcal{U}$ respectivement ou f est étale. Il en résulte que pour tout $u \in \mathcal{U}$ le nombre des points géométriques $N_i(u)$ de la fibre de $S_i \to \mathcal{U}$ dans u satisfait à

$$N_i(u) \leq [K_i : K]$$

([R], Chap. I, Th. 1.4.2). De plus (ex. cit.) ce nombre est égal à $[K_i : K]$ dans un ouvert dense T_i de S_i. On en déduit que N atteint son maximum dans l'image de $\coprod_{i=1}^{m} (T_i \cap R_i)$ (et $N(u) = \sum_{i=1}^{m} [K_i : K]$). Donc $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{U}$ car $R \to \mathcal{U}$ ouvert (étant étale). On voit comme cela que $\mathcal{V}$ est un ouvert dense de $\mathcal{U}$.

De plus dans chaque point $u \in \mathcal{U}$ la fibre de $R \to \mathcal{U}$ dans u coïncide avec la fibre de f car elle contient le maximum des points géométriques que la fibre de f peut avoir. Cela montre que $f^{-1}(\mathcal{V}) \subset R$ et la démonstration est complète.

<u>Le faisceau structurel d'un espace algébrique</u> X est le faisceau d'anneaux pour la topologie étale défini sur les schémas affines, qui forment une base de la topologie, en prenant pour tout morphisme étale

$$Z = \operatorname{Spec} B \to X$$

$\Gamma(Z,O_X) = B = \Gamma(Z,O_Z)$. C'est un faisceau, car si $Z' \to Z$ est étale surjectif, $Z' = \operatorname{Spec} B'$, alors

$$\Gamma(Z,O_X) \to \Gamma(Z',O_X) \rightrightarrows \Gamma(Z' \times_Z Z',O_X)$$

est exacte et

$$\Gamma(Z_1 \amalg Z_2, O_X) = \Gamma(Z_1, O_X) \times \Gamma(Z_2, O_X)$$

(Z_1, Z_2 étales sur X).

En particulier pour trouver $\Gamma(X,O_X)$ on prend un recouvrement étale $\{U_i \to X\}$ avec U_i des schémas affines et

$$\Gamma(X,O_X) = \mathrm{Ker}(\prod_i \Gamma(U_i, O_{U_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Gamma(U_i \times_X U_j, O_X)) \quad .$$

On dit qu'un morphisme $X' \to X$ d'espaces algébriques est étale si pour tout schéma affine U' et tout morphisme étale $U' \to X'$ le morphisme composé $U' \to X' \to X$ est étale.

Par définition un point $x \in X$ est un monomorphisme (de foncteurs) $\mathrm{Spec}\ K \to X$ où K est un corps. Un <u>point géométrique</u> est un morphisme $\mathrm{Spec}\ k \to X$ avec k un corps algébriquement clos. L'anneau local pour la topologie étale de X dans x est

$$\tilde{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \to X \text{ étale}} \Gamma(U, O_U)$$

où les morphismes $U \to X$ étales sont supposés de sources U schémas affines et tels que x soit contenu dans l'image de chacun. Si K n'est pas algébriquement clos, l'existence d'un tel U (sans extensions résiduelles de K) n'est pas triviale mais c'est un théorème. La cohomologie des faisceaux quasi cohérents pour les espaces algébriques marche aussi bien que pour les schémas en utilisant la topologie étale au lieu de la topologie de Zariski (Knutson, Algebraic Spaces). Un faisceau de O_X-modules est quasi cohérent (cohérent) s'il induit un faisceau quasi cohérent (cohérent) sur tout schéma affine U étale sur X.

Deux points $p_i \to X$ $(i = 1,2)$ sont équivalents s'il y a un X-morphisme $p_1 \to p_2$. Il en résulte que celui-ci est un isomorphisme donc la relation est symétrique. L'ensemble $|X|$ des classes des points de X peut être topologisé en prenant comme fermés les sous-ensembles $|Y|$ avec $Y \subset X$ une immersion fermée (on en déduit une application injective $|Y| \to |X|$ et on identifie $|Y|$ avec son image). Un morphisme $X_1 \to X_2$ d'espaces algébriques est propre, par définition, s'il est de type fini et universellement fermé. On a les résultats suivants ([K]) :

- le théorème de finitude : $R^q f_* F$ est cohérent pour f propre et F cohérent ;

- le lemme de Chow : pour tout espace algébrique de type fini sur k, $X \to \mathrm{Spec}\ k$, il existe un k-schéma quasi projectif X' et un k-morphisme birationnel propre $X' \to X$ (i.e. qui est un isomorphisme aux points génériques) ;

- le critère de Serre : X espace algébrique de type fini sur k et $H^1(X,F) = 0$ pour tout O_X-faisceau F cohérent $\Rightarrow$ X est un schéma affine ; on en déduit le

<u>Corollaire 4.6</u>. Soit X un espace algébrique localement de type fini sur k. Alors si X_{red} est un schéma X l'est aussi.

<u>Preuve</u>. X et X_{red} ont le même espace topologique sous-jacent. On se réduit au cas X_{red} affine (noethérien). On a une suite exacte

$$0 \to I \to O_X \to O_{X_{red}} \to 0$$

avec I nilpotent. Il en résulte que tout O_X-faisceau cohérent F a une filtration finie

$$F \supset IF \supset I^2F \supset \ldots \supset I^sF = 0$$

dont les quotients successifs sont des faisceaux cohérents sur X_{red}. Cela prouve que la cohomologie de F est triviale.

Théorème 4.7

Soit X un espace algébrique de type fini sur k , lisse et de dimension 2 . Alors X est un schéma.

Preuve. D'après le lemme de Chow, il existe un schéma quasi projectif sur k , $X' \to \operatorname{Spec} k$ et un k-morphisme birationnel propre $g : X' \to X$. On peut supposer X' non singulière i.e. lisse sur k , autrement on peut remplacer X' par la surface obtenue après une résolution des singularités de X' . D'après un théorème de Zariski, tout morphisme birationnel propre $S' \to S$ entre deux surfaces algébriques non singulières (i.e. k-schémas de type fini, lisses et de dimension 2) est une succession d'éclatements de points. Ce théorème s'étend dans notre cas en prenant un recouvrement étale $\mathcal{U} \to X$ avec $\mathcal{U}$ k-schéma affine. En effet on obtient un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[d] & \mathcal{U}' \arrow[l] \arrow[d] \\ X & X' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{U}'$ schéma lisse (car $\mathcal{U}' \to X'$ est étale) quasi projectif et $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ morphisme birationnel propre. Donc $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ est un produit d'éclatements ce qui se descend en bas. On a donc une succession

$$X_0 = X \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_{n-1} \leftarrow X' = X_n$$

où $X_{i+1} \to X_i$ est un éclatement d'un point. Il suffit donc de montrer que X_{n-1} est un schéma i.e. on peut supposer que $X' \to X$ est obtenu en faisant éclater un point $x \in X$. Mais alors l'image inverse de x est une courbe exceptionnelle C de premier espace i.e. $C \overset{\sim}{\to} P^1$ et telle que son indice d'autointersection sur X' soit $(C,C) = -1$. D'après le critère de Castelnuovo, on peut contracter C à un point d'un schéma lisse sur k et quasi projectif Y

$$\begin{aligned} X' &\to Y \\ C &\mapsto y \quad . \end{aligned}$$

Alors la correspondance birationnelle entre Y et X définie par

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & X \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme en x (Zariski's Main Theorem, qui s'étend aux espaces algébriques). Or cette correspondance est un isomorphisme en dehors de x car

$$\begin{tikzcd} (X'-C) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\wr"'] & Y-\{y\} \\ & X-\{x\} \end{tikzcd} \quad .$$

Donc $X \overset{\sim}{\to} Y$ i.e. X est un schéma.

<u>Théorème 4.8</u>

Soit G un espace algébrique de type fini sur k (k algébriquement clos ou un anneau local artinien de corps résiduel algébriquement clos). On suppose que G est un groupe. Alors G est un schéma.

<u>Preuve</u>. Soit d'abord k un corps. Il y a un ouvert dense $\mathcal{U}$ de G qui est un schéma affine. On le translate et cela donne un recouvrement <u>ouvert</u> de G par des schémas affines. Donc G est un schéma. Dans le cas d'un anneau local artinien, on passe par 4.6. Si k est un corps qui n'est pas algébriquement clos, le théorème est encore vrai, mais il faut faire une petite astuce de descente du corps de base.

NOTE 1

On va montrer plus tard au cours de la démonstration que est un ouvert dense. Ici on montre que

$$R \times_p (U \times V) \quad R \times_p (V \times U) \quad .$$

Le problème est purement ensembliste car ce sont des sous-schémas ouverts de R . Donc il suffit de voir que si $x \in R$ et $u_i = pr_i(x)$ alors $u_1 \in V$ implique $u_2 \in V$. La condition sur la fibre se vérifie en montrant que $N(u_1) = N(u_2)$. En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & k(u_1) \arrow[dr] & \\ k(x) \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\ & k(u_2) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $k(x)$ est une extension algébrique séparable de $k(u_i)$ $(i = 1,2)$. On en déduit que $N(u_i)$ $(i = 1,2)$ est la même chose que le nombre des points géométriques de la fibre de $U \to X$ dans le point $k(x) \to X$. Maintenant il reste à prouver que $O_{U,u_1}/I_1$ normal, avec I_1 le radical nilpotent, implique $O_{U,u_2}/I_2$ normal. Pour cela, on peut supposer U réduit. Alors on a les deux flèches étales $O_{U,u_1} \to O_{R,x}$, $O_{U,u_2} \to O_{R,x}$ définies par les projections $R \rightrightarrows U$. Du fait que O_{U,u_1} est normal on déduit $O_{R,x}$ normal (EGA1, exp. I,) à l'aide de la première flèche ; la deuxième et le fait que $O_{R,x}$ est normal montre alors que O_{U,u_2} est aussi normal (loc. cit.).

CHAPITRE V

LE CRITERE DE REPRESENTABILITE POUR LES ESPACES ALGEBRIQUES

Définitions

Soit P une propriété de schémas. On dit que P est locale pour la topologie étale si pour tout X et pour tout recouvrement étale $\{X_i\}_{i\in I} \to X$ on a $P(X) \iff P(X_i)$ pour tout $i \in I$.

Soit P une propriété de morphismes des schémas. On dit que P est locale pour la topologie étale si pour tout morphisme $f : X \to Y$ tout recouvrement étale $\{Y_i\} \to Y$ de Y et tout recouvrement étale $\{X_{ij}\} \to X \times_Y Y_i$ on a

$$P(f) \iff P(f_{ij}) \quad \text{pour tout } i,j$$

où f_{ij} est le morphisme composé $X_{ij} \to X \times_Y Y_i \to Y_i$.

La définition d'une propriété locale de schémas s'étend trivialement aux espaces algébriques en prenant pour un recouvrement étale $\{U_i\} \to X$ arbitraire

$$P(X) \iff P(U_i) \quad \text{pour tout } i .$$

Cela ne dépend pas du choix du recouvrement $\{U_i\} \to X$ car P est locale. Similairement on étend la définition d'une propriété de morphismes des schémas, qui est locale pour la topologie étale, aux morphismes d'espaces algébriques.

Exemples :

1) Propriétés de schémas locales pour la topologie étale :

régulier, réduit, localement noethérien.

2) Propriétés des morphismes des schémas locales pour la topologie étale : lisse, étale, plat, localement de présentation finie.

3) Contre-exemples : pour les schémas la propriété d'être quasi compact ou la propriété d'être séparé ; pour les morphismes être affine, projectif, propre.

Soit $F : (k\text{-alg}) \to (\text{Ens})$ un foncteur, A une k-algèbre de type fini et $\xi, \eta \in F(A)$. Soit N le noyau du couple de flèches

$$A \underset{\eta}{\overset{\xi}{\rightrightarrows}} F$$

dans la catégorie des foncteurs, dont pour toute k-algèbre B on a

$$N(B) = \{f : A \to B \mid F(f)(\xi) = F(f)(\eta)\} \quad .$$

Si $Z = \operatorname{Spec} A$ on peut également écrire

$$N(B) = \{\phi : \operatorname{Spec} B \to Z \mid \xi\phi = \eta\phi\}$$

i.e. N est un sous-foncteur de Z , le noyau défini par le diagramme exact

$$N \to Z \underset{\eta}{\overset{\xi}{\rightrightarrows}} F \quad .$$

<u>Proposition 5.1</u>

Si F est un espace algébrique, N est représenté par un sous-schéma fermé de Z .

<u>Preuve</u>. Soit $Z_\xi \times_F Z_\eta$ le produit fibré du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Z_\xi \times_F Z_\eta \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\eta"] \\ Z \arrow[r, "\xi"'] & F \end{tikzcd} .$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & Z_\xi \times_F Z_\eta \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "\Delta"'] & Z \times Z \end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc la proposition revient à montrer que pour tout couple de flèches

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd}$$

le morphisme canonique $Z \times_F Y \to Z \times Y$ est une immersion fermée (ce qui en est un cas particulier car $Z \times_F Y \to Z \times Y$ est le noyau du couple $Z \times Y \rightrightarrows F$). Soit $\{U_i\}_{i \in I} \to F$ un recouvrement étale et supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $Z \to F$ se factorise par $U \to F$ avec $U = U_{i_0}$. Alors $Z \times_F Y = Z \times_U (U \times_F Y)$ et $U \times_F Y$ est un sous-schéma fermé de $U \times Y$(4.2, b)). Donc $Z \times_F Y$ est un sous-schéma fermé de $Z \times_U (U \times Y) = Z \times Y$. Dans le cas général si $Z_i = Z \times_F U_i$, $\{Z_i\} \to Z$ et un recouvrement étale de Z (4.2) et par descente étale (SGA I) on en est réduit à prouver l'assertion pour $Z_i \to F$, qui se factorise par $U_i \to F$.

Théorème 5.2

Soit F un foncteur $(k\text{-alg}) \to (\mathrm{Ens})$. On suppose k algébriquement clos. F est un espace algébrique localement de présentation finie,

0) (faisceau) F est un faisceau pour la topologie étale.

1) (finitude) F est localement de présentation finie.

2) (représentabilité relative). Pour tout k-schéma affine de type fini Z et tout couple de flèches $Z \rightrightarrows F$ le noyau N est représenté par un sous-schéma fermé de Z .

3) (proreprésentabilité). Pour tout $\xi_0 \in F(k)$ il existe une déformation effective universelle.

4) (vache). Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un k-schéma de type fini $\xi \in F(U)$, $u \in U(k)$ et $\xi_0 = \xi \circ u$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\xi_0"] & \\ U \arrow[r, "\xi"'] & F \end{tikzcd}$$

On suppose que ξ réalise la déformation universelle de ξ_0 au point u (i.e. $(\hat{O}_u,\zeta)$ avec $\zeta : \operatorname{Spec} \hat{O}_u \to U \xrightarrow{\xi} F$ constitue une <u>déformation universelle effective de</u> ξ_0). Alors ξ réalise la déformation universelle effective de $\xi \circ u'$ en tout point $u' \in U(k)$ d'un voisinage étale de u dans U .

<u>Preuve</u>. Montrons que les conditions 0) - 4) sont suffisantes. Par hypothèse F est un faisceau pour la topologie étale. Donc il s'agit de trouver un recouvrement étale $\{U_i\} \to F$ avec U_i des k-schémas affines tels que pour tout k-schéma affine Z et tout morphisme $Z \to F$, $U_i \times_F Z$ soit un sous-schéma fermé de $U_i \times Z$.

Pour tout $\xi_0 \in F(k)$ il existe une déformation universelle effective, d'après 3). Par le théorème d'algébrisation 3.15, il existe une algébrisation $(\mathcal{U}_{\xi_0}, u_{\xi_0}, \xi_{\xi_0})$ de cette déformation. $\mathcal{U}_{\xi_0}$ est un schéma affine de type fini sur k et $\xi_{\xi_0} : \mathcal{U}_{\xi_0} \to F$ réalise la déformation universelle effective de ξ_0 dans u_{ξ_0}. Donc, d'après 4) on peut restreindre éventuellement $\mathcal{U}_{\xi_0}$ de telle façon que ξ_{ξ_0} réalise la déformation universelle de $\xi_{\xi_0} \circ u'$ dans tout point $u' \in \mathcal{U}_{\xi_0}(k)$.

Soit $Z \to F$ avec Z un k-schéma affine. Montrons que $\mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z$ est un sous-schéma fermé de $\mathcal{U}_{\xi_0} \times Z$. En vertu de l'hypothèse 1) $Z \to F$ se factorise en $Z \to Z_i \to F$ avec Z_i un k-schéma affine de type fini. Alors $\mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z = (\mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z_i) \times_{Z_i} Z$ donc il suffit de voir que $\mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z_i$ est un sous-schéma fermé de $\mathcal{U}_{\xi_0} \times Z_i$, car $(\mathcal{U}_{\xi_0} \times Z_i) \times_{Z_i} Z = \mathcal{U}_{\xi_0} \times Z$. On est ainsi ramenés à l'hypothèse supplémentaire que Z est de type fini sur k. Or dans ce cas, l'assertion est garantie par 2), $\mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z$ étant le noyau de $\mathcal{U}_{\xi_0} \times Z \rightrightarrows F$.

Il est facile de voir que $Z_{\xi_0} = \mathcal{U}_{\xi_0} \times_F Z \to Z$ est étale. En effet, comme k est supposé algébriquement clos, d'après le théorème des zéros de Hilbert, il suffit de vérifier que $Z_{\xi_0} \to Z$ est étale dans tout point $p \in Z_{\xi_0}(k)$. Or $\pi : Z_{\xi_0} \to Z$ réalise la déformation universelle dans $z = \pi(p)$ en vertu de la propriété similaire pour $\mathcal{U}_{\xi_0} \to F$, qui est vraie par construction et se préserve par changement de base. Or $\hat{O}_{Z,z}$ avec $\operatorname{Spec} \hat{O}_{Z,z} \to Z$ est aussi une déformation universelle de z ce qui prouve que le morphisme $O_{Z,z} \to O_{Z_{\xi_0},p}$ associé à π définit un isomorphisme $\hat{O}_{Z,z} \xrightarrow{\sim} O_{Z_{\xi_0},p}$. Mais cela montre que π est étale dans u (1.3) remarque 2).

Pour conclure, il reste seulement à vérifier que $\{(\mathcal{U}_{\xi_0}, u_{\xi_0}, \xi_{\xi_0})\}_{\xi_0 \in F(k)}$ fournit un recouvrement

$$\{\mathcal{U}_{\xi_0} \xrightarrow{u_{\xi_0}} F\}$$

de F . Avec les notations précédentes, cela revient à montrer que $\{Z_{\xi_0}\} \to Z$ est un recouvrement. Or l'image de Z_{ξ_0} est un ouvert de Z donc $\bigcup_{\xi_0 \in F(k)} Z_{\xi_0}$ est un ouvert V de Z . Si $z \in Z(k)$ alors $z \in Z_{\xi_0}$ avec $\xi_0 : k \to Z \to F$. Donc $Z(k) \subset V$ ce qui implique $Z = V$, d'après le théorème de Hilbert, des zéros (naturellement on se réduit comme ci-dessus au cas Z/k de type fini).

Réciproquement, si F est un espace algébrique localement de présentation finie sur k alors F satisfait 0), 1) par définition et 2) en vertu de 5.1.

Vérifions la condition 3). Soit $(\mathcal{U}_i) \to F$ un recouvrement étale avec $\mathcal{U}_i = \operatorname{Spec} A_i$ et $\xi_0 : k \to F$. Alors $\{\mathcal{U}_i \times_F k\} \to k$ est un recouvrement étale donc il existe un indice j tel que $\mathcal{U}_j \times_F k \to k$ soit surjectif.

Il en résulte qu'il existe un point $k \to \mathcal{U}_j \times_k k$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl] \arrow[dr, "1"] & \\ \mathcal{U}_j \times_F k \arrow[rr] & & k \end{tikzcd} .$$

En composant avec la projection $\mathcal{U}_j \times_F k \to \mathcal{U}_j$ on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "\xi_0"] & \\ \mathcal{U}_j \arrow[rr] & & F \end{tikzcd} .$$

Or $(\hat{O}_{\mathcal{U}_j,u}, \zeta)$ avec $\zeta : \operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u} \to \mathcal{U}_j$ est une déformation universelle de $u \in \mathcal{U}_j(k)$. Vérifions que $(\hat{O}_{\mathcal{U}_j,u}, \xi)$ avec $\xi : \operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u} \to \mathcal{U}_j \to F$ est une déformation universelle de ξ_0 . Soit A une k-algèbre artinienne, A_0 un quotient de A et

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u} \arrow[d, "\xi"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif. On a alors un morphisme $\operatorname{Spec} A_0 \to \operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u} \xrightarrow{\zeta} \mathcal{U}_j$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_j \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] & F \end{tikzcd} .$$

Or le morphisme $\mathcal{U}_j \to F$ est étale dans le sens de § 4. Il est facile de voir que le critère infinitésimal pour les morphismes des schémas s'étend aux morphismes fonctoriels. Donc il existe une flèche $\operatorname{Spec} A \to \mathcal{U}_j$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_j \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[ur] & F \end{tikzcd}$$

ce qui implique la commutativité de

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u} \arrow[d, "\zeta"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] & \mathcal{U}_j \end{tikzcd} .$$

On peut maintenant conclure en utilisant le fait que $(\operatorname{Spec} \hat{O}_{\mathcal{U}_j,u}, \zeta)$ est la déformation universelle dans u .

Il nous reste encore la condition 4). Soit $\mathcal{U}$, $u \in \mathcal{U}(k)$, $\xi : \mathcal{U} \to F$ et $\xi_0 \in F(k)$ comme là-bas. Alors, d'après ce qu'on a déjà vu, il existe un indice i et un point $u_i : k \to \mathcal{U}_i$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u_i"'] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ \mathcal{U}_i \arrow[r] & F \end{tikzcd} .$$

Soit $p : k \to \mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U}$ le morphisme défini par u , u_i . Le diagramme

$$\begin{tikzcd} k \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\ & \mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ & \mathcal{U}_i \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

est commutatif. La flèche $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est étale donc le morphisme $O_u \to O_p$ définit un isomorphisme $\hat{O}_u \to \hat{O}_p$ ce qui prouve que le morphisme $\operatorname{Spec} \hat{O}_p \to \mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \to F$ réalise la déformation universelle de ξ_0. Or, comme nous avons montré ci-dessus, $\operatorname{Spec} \hat{O}_{u_i} \to \mathcal{U}_i \to F$ est aussi une déformation universelle de ξ_0. Si $O_{u_i} \to O_p$ est le morphisme défini par $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U}_i$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} O_p \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \operatorname{Spec} O_{u_i} \arrow[r] & F \end{tikzcd} .$$

Donc si $\hat{O}_{u_i} \to \hat{O}_p$ est le morphisme défini par $O_{u_i} \to O_p$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \hat{O}_p \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \operatorname{Spec} \hat{O}_{u_i} \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

est aussi commutatif. Or cela implique $\hat{O}_{u_i} \xrightarrow{\sim} \hat{O}_p$ car ce sont deux déformations universelles de ξ_0. Alors $\mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U}_i$ est étale dans p (1.3, remarque 2)). On en déduit qu'il existe un voisinage W de p tel que $W \to \mathcal{U}_i \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U}_i$ soit étale. Si V est l'image de W dans $\mathcal{U}$ c'est un ouvert et on peut vérifier que $V \to \mathcal{U} \to F$ réalise la déformation universelle en tout point de $V(k)$. En effet, pour tout $x \in V(k)$ il existe $y \in W(k)$ tel que $y \to x$ et alors $\hat{O}_x \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$; si $z \in \mathcal{U}_i(k)$ est l'image de y on a aussi $\hat{O}_z \overset{\sim}{\to} \hat{O}_y$ et on sait que $\hat{O}_z$ réalise la déformation universelle de $k \overset{x}{\to} \mathcal{U} \to F$.

Ainsi le théorème est démontré. Pour plus de détails, notamment sur la condition 4), voir (AFM).

<u>Exemples</u>

(5.3) Soit $F = X$ le foncteur de l'exemple 3.8 défini par

$$X(A) = \varinjlim_n \operatorname{Hom}_k(k[x,y]/y(y-x^n), A)$$

où le système inductif est formé par les k-homomorphismes

$$k[x,y]/y(y-x^{n+1}) \to k[x,y]/y(y-x^n)$$

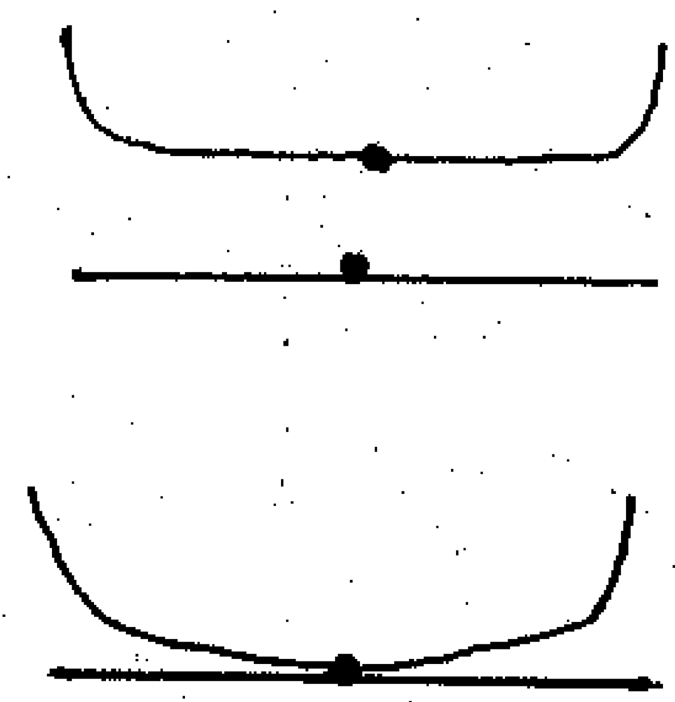
qui envoie x dans x et y dans xy . Montrons que X satisfait les conditions de 5.2 sauf la condition 2).

0) et 1) sont vérifiées car X est une limite inductive filtrante des foncteurs qui satisfont toutes ces conditions. 3) a été déjà vérifiée en origine, i.e. dans le point $\xi_0 \in X(k)$ défini par $x \to 0$, $y \to 0$ (3.8). Soit $\zeta \in X(k)$, $\zeta \neq \xi_0$ défini par

$$\phi : k[x,y]/y(y-x^n) \to k \quad .$$

Alors $\ker \phi$ est premier donc ϕ se factorise $k[x,y]/y-x^n) \to k[x,y]/y = k[x]$ où bien par $k[x,y]/y(y-x^n) \to k[x,y]/(y-x^n) = k[x]$. Ces deux homomorphismes définissent deux immersions ouvertes, en dehors de l'origine

Spec $k[x] \xrightarrow{\psi_i} X$ $(i = 1,2)$. On obtient ainsi un recouvrement ouvert (à deux feuilles) de X en dehors de ξ_0



Or tout point de Spec $k[x]$ possède une déformation universelle effective (3.4). Il existe un point $\eta : k[x] \to k$ tel que $\zeta = \psi_1 \eta$ ou $\zeta = \psi_2 \eta$, et la déformation universelle effective de η réalise la déformation universelle de ζ. Ainsi 3) est vérifiée.

Pour vérifier 4) soit $\mathcal{U} \to X$ un k-morphisme $\eta \in \mathcal{U}(k)$ et $\zeta_0 : k \xrightarrow{\eta} \mathcal{U} \to X$. Supposons que $\mathcal{U} \to X$ réalise la déformation universelle effective dans ζ_0. Soit $u \in \mathcal{U}$ l'image ensembliste de η. Si $\zeta_0 \neq \xi_0$ il n'y a pas de problème en utilisant le recouvrement ouvert précédent

$$\mathrm{Spec}\; k[x, \tfrac{1}{x}] \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} X\ \xi_0$$

Soit donc $\zeta_0 = \xi_0$. Alors, avec les notations de (3.8), $(k[[x]], \overline{\xi})$ est une déformation universelle de ξ_0. Donc si $u \in \mathcal{U}$ est l'image ensembliste de η, $\hat{O}_{\mathcal{U},u} \approx k[[x]]$ donc $\hat{O}_{\mathcal{U},u}$ est intègre ce qui implique pour $O_{\mathcal{U},u}$ qu'il est aussi intègre. On peut donc remplacer $\mathcal{U}$ par un voisinage affine Spec A de u, avec A une k-algèbre de type fini intègre. Alors le morphisme $\mathcal{U} \to X$ est défini par un morphisme

$$k[x,y]/y(y-x^n) \to A$$

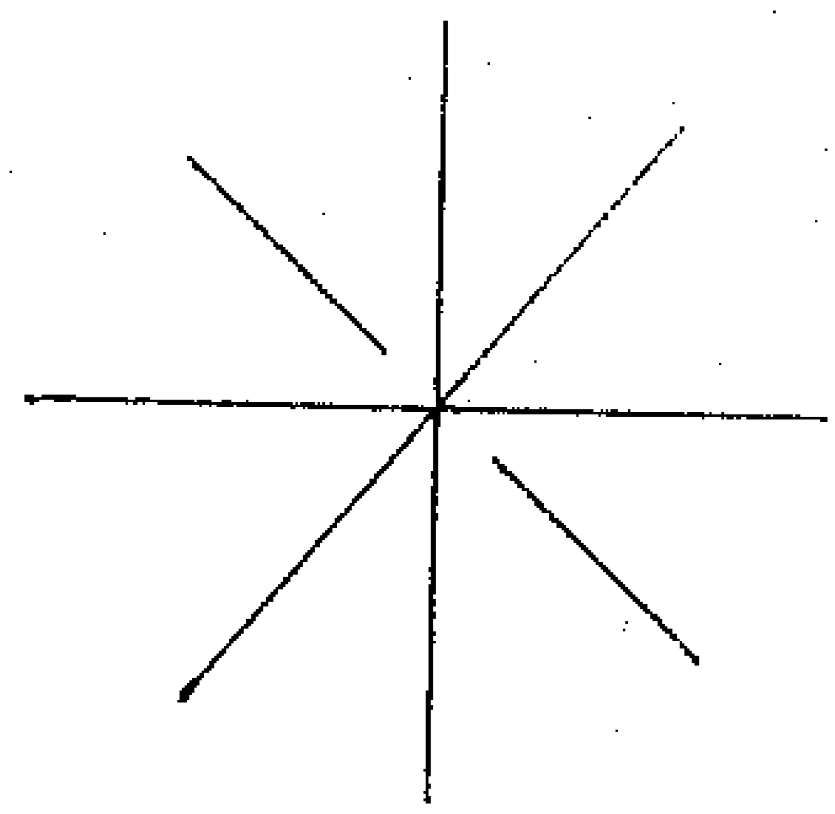
avec n convenable, dont le noyau est premier. Donc il contient y ou bien $y-x^n$ c'est-à-dire $\mathcal{U} \to X$ se factorise en

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U} \arrow[dl] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k[x] \arrow[r, "\psi_i"'] & X \end{tikzcd}$$

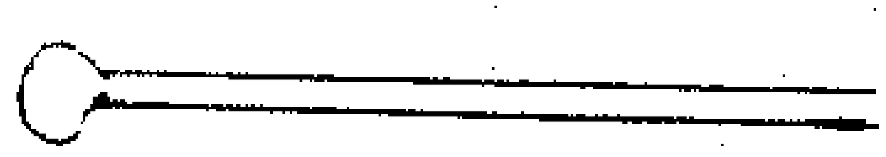
avec i convenable $(i = 1,2)$. L'image de u par $\mathcal{U} \to \operatorname{Spec} k[x]$ est l'origine $p \in \operatorname{Spec} k[x]$ et l'homomorphisme $\mathcal{O}_p \to \mathcal{O}_{\mathcal{U},u}$ induit un isomorphisme pour les complétés, par hypothèse. Donc $\mathcal{U} \to \operatorname{Spec} k[x]$ est étale dans u (1.3, remarque 2)). On en déduit qu'il est étale dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de u dans $\mathcal{U}$. Le morphisme $\mathcal{V} \to \mathcal{U} \to X$ réalise la déformation universelle en tout point de $\mathcal{V}$. Ainsi 4) est aussi vérifiée.

Afin de montrer que 2) n'est pas satisfaite, considérons la flèche double $\operatorname{Spec} k[x] \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} X$ et soit N son noyau. Soit A une k-algèbre quelconque. $\operatorname{Hom}_k(k[x],A)$ s'identifie fonctoriellement avec A par l'application $\phi \mapsto \phi(x) = a$, $\phi \in \operatorname{Hom}_k(k[x],A)$. Le morphisme $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k[x]$ défini par ϕ égalise les deux flèches ψ_1, ψ_2 si pour n suffisamment grand ϕ égalise les flèches $k[x,y]/y(y-x^n) \rightrightarrows k[x]$ définies par $x \mapsto x$ et $y \mapsto 0$ ou $y \mapsto x^n$ respectivement. Il en résulte $a^n = 0$. Donc $\phi \in N(A)$ sssi a est nilpotent i.e. $N(A)$ est le radical nilpotent de A, ce qui n'est pas défini par un sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} k[x]$.

(5.4) <u>Relation d'équivalence sur la droite qui n'est pas fermée</u>. Soit E^1 = Spec $k[x]$ et $R \subset E^1 \times E^1$ la relation d'équivalence dont le graphe est



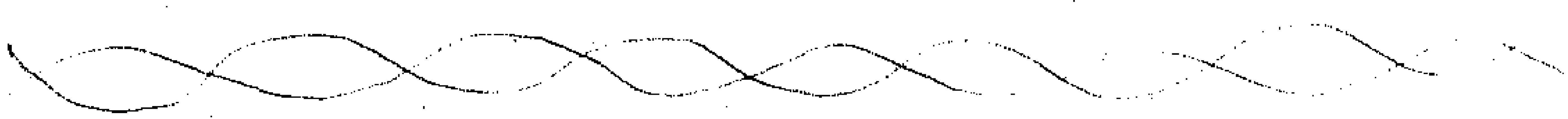
c'est-à-dire $R = \Delta \amalg Z$ avec Δ la diagonale et $Z = \Delta'$ moins l'origine où Δ' est le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(k[x,y]/(x+y))$ de $E^1 \times E^1$ (l'anti-diagonale). R n'est pas un sous-schéma de $E^1 \times E^1$ mais en l'occurence, c'est une relation d'équivalence étale sur E^1. Le quotient $F = E^1/R$



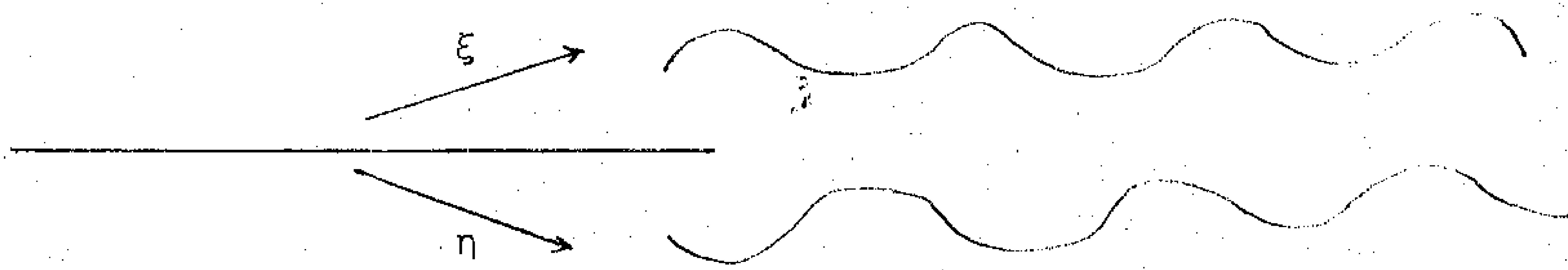
satisfait les conditions 0) - 4) à l'exception de la condition 2). En effet, 0), 1), 3) et 4) sont héritées de E^1 par le morphisme canonique $E^1 \to F$ tandis que le noyau de $E^1 \times E^1 \rightrightarrows F$, égal à R, n'est pas fermé.

(5.5) Pour le ind-schéma 3.7 l'effectivité de 3) n'est pas satisfaite, tous les autres le sont.

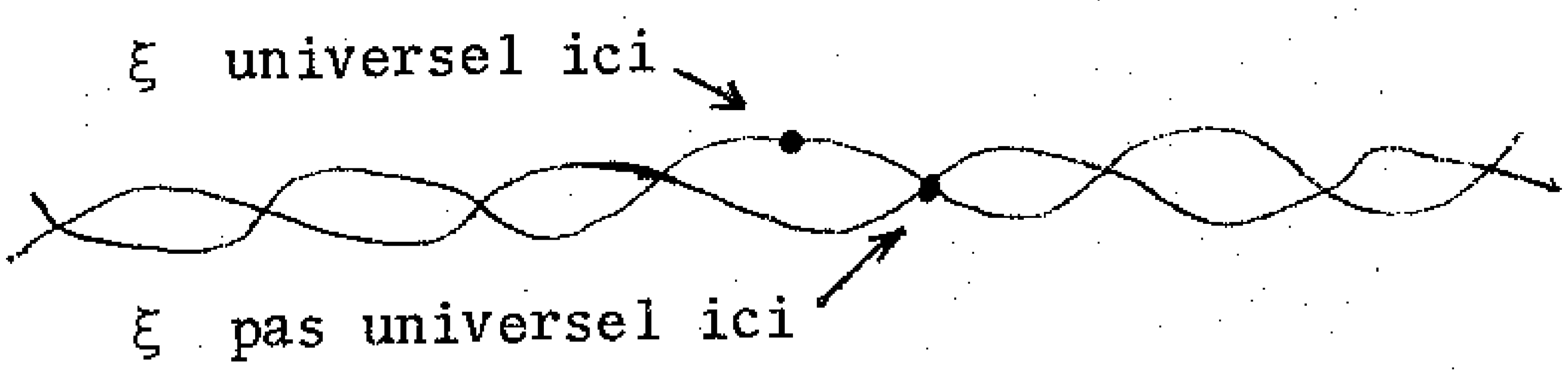
(5.6) Le ind-objet à croisements normaux



ne satisfait pas la condition 2) car on a deux morphismes de la droite E^1 dans celui-ci

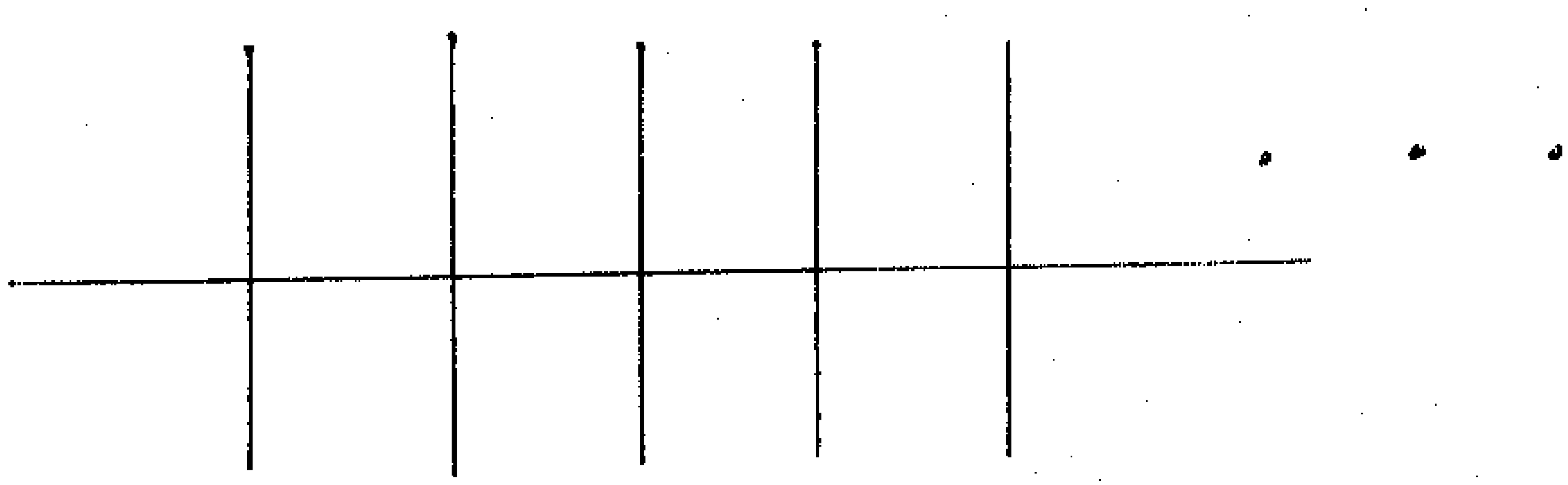


et le lieu $\xi = \eta$ est . . . . i.e. une réunion infinie des points. 4) n'est pas satisfaite non plus car, par exemple, ξ réalise la déformation universelle effective en tout point qui n'appartient pas au lieu $\xi = \eta$

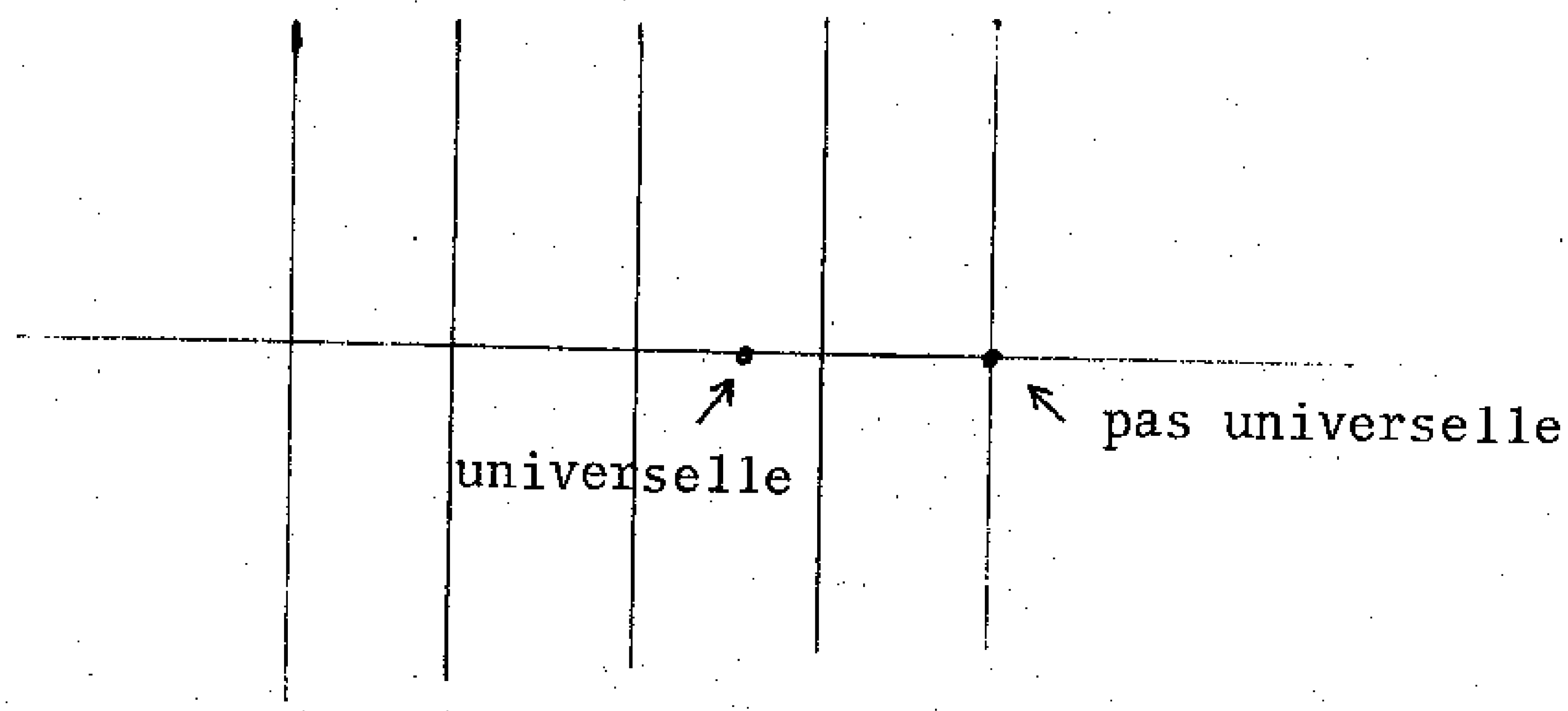


Donc l'ensemble des points de E^1 où ξ réalise la déformation universelle effective ne contient aucun ouvert.

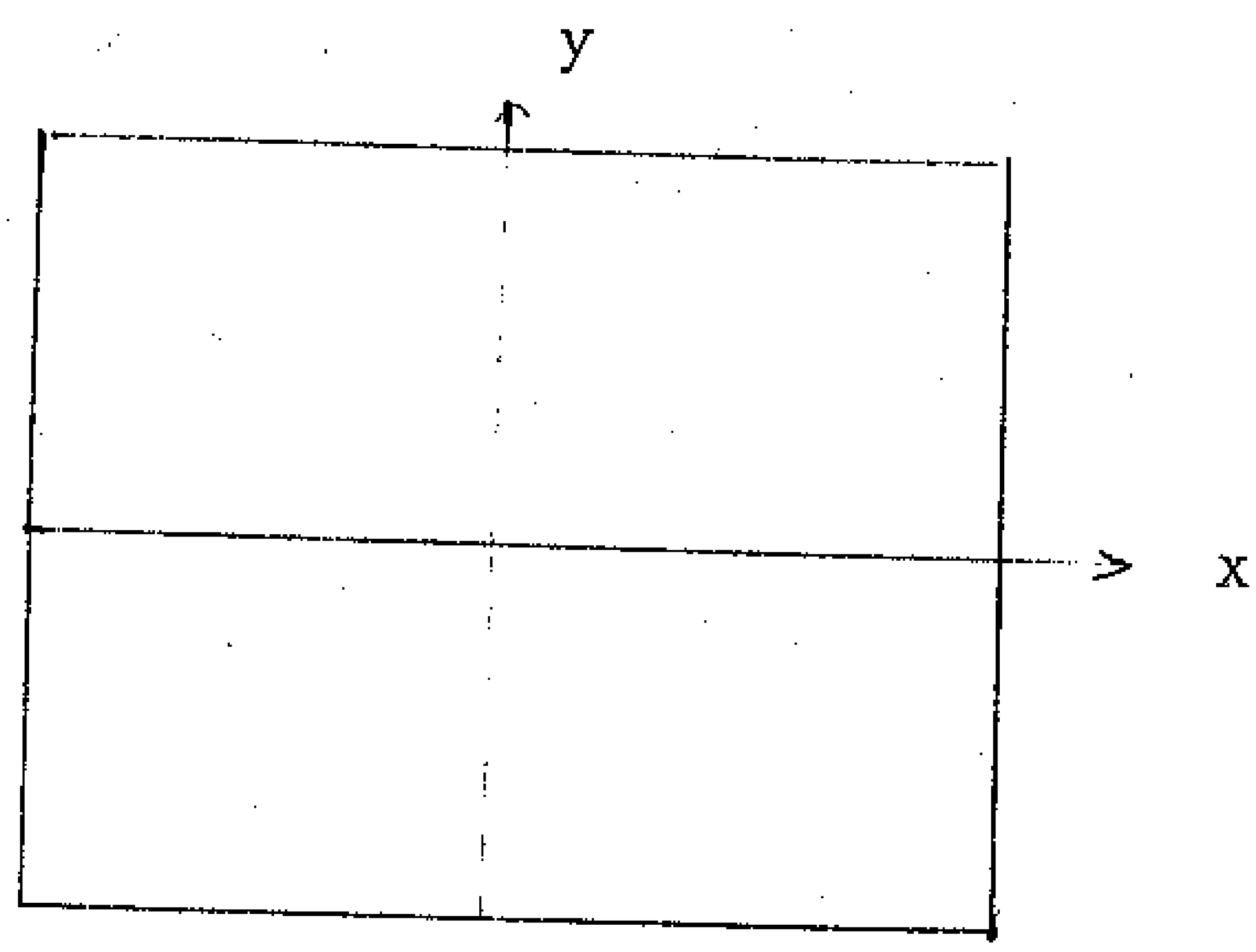
(5.7) Considérons le ind-objet F du plan obtenu en ajoutant indéfiniment à l'axe Ox des droites parallèles à l'axe oy



Toutes les conditions sont remplies sauf 4). En effet, l'application d'inclusion de l'axe Ox dans celui-ci est universelle en tout point différent des points d'intersection avec les droites verticales.



(5.8) Le foncteur F est le plan dont on enlève l'axe y et puis on ajoute le point à l'origine



i.e. la réunion du complémentaire de l'axe y avec l'axe x. Donc F est le sous-foncteur du plan (x,y) défini par

$$F(Z) = \{f \in \mathrm{Hom}_k(Z, \mathrm{Spec}(k[x,y])) \mid Z = Z_1 \cup Z_2\}$$

avec Z_1, Z_2 des sous-schémas de Z et $f(Z_1) \subset \mathrm{Spec}\, k[x,y] \setminus$ l'axe y, $f(Z_2) \subset$ l'axe $x\}$. Toutes les conditions en sont vérifiées exceptée la condition 4) : l'application d'inclusion de l'axe x en F est universelle à l'origine, mais elle n'est pas universelle en aucun voisinage de l'origine.

Note (5.9) On pourrait affaiblir 2) en exigeant que le noyau N de $Z \rightrightarrows F$ soit un sous-schéma localement fermé de Z. Dans ce cas F est ce qu'on appelle un foncteur localement séparé. F est localement quasi séparé si N est un schéma et si le morphisme $N \to Z$ est de type fini. (cf. (IFT) pour plus de détails sur cela et sur les exemples précédents).

Corollaire 5.10

Soit $F : (k\text{-alg}) \to (\text{Ens})$ localement de présentation finie et faisceau étale. Alors, pour tout schéma affine $Z = \operatorname{Spec} A$ et tout couple $Z \rightrightarrows F$ le noyau N sera représenté par un espace algébrique si et seulement si N satisfait les conditions 3) et 4).

Preuve. 0) et 1) pour F impliquent 0) et 1) pour N. La condition 2) sur N est satisfaite car le noyau de $\operatorname{Spec} B \rightrightarrows N \subset Z$ est le même que le noyau de $\operatorname{Spec} B \rightrightarrows \operatorname{Spec} A$.

On peut assez souvent supprimer la condition 4) (voir (AFMI) pour une plus ample discussion).

Théorème 5.11

a) Supposons que F satisfait aux conditions 0) - 3) et que toutes les déformations universelles $(\overline{A},\overline{\xi})$ des points de $F(k)$ soient telles que $\overline{A}$ soit normal et de dimension d fixée. Alors F est un espace algébrique localement de présentation finie,

b) Supposons que F satisfait aux conditions 0) - 3) et que c'est un foncteur en groupes. Alors F est un schéma en groupes localement de présentation finie.

Preuve de (a). Soit $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A$ un k-schéma de type fini, $\xi : \mathcal{U} \to F$ un morphisme et $u \in \mathcal{U}(k)$. On suppose que ξ réalise la déformation universelle de $\xi_0 = \xi \circ u$. Alors $\hat{O}_u$ est normal donc O_u est aussi normal. Comme l'ensemble des points normaux de $\mathcal{U}$ est ouvert, on peut supposer $\mathcal{U}$ normal, en se restreignant à un voisinage de u. Les projections $\mathcal{U} \times_F \mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{U}$ sont étales dans (u,u). On en déduit que le morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times_F \mathcal{U}$ est étale dans u. Donc il existe un voisinage $\mathcal{U}'$ de u dans $\mathcal{U}$ tel que Δ soit fermé et ouvert dans $\mathcal{U}' \times_F \mathcal{U}'$ c'est-à-dire $\mathcal{U}' \times_F \mathcal{U}'$ splitte dans $\Delta \amalg Y$. On remplace $\mathcal{U}$ par $\mathcal{U}'$ et alors $\xi : \mathcal{U} \to F$ a la propriété que $\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times_F \mathcal{U}$ soit une immersion ouverte (et fermée à la fois). Cette propriété se conserve par changement de base donc pour toute flèche $\mathcal{V} \to F$ la projection $\mathcal{U} \times_F \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est non ramifiée. En particulier, les projections $\mathcal{U} \times_F \mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{U}$ sont non ramifiées. Soit maintenant $u' \in \mathcal{U}(k)$. Il suffit de montrer que ξ est étale dans u' i.e. que $O_{u'}$ réalise la déformation universelle en $\xi' = \xi \circ u'$. Soit $\mathcal{V} \to F$ avec $\mathcal{V}$ schéma affine et $v \in \mathcal{V}$ tel que $v \mapsto \xi'$ et réalise la déformation universelle. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W} = \mathcal{U} \times_F \mathcal{V} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{V} \arrow[d] \\
\mathcal{U} \arrow[r] & F
\end{tikzcd} .$$

Soit $w \in \mathcal{W}$ tel que $w \mapsto u'$, $w \mapsto v$. Alors f est étale dans w car $v \mapsto \xi'$ réalise la déformation universelle. D'autre part g est non ramifiée.

mifié donc l'homomorphisme $O_v \to O_w$ est non ramifié. Cela implique $O_v \to O_w$ quasi fini et $m_v O_w = m_w$. Passant au complété on obtient un homomorphisme fini $\hat{O}_v \to \hat{O}_w$ tel que $m_v \hat{O}_w = m_w \hat{O}_w$. Or $O_v/m_v = O_w/m_w = k$ donc par Nakayama $\hat{O}_v \to \hat{O}_w$ est surjectif. Mais $\hat{O}_w \approx \hat{O}_{u'}$ et $\dim O_{u'} = \dim O_u$ car tous les points fermés du schéma intègre $\mathcal{U}$ ont la même dimension (égale à $\operatorname{tr} \deg_k \operatorname{Frac} A$, $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A$). Donc $\dim O_w = d$. Comme $\hat{O}_v$ réalise la déformation universelle dans ξ' $\dim \hat{O}_v = d$ et $\hat{O}_v$ est intègre. Cela prouve que le noyau de $\hat{O}_v \to \hat{O}_w$ est nul car autrement on aurait $\dim \hat{O}_w < \dim \hat{O}_v$. On en déduit que g est étale dans w ce qui prouve que $(O_{u'}, \xi)$ réalise la déformation universelle dans $\xi' \in F(k)$.

C.Q.F.D.

Pour une démonstration de (b) voir (AFMI, § 4).

CHAPITRE VI

MODIFICATIONS

On suppose k algébriquement clos et tous les espaces algébriques qui interviennent séparés.

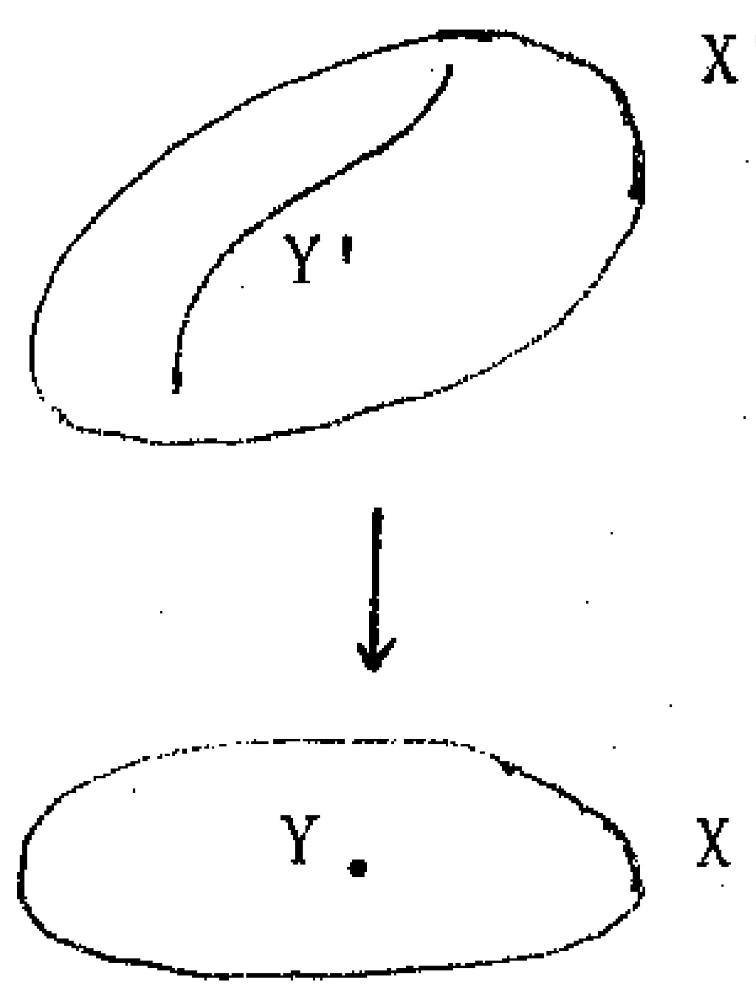
Définition

Une <u>modification</u> est un couple (f,Y) où f est un morphisme propre

$$f : X' \to X$$

d'espaces algébriques et $Y \subset X$ un fermé tel que f soit un isomorphisme en dehors de Y.

On a donc la situation suivante, avec $U = X \setminus Y$



$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dd, "f"] & Y' \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\ & X & Y \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Ici, on a identifié U avec $X' \setminus Y'$ à l'aide de f.

Il n'est pas exclu que $Y = X$ où f soit un isomorphisme. Comme cela, la définition ci-dessus est fonctorielle. f s'appelle aussi une <u>contraction</u> de Y' dans X' ou une <u>dilatation</u> de Y dans X. Tout éclatement d'un schéma X selon un faisceau quasi cohérent d'idéaux

J (EGA II, [Re]) donne une modification de X avec Y le support de O_X/J ou un fermé de X qui contient ce support. Si X est projectif, l'éclaté X' est aussi projectif. Il existe des modifications avec X, X' des variétés algébriques telles que X soit projective tandis que X' n'est plus projective ([Hi]). Donc il existe des modifications qui ne sont pas des éclatements. Il y a aussi beaucoup d'exemples où X ou X' est un schéma sur $\mathbb{C}$, l'autre étant seulement un espace analytique ([AFM] **II**, [Moisezon]). Le cadre naturel en est donc celui des espaces algébriques.

Une modification (f,Y) étant donnée on peut considérer les espaces algébriques formels $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}$ associés aux couples (X',Y') et (X,Y) respectivement (cf. ci-dessous). Alors f définit une modification formelle $\mathfrak{f} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$. On obtient ainsi un diagramme complété

$$\mathcal{U} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"] & Y' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X}' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ X & Y \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \mathcal{X} \end{tikzcd} .$$

Notre but maintenant est essentiellement le résultat suivant. $\mathcal{X}', Y'$ et $\mathfrak{f}$ ou $\mathcal{X}, Y$ et $\mathfrak{f}$ étant donnés, il existe une modification f unique complétant le diagramme précédent.

DIGRESSION SUR LES ESPACES ALGEBRIQUES FORMELS ([AS])

Définitions

Un anneau adique est un anneau noethérien A, muni d'une topologie idéal-adique, i.e. une topologie définie par un idéal I de A, qui est en plus séparé et complet dans cette topologie (i.e. $A = \varprojlim A/I^n$). I s'appelle un idéal de définition de A. Si A et B sont deux anneaux adiques, un homomorphisme $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux adiques s'il est continu, i.e. on a $f^{-1}(J) \supseteq I^n$ avec I, J idéaux de définitions de A, B respectivement et n entier positif convenable.

Si A est un anneau adique, I un idéal de définition de A et $A[y_1,\dots,y_n]$ l'anneau des polynômes en $y_1,\dots,y_n$ à coefficients dans A alors $\overline{A[y_1,\dots,y_n]}$ sera le complété de $A[y_1,\dots,y_n]$ dans la topologie I-adique.

$\overline{A[y_1,\dots,y_n]}$ est l'anneau des séries formelles restreintes, i.e. $\overline{A[y_1,\dots,y_n]} \subset A[[y_1,\dots,y_n]]$ et $\overline{A[y_1,\dots,y_n]} = \{\sum_{(i)} a_{(i)}\, y^{(i)} \mid a_{(i)} \to 0$ I-adiquement quand $(i) \to \infty\}$. Un morphisme $f : A \to B$ d'anneaux adiques est un morphisme de type fini si B est A-isomorphe avec un anneau de la forme $\overline{A[y_1,\dots,y_n]}/\underline{a}$. On dit que f est formellement étale si le morphisme induit $A/I^n \to B/I^nB$ est étale pour tout n, ce qui revient à la condition suivante :

"localement" on a $B \approx \overline{A[y_1,\dots,y_n]}/(f_1,\dots,f_n)$ avec $(\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}), f_1,\dots,f_n) = 1$.

"localement" veut dire ici qu'il existe $s_1,\dots,s_m \in B$ tels que $\sum_{i=1}^{m} s_i B = B$ et pour tout i le localisé au sens adique $B[\overline{\frac{1}{s_i}}]$ soit de la forme décrite ci-dessus.

La catégorie des schémas affines formels est la catégorie duale de la catégorie des anneaux adiques. Si A est un anneau adique $X = S_{pf}\,A$ est le schéma affine formel qui lui est associé.

A l'aide des schémas affines formels et des morphismes formellement étales on introduit la notion d'espace algébrique formel tout à fait similaire avec la notion d'espace algébrique ([AS]) . Un espace algébrique formel X est une limite inductive de vrais espaces algébriques Y_n dans la catégorie des faisceaux étales sur les schémas affines formels

$$X = \varinjlim Y_n$$

où le morphisme $Y_{n-1} \to Y_n$ est une immersion nilpotente. Les Y_n ont par conséquent le même espace topologique sous-jacent qu'on peut attribuer comme espace sous-jacent à X . On en obtient aussi un faisceau

$$\mathcal{O}_X = \varprojlim \mathcal{O}_{Y_n}$$

qui est un faisceau d'anneaux pour la topologie formellement étale. Il y a un idéal I de $\mathcal{O}_X$, appelé <u>idéal de définition de</u> X ,

$$Y_n = \mathcal{O}_X/I^{n+1}$$

soit un espace algébrique. On en déduit, pour chaque n, un recouvrement étale $U_n \to Y_n$ avec U_n affine, $U_n = \operatorname{Spec} A_n$, un diagramme exact

$$\mathcal{R}_n \rightrightarrows \mathcal{U}_n \to \mathcal{Y}_n$$

où $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence étale et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{U}_n \arrow[r] & \mathcal{Y}_n \\ \mathcal{R}_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{U}_{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{Y}_{n-1} \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

A la limite, on obtient un diagramme exact

$$\mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{U} \to \mathcal{X}$$

avec $\mathcal{U} = S_{pf}A$, $A = \varprojlim A_n$ et $\mathcal{R}$ une "relation d'équivalence formellement affine étale".

Soit $\mathcal{X}' \xrightarrow{\mathfrak{f}} \mathcal{X}$ un morphisme de type fini d'espaces algébriques formels. Soit I un idéal de définition de $\mathcal{X}$ et Y l'espace algébrique défini par I . On suppose Y de type fini sur k . L'image inverse I' de I par $\mathfrak{f}$ est un idéal de définition de $\mathcal{X}'$ et si Y' est l'espace algébrique défini par I' on a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"'] & \mathcal{X}' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ Y \arrow[r, hook] & \mathcal{X} \end{tikzcd} .$$

<u>Définition</u>

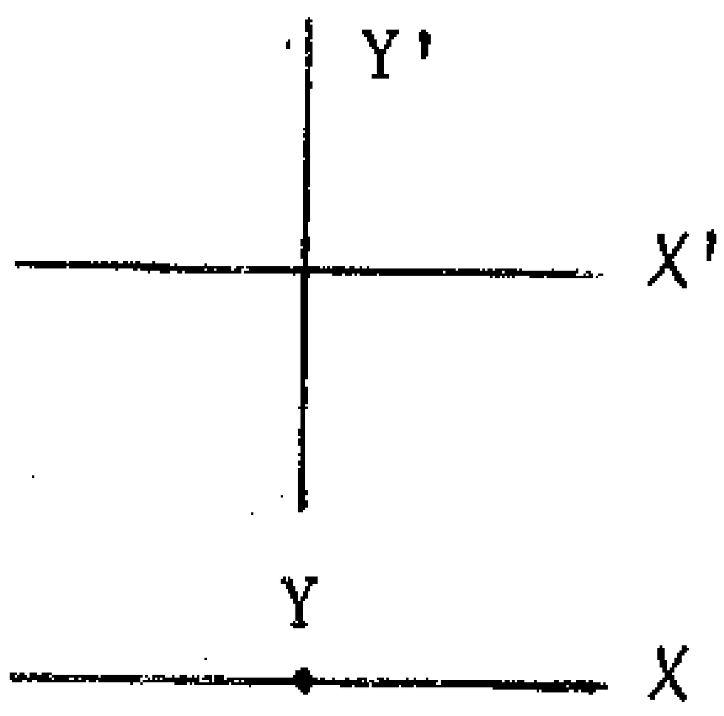
$\mathfrak{f}$ est une <u>modification formelle</u> si

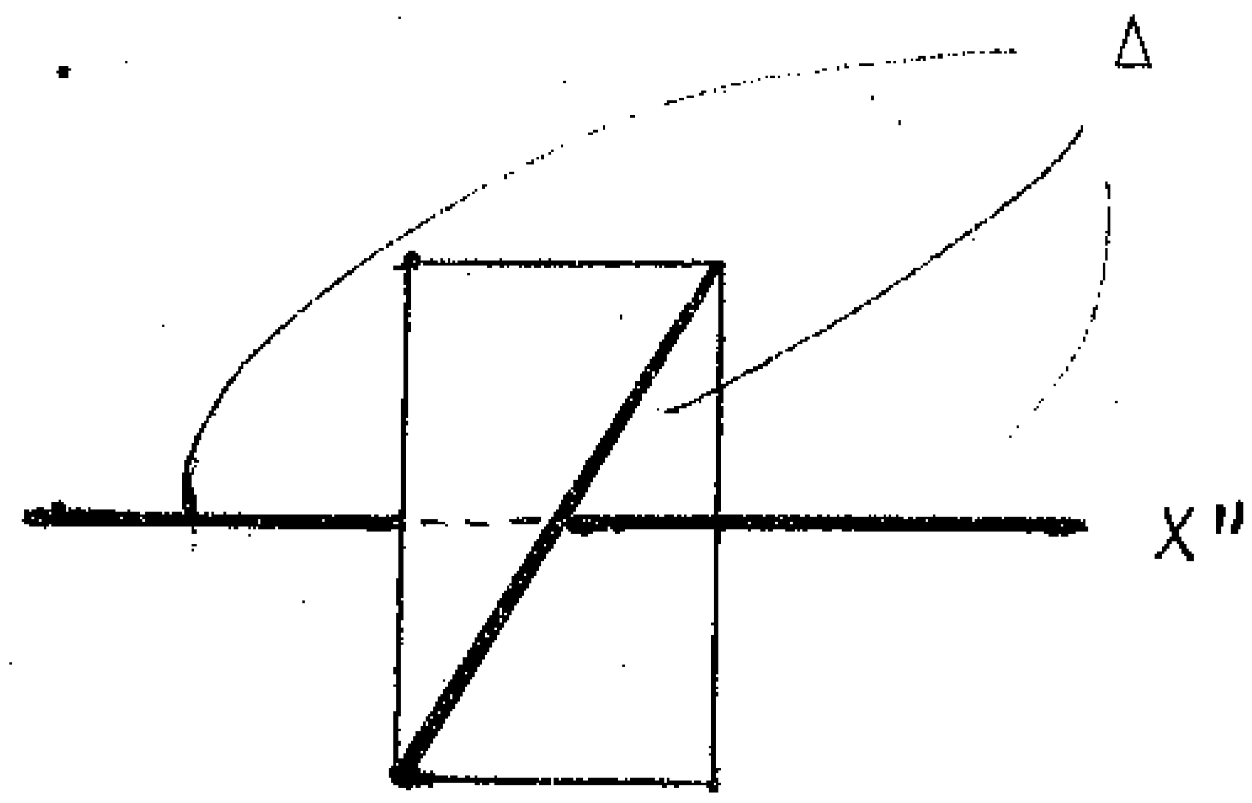
1) $\mathfrak{f}$ est propre (i.e. f_0 est propre).

2) $\mathfrak{f}$ est "un isomorphisme en dehors de Y" dans le sens précisé ci-dessous.

La condition 2) veut dire précisément que :

1. f est "un monomorphisme en dehors de Y" i.e. si $X'' = X' \times_X X'$ et $\Delta : X' \to X''$ est le morphisme diagonal, alors Δ est un isomorphisme en dehors de Y' .





D'une façon précise, on demande que si δ = l'idéal de X' dans X'' et I'' un idéal de définition de X'' alors $I''^N \delta = (0)$ pour N naturel assez grand.

2. f "est surjectif en dehors de Y" peut s'exprimer probablement par le fait que $\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{X'}$ soit injectif. Pourtant ici on le prend dans le sens suivant : si R est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k , alors tout morphisme adique $S_{pf} R \to X$ se relève en X'

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "f"] \\
S_{pf} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd} .
$$

3. f "est étale en dehors de Y". Soit

$$\overline{B} = \overline{\overline{A}[y_1, \ldots, y_n]}/(f_1, \ldots, f_N)$$

une $\overline{A}$-algèbre adique de type fini. <u>L'idéal jacobien</u> de $\overline{B}$ est par définition l'idéal engendré par les mineurs de rang n de la matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right) .$$

On peut vérifier que J est indépendant de la présentation de $\overline{B}$. Soit

$$a_{11}f_1 + \ldots + a_{1N}f_N = 0$$
$$\ldots$$
$$a_{r1}f_1 + \ldots + a_{rN}f_N = 0$$

un système d'équations donné par un système de générateurs du module des relations linéaires, à coefficients dans $\overline{A}[y_1,\ldots,y_n]$, entre $f_1,\ldots,f_N$. Par définition, <u>l'idéal de Fitting</u> C de $\overline{B}$ est l'idéal de $\overline{B}$ engendré par les mineurs de rang $N-n$ de la matrice (a_{ij}) . C'est aussi indépendant de la présentation de $\overline{B}$ ([AFM] II).

Soit $\mathfrak{f} : X' \to X$. Il existe deux idéaux cohérents J et I sur X' , l'idéal jacobian et l'idéal de Fitting, qui, dans le cas $X = \mathrm{Spf}\,\overline{A}$, $X' = \mathrm{Spf}\,\overline{B}$ sont définis par les idéaux introduits ci-dessus. Avec ces notations, la condition $\mathfrak{f}$ "est étale en dehors de Y" est la suivante :

C et J contiennent I'^N pour $N \gg 0$.

Dans ce qui suit, tout est de type fini sur k .

<u>Théorème 6.1.</u>

1) Supposons qu'on se donne le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ X & Y \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

où X est un espace algébrique, Y un sous-espace fermé, X est le complété de X selon Y et $\mathfrak{f}$ est une modification formelle. Alors il existe une modification algébrique unique à isomorphisme unique près

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ X & Y \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

telle que $\mathfrak{f}$ soit la modification formelle définie par f .

2) Si l'on se donne une modification formelle $\mathfrak{f}$ et un diagramme

$$\begin{tikzcd} X' & Y' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ & Y \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

avec X' espace algébrique Y', sous-espace fermé et X' l'espace algébrique formel défini par (X',Y') alors il existe une modification algébrique f unique à isomorphisme unique près

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ X & Y \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

dont $\mathfrak{f}$ soit la modification formelle associée.

Proposition 6.2.

Soit X' un espace algébrique formel, I' un idéal de définition de X' et $Y' = \mathrm{Spec}(O_{X'}/I')$ de type fini sur k. Soit $f_0 : Y' \to Y$ un morphisme propre d'espaces algébriques de type fini sur k. Supposons qu'on ait les deux conditions suivantes :

i) Pour tout faisceau cohérent F sur X' on a

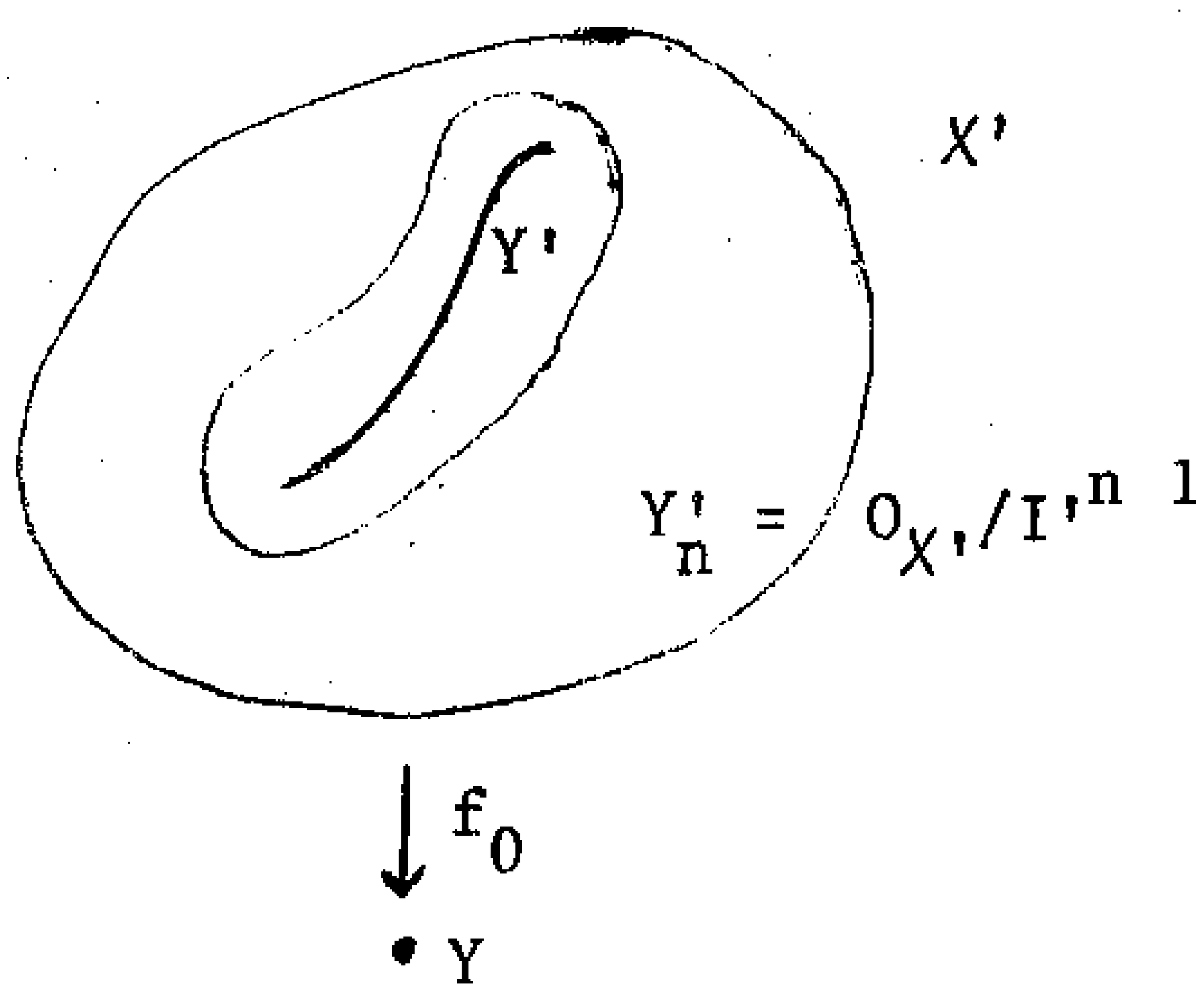
$$R^1 f_{0*}(I'^n F / I'^{n+1} F) = 0$$

si $n >> 0$.

ii) Pour tout n la projection

$$f_{0*}\, O'_n \times_{f_{0*} O'_0} O_Y \longrightarrow O_Y$$

où $O'_n = O_{X'}/I'^{n+1}$ est surjective (i.e. il y a assez de sections dans $f_{0*}\, O'_n$ pour séparer les points de Y).



Alors il existe une modification formelle $f : X' \to X$ qui induit f_0.

En réunissant 6.1 avec 6.2 on obtient un critère de contractibilité ([AFM] II, 6.10, 6.11).

Remarques

1) Quand $Y = \mathrm{Spec}\ k$ la condition ii) est trivialement vérifiée.

2) Problème : le faisceau conormal I'/I'^2 est un faisceau cohérent sur Y' ; s'il est localement libre et ample, la condition i) devrait être satisfaite.

3) Si I'/I'^2 est inversible et ample sur Y' relativement à Y alors la condition i) est satisfaite.

<u>Preuve de 3)</u>. On considère localement dans un ouvert de Y la suite exacte

$$0 \to N_n \to I'^nF/I'^{n+1}F \to I'^{n+1}F/I'^{n+2}F \to 0$$

où la flèche surjective est définie en multipliant par un générateur local de I'/I'^2 . Si $n >> 0$, $N_n = 0$ par un argument noetherien (Note 1). On a localement le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & I'^nF/I'^{n+1}F \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
(I'^nF/I'^{n+1}F) \otimes (I'/I'^2) \arrow[rr] & & I'^{n+1}F/I'^{n+2}F
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que pour $n >> 0$ l'homomorphisme canonique

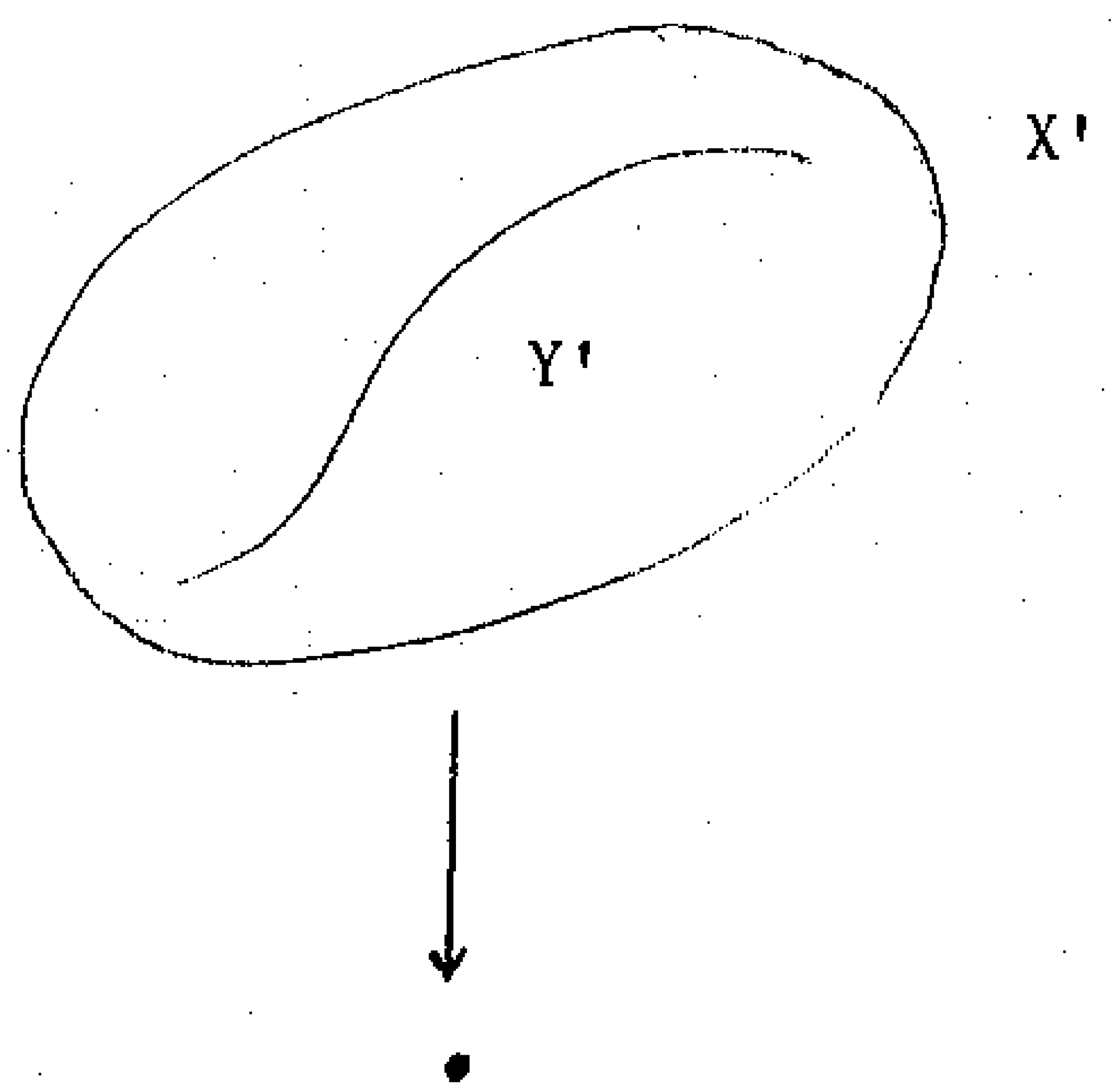
$$(I'^nF/I'^{n+1}F) \otimes (I'/I'^2) \longrightarrow I'^{n+1}F/I'^{n+2}F$$

est bijectif. On en déduit, pour $n >> 0$,

$$I'^{n+r}F/I'^{n+r+1}F \approx (I'^nF/I'^{n+1}F) \otimes (I'/I'^2)^{\otimes r} .$$

Or, en tensorisant par un faisceau ample, on tue la cohomologie si l'on tensorise assez.

Exemple



Soit X' une surface algébrique non singulière i.e. X'/k lisse de dimension 2, Y' une courbe irréductible non singulière complète, $Y = \mathrm{Spec}\ k$ un point, I l'idéal de Y' dans $\mathcal{O}_{X'}$, X' le complété formel de X' selon Y'. Alors I/I^2 est inversible et $I/I^2 = I'/I'^2$. D'autre part $\deg(I/I^2) = -(Y',Y')$ où $(Y'.Y')$ est l'indice de self-intersection de Y' dans X'. La condition ii) de 7.2 est triviale et, compte tenu de la remarque 3) ci-dessus, i) est vérifiée si I/I^2 est ample (relativement au point) ce qui revient à $\deg(I/I^2) > 0$. Donc si $(Y'.Y') < 0$, i.e. si le faisceau normal de Y' dans X' est négatif, Y' est contractible à un point par une modification $X' \to X$ dans la catégorie des espaces algébriques. Il faut en ajouter quelques observations :

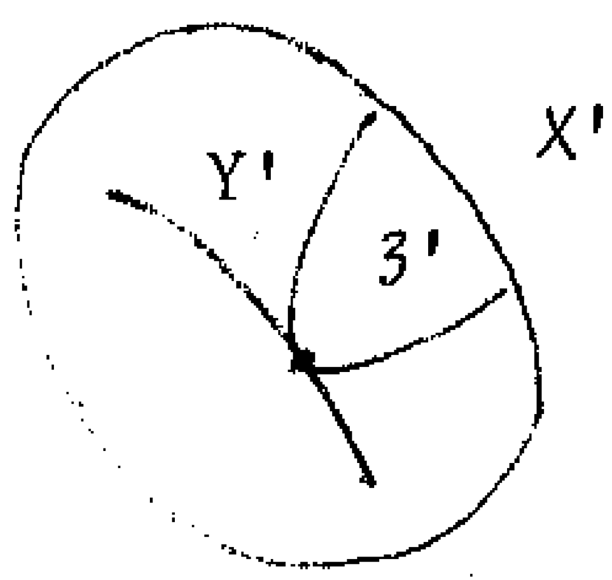
- X n'est pas généralement un schéma.

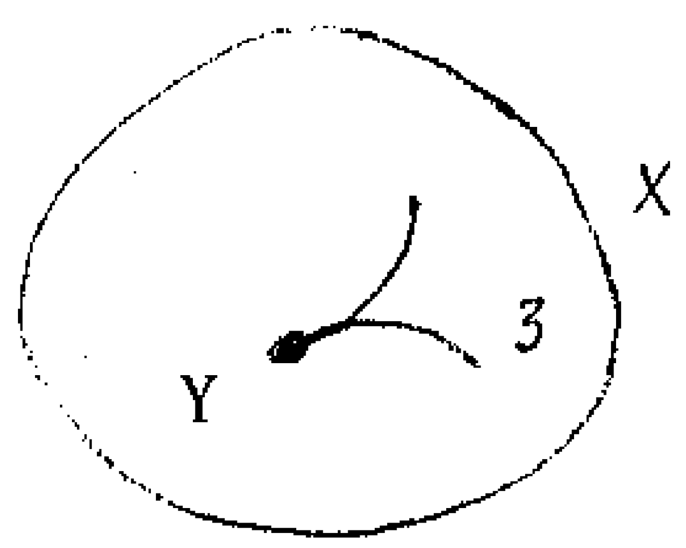
- la négativité du faisceau normal de Y' dans X' est aussi nécessaire dans ce cas (Note 2) ; elle reste aussi suffisante mais pas nécessaire dans le cas $\dim X' > 2$.

- si Y' n'est pas irréductible, $Y' = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ avec C_i irréductible $(1 \leq i \leq n)$ alors la négativité s'exprime par la condition que la matrice $||(C_i.C_j)||$ $(i,j = 1,\dots,n)$ soit définie négative, Y' est contractible à un point ssi Y' est connexe et $||(C_i.C_j)||$ est définie négative.

Proposition 6.3.

Soit $f : X' \to X$ un morphisme propre d'espaces algébriques formels sur k . Soit I un idéal de définition de X et $Y = \mathcal{O}_X/I$. On suppose Y de type fini sur k . Alors f est une modification formelle ssi pour toute branche $\mathfrak{Z} \subset X$, $\mathfrak{Z}' = X' \times_X \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ est une modification formelle.





Observations. 1) Par définition une branche $\mathfrak{Z}$ est un espace algébrique formel de la forme $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\,\bar{A}$ avec $\bar{A}$ anneau local intègre complet de dimension 1.

2) L'importance de la proposition précédente consiste dans le fait que $\mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}$ est algébrisable i.e. est le complété formel d'un espace algébrique $\bar{Z}' \to \bar{Z}$, propre sur $\bar{Z} = \mathrm{Spec}\,\bar{A}$ le long de la fibre fermée (note 3, lemme 2).

Preuve. La condition est nécessaire d'après le lemme 3, Note 3. Supposons-là satisfaite. Pour montrer que f est une modification formelle, il s'agit de vérifier la condition 2) de la définition. Soit $f' : \mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}$ le morphisme précédent. On sait alors que $C(f') = C(f)\, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}$. Supposons que la condition 2) n'est pas satisfaite pour $C(f)$ par exemple. Alors le sous-espace de X' défini par $C(f)$ satisfait l'hypothèse du lemme 1, Note 3. Il existe donc une branche $\mathfrak{Z}''$ de X' telle que $C(f) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}''} = 0$. On peut maintenant appliquer le lemme 4, Note 3 et prendre pour $\mathfrak{Z}$ le plus petit sous-espace fermé de X tel que $\mathfrak{Z}'' \to X' \to X$ se factorise par $\mathfrak{Z} \to X$. On en déduit que $C(f)\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'_1} \supset I'^N\, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'_1}$ avec I' idéal de définition

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$. Or $\mathcal{Z}'' \subset \mathcal{Z}'_1$ donc $I'^N \mathcal{O}_{\mathcal{Z}''} = 0$ ce qui est absurde car $I' \mathcal{O}_{\mathcal{Z}''}$ est un idéal de définition.

Soit maintenant I'' l'idéal de définition de $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ et δ l'idéal de l'immersion diagonale $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$. Supposons que $I''^N \delta \neq 0$ pour tout N naturel. Alors $I^N \not\subset \mathrm{Ann}(\delta)$ donc $\mathcal{Y}'' = V(\mathrm{Ann}(\delta))$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{X}$ tel que $I^N \mathcal{O}_{\mathcal{Y}''} \neq 0$. Il existe une branche $\mathcal{Z}_1$ de $\mathcal{Y}''$ (Note 3, lemme 1) ; $\delta\, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1} \neq 0$ et comme $I'' \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1}$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1}$, donc différent de zéro, et $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1}$ est intègre $I''^N \delta \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1} \neq 0$ pour tout N naturel. Soit $\mathcal{Z}'$ "l'image" de $\mathcal{Z}_1$ par $pr_1 : \mathcal{X}'' \to \mathcal{X}'$ (lemme 4, Note 3) et $\mathcal{Z}$ l'image de $\mathcal{Z}'$ par $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}'' = \mathcal{Z}' \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}' \arrow[d] \\
\mathcal{X}' \arrow[r] & \mathcal{X}''
\end{tikzcd}$$

est cartésien donc $\delta\, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}''}$ est l'idéal de la diagonale. Il est clair que $I'' \mathcal{O}_{\mathcal{Z}''}$ est un idéal de définition de $\mathcal{Z}''$. Donc $I''^N \delta \mathcal{O}_{\mathcal{Z}''} = 0$ pour un N naturel convenable, car $\mathcal{J} = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ est une modification et $\mathcal{Z}'' \subset \mathcal{J} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{J} = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$. Or $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z}' \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}' = \mathcal{Z}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}' \subset \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}'$ et $\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}'$ est une modification formelle car $\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ en est une et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathfrak{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Z}' \arrow[d] \\ \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathfrak{Z} \arrow[r] & \mathfrak{Z} \end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc $\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathfrak{Z}'$ contient une seule branche (Note 3, lemme 2) qui coïncide avec $\mathfrak{Z}''$. D'autre part, $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathcal{X}'' \times_{\mathcal{X}'} \mathfrak{Z}' = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathfrak{Z}'$, ce qui prouve que $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}''$. Il en résulte $I''^N \delta O_{\mathfrak{Z}_1} = 0$, absurde !

Il reste seulement à vérifier la condition 2), 2. Soit R un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et $\mathrm{Spf}\ R \to \mathcal{X}$ un morphisme de type fini. Alors l'image de l'unique point de R est un point fermé de $\mathcal{X}$. On peut remplacer $\mathcal{X}$ par un ouvert affine Spf A et alors R est un A-module de type fini, i.e. $A \to R$ est fini. Donc l'image B de $A \to R$ est un anneau local intègre complet de dimension 1 .

Il en résulte que B définit une branche $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{X}$ telle que $\mathrm{Spf}\ R \to \mathcal{X}$ se factorise par $\mathfrak{Z} \to \mathcal{X}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Z} \arrow[d] \\ \mathcal{X}' \arrow[r] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

cartésien. Alors $\mathrm{Spf}\ R \to \mathfrak{Z}$ se relève à $\mathfrak{Z}'$ donc $\mathrm{Spf}\ R \to \mathcal{X}$ se relève à $\mathcal{X}'$.

Dans ce qui suit, on va utiliser (6.3) pour démontrer (6.2).

On cherche un espace algébrique formel $\mathcal{X}$ ayant un idéal de définition I tel que $\mathcal{X}/I = Y$ ainsi qu'un morphisme $\mathfrak{f} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ tel que $f = \mathfrak{f}_0$. Il faut trouver le faisceau structurel $O_{\mathcal{X}}$. Soit $O'_n = O_{\mathcal{X}}/I'^{n+1}$ où I'^{n+1} est un idéal de définition de $\mathcal{X}'$. On observe que O'_n et $O_{\mathcal{X}'}$ sont des faisceaux pour la topologie étale sur Y' ; f induit un morphisme f_* de sites étales. On prend

$$O = O_{\mathcal{X}} = f_* O_{\mathcal{X}'} \times_{f_* O'_0} O_Y$$

$$O_n = f_* O'_n \times_{f_* O'_0} O_Y$$

dans la catégorie des faisceaux sur le site étale de Y. On a $O_{\mathcal{X}'} = \varprojlim_n O'_n$ et f_* commute avec les limites projectives donc

$$O = O_{\mathcal{X}} = \varprojlim_n O_n \quad .$$

Par hypothèse $R^1 f_*(I'^n/I'^{n+1}) = 0$ pour $n \gg 0$ donc $O_n \to O_{n-1} \to 0$ est exact pour $n \gg 0$. D'autre part, $O_0 = O_Y$ et $O_n \to O_Y \to 0$ est exact pour tout n d'après (2). Il en résulte que $O_{\mathcal{X}} \to O_Y \to 0$ est surjectif. $\mathcal{X}'$ et Y' ont le même site étale et pour tout faisceau cohérent F sur $\mathcal{X}'$ on a $F = \varprojlim_n F_n$ avec $F_n = F/I'^{n+1}F$ donc $f_*F = \varprojlim_n f_*(F_n)$ dans la catégorie des faisceaux de modules sur le site étale de Y.

<u>Lemme 6.4.</u>

Soit $\mathcal{C}$ la classe des O-modules qui sont induits des O_n-modules pour $n \gg 0$. $\mathcal{C}$ est épaisse, i.e. une classe de Serre et f_* est $\mathcal{C}$-exact. Plus précisément, pour toute suite exacte

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

de faisceaux cohérents sur X' on a :

$$\begin{tikzcd} f_*F \to f_*F'' \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Coker}(f_*F \to f_*F'') \\ & f_*(F''/I'^{n}F'') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

pour $n >> 0$.

<u>Preuve</u>. On vérifie facilement que $\mathcal{C}$ est épaisse. Soit

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur $O_{X'}$. Il suffit de voir que $\mathrm{Coker}(f_*F \to f_*F'')$ est un élément de $\mathcal{C}$.

On a $f_*F'' = \varprojlim_n f_*F''_n$ et $f_*F''_{n+1} \to f_*F''_n$ est surjectif pour n assez grand car $R^1 f_*(I'^{n+1} F''/I'^{n+2} F'') = 0$ pour $n >> 0$. Soit $C_n = \mathrm{Coker}(f_*F_n \to f_*F''_n)$. Il en résulte que le morphisme canonique $C_{n+1} \to C_n$ est surjectif pour $n >> 0$. D'autre part, la suite

$$0 \to F'/I'^{n+1} F \cap F' \to F_n \to F''_n \to 0$$

est exacte. On a donc la suite exacte

$$f_*F_n \to f_*F''_n \to R^1 f_*(F'/I'^{n+1} F \cap F') .$$

Considérons la suite exacte

$$0 \to I'^{n+1} F \cap F'/I'^{n+2} F \cap F' \to F'/I'^{n+2} F \cap F' \to F'/I'^{n+1} F \cap F' \to 0 .$$

Avec Artin-Rees, on déduit qu'il existe un r naturel tel que

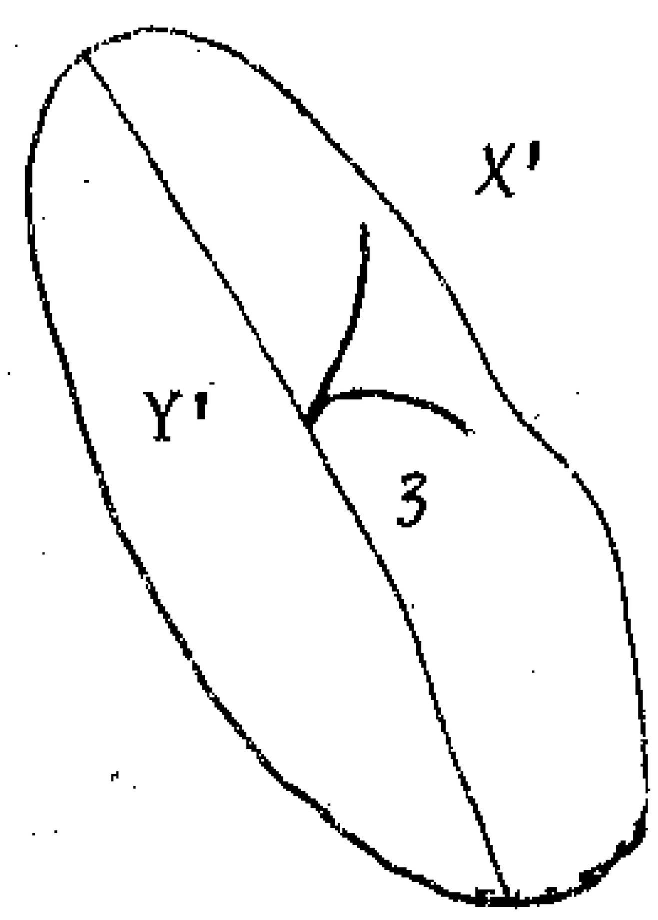
$$I'^{n+1} F \cap F' = I'^{n+1-r}(I'^{r} F \cap R')$$

$$I'^{n+2} F \cap F' = I'^{n+2-r}(I'^{r} F \cap F')$$

pour $n+1 \geq r$. En vertu de l'hypothèse $R^1 f_*(I'^{n+1}F \cap F'/I'^{n+2}F \cap F') = 0$ pour n assez grand dont le morphisme $R^1 f_*(F/I'^{n+2}F \cap F') \to R^1 f_*(F/I'^{n+1}F \cap F')$ est injectif pour $n >> 0$. On en déduit que pour $n >> 0$ le morphisme $C_{n+1} \to C_n$ est injectif. Donc $C_{n+1} = C_n = C$ pour $n >> 0$. Par "diagram chasing" on voit maintenant que $C = \mathrm{coker}(f_*F \to f_*F)$, compte tenu du fait que $f_*F'' = \varprojlim_n f_*F''_n$.

Lemme 6.5.

$(f_*I')\, O_{\mathcal{X}'}$ est un idéal de définition de $\mathcal{X}'$.



Preuve. Si le support du sous-espace fermé de $\mathcal{X}'$ défini par $(f_*I')\, O_{\mathcal{X}'}$ n'est pas Y' alors d'après le lemme 1, Note 3, il existe une branche $\mathcal{Z}$ qui soit un sous-espace de celui-ci. On a un morphisme surjectif

$$O_{\mathcal{X}'} \to O_{\mathcal{Z}}$$

car $\mathcal{Z}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{X}'$ et $(f_*I')\, O_{\mathcal{Z}} = 0$.

Soit $J = I'\, O_{\mathcal{Z}}$. Alors J est un idéal de définition de $\mathcal{Z}$, donc $J^n \neq 0$ pour tout n. Le morphisme précédent induit un morphisme surjectif $I' \to J$ donc avec (6.4.) on trouve

$$\begin{array}{ccc} f_*I' \to f_*J & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(f_*I' \to f_*J) \\ \searrow & & \nearrow \\ & f_*(J/I'^nJ) & \end{array}$$

pour n assez grand. Or $I'^nJ = J^{n+1}$. Il en résulte $f_*J^{n+1} \subset (f_*I')\, O_{\mathcal{Z}}$, i.e. $J^{n+1} = 0$ ce qui est absurde, car $3 = \mathrm{Spf}\,\overline{A}$, i.e. 3 est affine ce qui implique $J^{n+1} = (f_*J^{n+1})\, O_3$.

<u>Lemme 6.6.</u>

Soit $I = f_*I'$ le noyau de $O \to O_0 = O_Y$. Alors, pour tout r il existe n tel que

$$f_*I'^r \supset I^r \supset f_*(I'^{n+r})$$

i.e. les deux filtrations définissent la même topologie.

<u>Note</u>. On a $O = f_*O_{X'} \times_{f_*O'_0} O_Y \approx f_*O_{X'} \times_{f_*O'_n} f_*O'_n \times_{f_*O'_0} O_Y = f_*O_{X'} \times_{f_*O'_n} O$ donc $\ker(O \to O_n) = \ker(f_*O_{X'} \to f_*O'_n) = f_*I'^{n+1}$. On voit ainsi que O est complet pour la topologie définie par les $f_*I'^{n+1}$, $n = 0,1,\ldots$ On en conclut d'après (6.6.) que O <u>est complet pour la topologie I-adique</u>.

<u>Preuve</u>. Puisque $I = f_*I'$ il est clair que $f_*I'^r \supset I^r$. Il s'agit donc de prouver l'inclusion contraire. Par (6.5.) $IO_{X'}$ est un idéal de définition de X' . Il en résulte que localement sur Y on a un système des sections $a_1,\ldots,a_m \in I^r$ qui engendrent un idéal de définition J' dans $O_{X'}$. Soit

$$O_{X'}^m \xrightarrow{\alpha} J' \to 0$$

l'homomorphisme défini par $a_1,\ldots,a_m$. D'après (6.4.) on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f_*(O_{X'}^m) \arrow[r, "f_*(\alpha)"] & f_*(J') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(f_*\alpha) \arrow[r] & 0 \\
 & f_*(J'/I'^N J') \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

avec N convenablement choisi. Donc toute section de $I'^N J'$ se relève dans $f_*(O^m_{X'})$. C'est-à-dire que $f_*(I'^N J') \subset \operatorname{Im} f_*(\alpha)$. Or $\operatorname{Im} f_*(\alpha) \subset I^r$ par construction donc $f_*(I'^N J') \subset I^r$. D'autre part, $I'^N J'$ est un idéal de définition de X' d'où on déduit que $I'^{n+r} \subset I'^N J'$ pour n assez grand, ce qui prouve l'inclusion $f_*(I'^{n+r}) \subset I^r$.

Lemme 6.7.

O est le faisceau structurel d'un espace algébrique formel X dont I est un idéal de définition.

Preuve. O est I-adiquement complet (6.6), Note, et $O/I = O_Y$. Il reste à voir que le faisceau de O-algèbres O/I^n est cohérent pour tout n naturel. La suite exacte

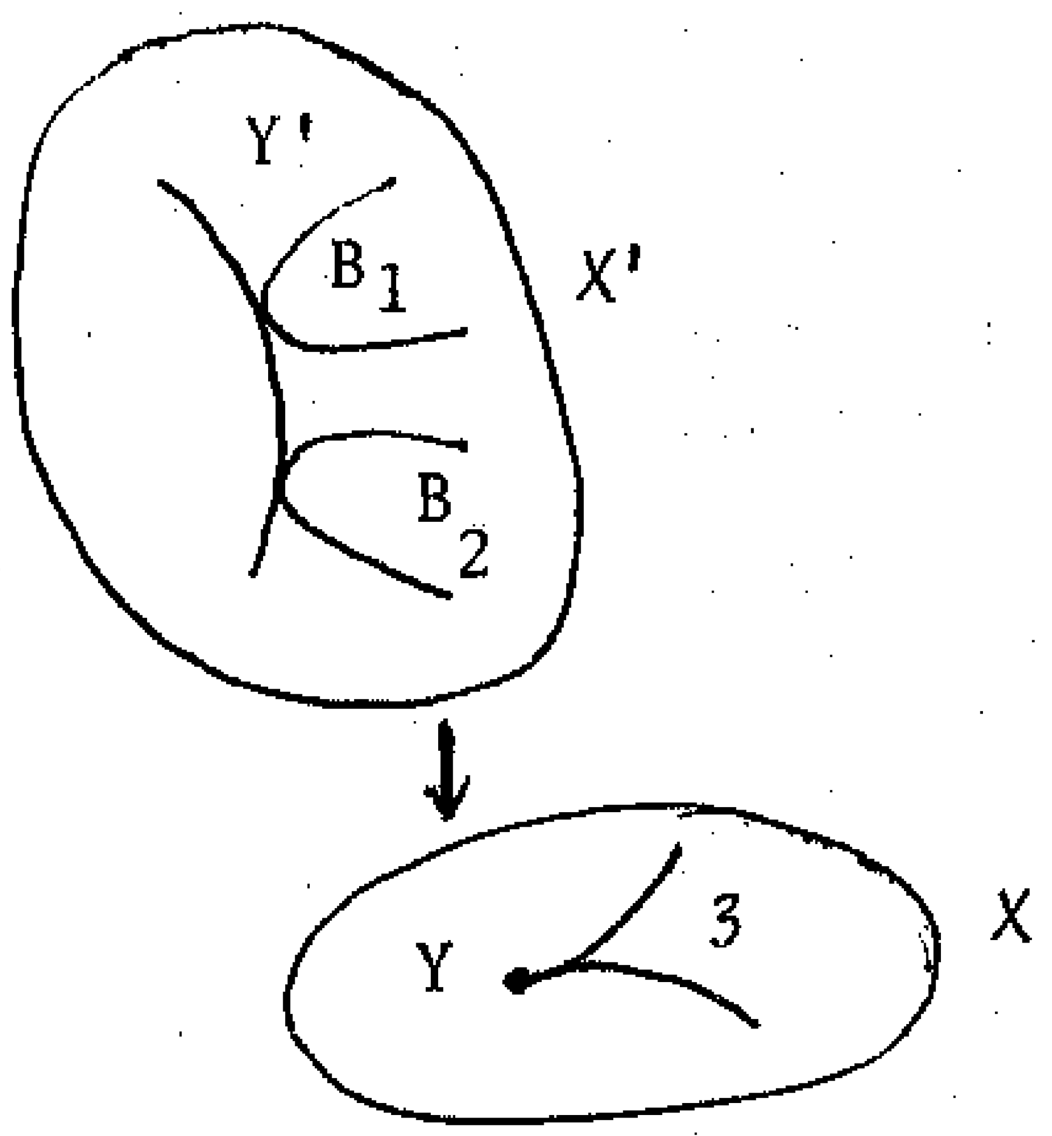
$$0 \to f_*(I'/I'^{n+1}) \times_{f_*(O'_0)} (0) \to O_n \to O_Y \to 0$$

montre qu'il suffit que $f_*(I'/I'^{n+1})$ soit cohérent. Induction sur n en tenant compte de la suite exacte

$$0 \to f_*(I'^n/I'^{n+1}) \to f_*(I'/I'^{n+1}) \to f_*(I'/I'^n) \to R^1 f_*(I'^n/I'^{n+1})$$

où $f_*(I'^n/I'^{n+1})$, $R^1 f_*(I'^n/I'^{n+1})$ sont cohérents ([AS]).

On a un morphisme canonique $\mathfrak{f} : X' \to X$ défini par f et par l'homomorphisme $O_X = f_*O_{X'} \times_{f_*O'_0} O_Y \to f_*O_{X'}$. Pour conclure la démonstration de (6.2) il faut prouver que $\mathfrak{f}$ est une modification. D'abord $\mathfrak{f}$ est propre car f l'est par hypothèse. Dans le reste on applique (6.3). Soit $\mathfrak{Z}$ une branche de X et $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \times_X X'$. On va montrer que



$3'$ possède une seule branche. Supposons que $3'$ en ait deux, B_1 et B_2 . Soit $B = B_1 \cup B_2 \subset 3'$. Alors B est affine et on a une suite exacte

$$O_{3'} \to O_B \to 0 .$$

Lemme 6.8.

Pour tout faisceau F cohérent sur X l'homomorphisme canonique

$$F \to f_* f^* F$$

est un C-isomorphisme.

Preuve. Pour $F = O_X$ on a $f^* O_X = O_{X'}$ et $O_X = f_* O_{X'} \times_{f_* O'_0} O_Y$ par construction. Or l'homomorphisme $O_X \to f_* O_{X'}$ est un I-isomorphisme i.e. le noyau et le conoyau sont de I-torsion. Pour un F cohérent quelconque on peut le supposer de présentation finie car le problème est local sur Y . Soit donc une suite exacte

$$O_X^m \to O_X^n \to F \to 0 .$$

On en déduit une suite C-exacte

$$f_* f^* O_X^m \to f_* f^* O_X^n \to f_* f^* F \to 0$$

en vertu de 7.4. Or le diagramme C-exact (d'après (6.4))

$$\begin{array}{ccccc}
O_X^m & \longrightarrow & O_X^n & \longrightarrow & F \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
f_* f^* O_X^m & \longrightarrow & f_* f^* O_X^n & \longrightarrow & f_* f^* F \to 0
\end{array}$$

est commutatif et les deux flèches verticales de gauche sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes. Donc il en est de même de la troisième.

En appliquant (6.4) on trouve que la suite

$$\mathfrak{f}_* \, O_{\mathcal{Z}'} \to \mathfrak{f}_* \, O_{\mathcal{B}} \to 0$$

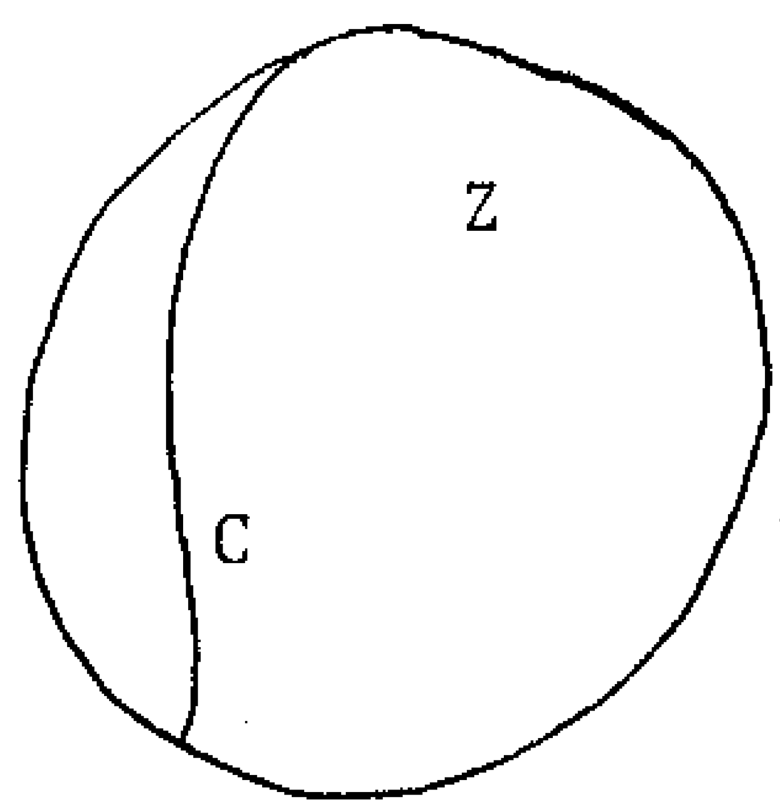
est $\mathcal{C}$-exacte ou mieux encore

$$O_{\mathcal{Z}} \to f_* \, O_{\mathcal{B}} \to 0$$

est $\mathcal{C}$-exacte car $O_{\mathcal{Z}} \to f_* \, O_{\mathcal{Z}'} = \mathfrak{f}_* \mathfrak{f}^* \, O_{\mathcal{Z}}$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme. Or $I \, O_{\mathcal{B}}$ est un idéal de définition de $O_{\mathcal{B}}$ donc si $\mathcal{Z} = \mathrm{Spf}\, \overline{A}$ avec $\overline{A}$ anneau local complet d'idéal maximal m et $\mathcal{B} = \mathrm{Spf}\, \overline{B}$ alors $m\,\overline{B}$ est un idéal définition de $\overline{B}$ et $\phi : \overline{A} \to \overline{B}$ est un m-isomorphisme. Donc pour tout $x \in \overline{A} \setminus m$, $\phi_x : \overline{A}_x \to \overline{B}_x$ est un isomorphisme.

Mais $\overline{B}_x$ est l'anneau total des fractions de $\overline{B}$ car $\overline{B}$ est un anneau semi-local complet de dimension 1 et $m\overline{B}$ un idéal de définition. Il en résulte que $\overline{B}$ est local puisque $\overline{A}_x$ est un corps, $\overline{A}_x = \mathrm{Frac}\, \overline{A}$. Or cela est contradictoire . Ainsi on voit que $\mathcal{Z}'$ possède une seule branche. Il en résulte, comme dans la démonstration du lemme 2 de la Note 3, que $\mathcal{Z}' = \mathcal{Y} \cup \mathcal{D}$ avec $\mathcal{Y}$ espace algébrique et $\mathcal{D} = \mathrm{Spf}\, \overline{D}$, $\overline{D}$ anneau local complet de dimension 1. En plus le raisonnement précédent montre que l'homomorphisme $\overline{A} \to \overline{D}$ défini par $\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ est un $\underline{m}$-isomorphisme. On voit aussi (comme dans la démonstration du lemme 2, Note 3) que $\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ est algébrisable disons par $\overline{Z}' \to \overline{Z} = \mathrm{Spec}\, \overline{A}$ et alors le fait que $\overline{A} \to \overline{D}$ est un m-isomorphisme prouve que $\overline{Z}' \to \overline{Z}$ est une modification par rapport à la fibre au-dessus du point fermé de $\overline{Z}$. Il en résulte que $\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ est une modification formelle ([AFM] II, prop. (1.13) ii)).

DETERMINATION D'UN FAISCEAU COHERENT SUR UN ESPACE ALGEBRIQUE EN TERMES DES DONNEES FORMELLES LE LONG D'UN SOUS-ESPACE FERME.



Soit Z un espace algébrique noethérien et C un sous-espace fermé. On se pose le problème de décrire les faisceaux cohérents sur Z en termes des restrictions à $V = Z \setminus C$ et des trucs le long de C.

Soient Z un espace topologique, C un sous-ensemble fermé, $V = Z \setminus C$, F un faisceau d'ensembles sur Z et $C \xrightarrow{i} Z$, $V \xrightarrow{j} Z$ les applications d'inclusion. On a alors une flèche fonctorielle

$$i^* F \xrightarrow{\phi} i^* j_* j^* F$$

donc un foncteur $(\mathrm{Faisc}/Z) \to (F_V, F_C, \phi : F_C \to i^* j_* F_V)$

$$F \mapsto (j^* F \, , \, i^* F \, , \, \phi) \, .$$

Ce foncteur établit une équivalence de catégories.

Pour un faisceau cohérent F sur un espace algébrique Z dont C est un sous-espace, il ne suffit pas de connaître $i^* F$, il faut avoir la restriction à tous les voisinages infinitésimaux de C, i.e. au complété de Z le long de C.

Soit $\overline{Z} \xrightarrow{g} Z$ un morphisme plat d'espaces algébriques noethériens dont les complétés formels $\overline{\mathfrak{Z}}$, de $\overline{Z}$ le long de $\overline{C} = g^{-1}(C)$ et $\mathfrak{Z}'$, de Z le long de C, sont isomorphes par le morphisme déduit de g (Exemple: $Z = \mathrm{Spec}\, A$, $C = V(I)$, $\overline{A}$ le complété I-adique de A, $\overline{Z} = \mathrm{Spec}\, \overline{A}$, $g = \overline{Z} \to Z$ le morphisme défini par le morphisme canonique $A \to \overline{A}$).

Théorème 6.9. ([AFM] II pour un cas particulier)

Dans les hypothèses précédentes, soit $\overline{Z}\setminus\overline{C} = \overline{V}$, $\overline{F}$ l'image inverse de F sur $\overline{Z}$. Alors

i) le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(Z) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[d] \\ \overline{F}(\overline{Z}) \arrow[r] & \overline{F}(\overline{V}) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

ii) Soit $F_V = j^*F$, $F_V/\overline{V}$ l'image inverse de F_V sur $\overline{V}$ et $\phi : F_V/\overline{V} \xrightarrow{\sim} \overline{F}/\overline{V}$ l'isomorphisme canonique. Le foncteur $F \mapsto (F_V, \overline{F}, \phi)$ est une équivalence de catégories.

Retour aux modifications

Reprenons le diagramme du début de ce chapitre

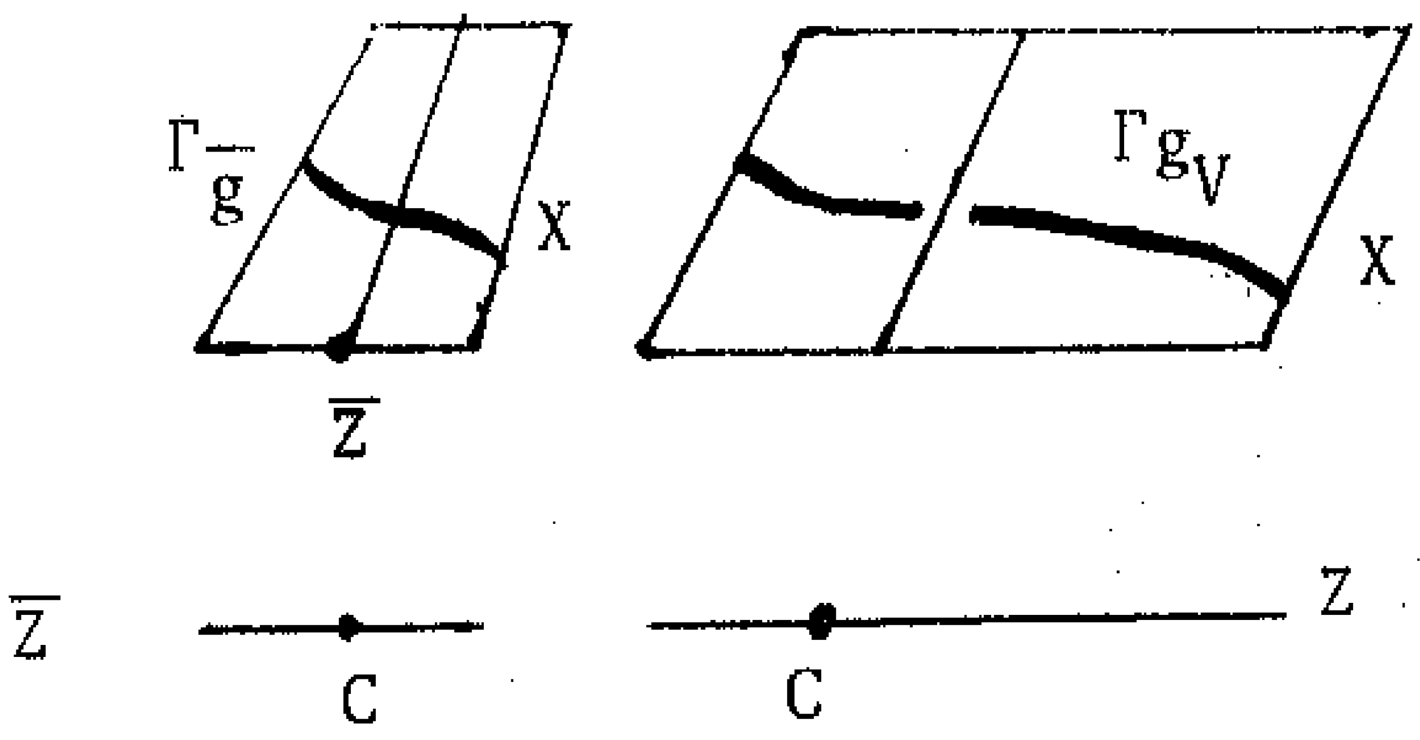
$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[r, hook] \arrow[dd, "f"] & Y' \arrow[dd] & \mathcal{X}' \arrow[l, hook'] \arrow[dd, "\mathfrak{f}"] \\ \mathcal{U} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & \\ & X \arrow[r, hook] & Y & \mathcal{X} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} .$$

Dans le cas d'une contraction, tout est connu, sauf X . Il faut décrire le foncteur "morphismes dans X" et puis vérifier les conditions de représentabilité. On se restreindra au foncteur sur $Z = \operatorname{Spec} A$ avec A noethérien. Soit $g : Z \to X$ une flèche donnée. Alors on a $\mathbf{C} = g^{-1}(Y)$, $V = Z\setminus C$ et $g_V : V \to \mathcal{U}$. Soit $C = V(I)$, $\overline{A}$ le complété I-adique de A , $\mathfrak{Z} = \operatorname{Spf} \overline{A}$ et $\overline{Z} = \operatorname{Spec} \overline{A}$. On a un morphisme $\mathcal{Y} : \mathfrak{Z} \to \mathcal{X}$, le complété de g le long de C .

Lemme 6.10.

Les trois données C , g_V et $\mathcal{Y}$ déterminent g de façon unique.

<u>Preuve.</u> Montrons comment on peut retrouver le graphe $\Gamma_g \subset Z \times X$ de g c'est-à-dire son faisceau structurel.



Le graphe de g est un sous-truc formel de $\overline{Z} \times X$ qui provient d'un vrai sous-truc de $\overline{Z} \times X$ (d'après le théorème d'existence de Grothendieck [AS]). On obtient ainsi $\Gamma_{\overline{g}} \subset \overline{Z} \times X$ avec $\overline{g} : \overline{Z} \to X$ un morphisme d'espaces algébriques. Afin qu'on puisse appliquer 6.9. on a besoin de la condition de compatibilité qu'il faut exprimer sans utiliser X. Par contre, on peut se servir de X'. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\ \mathfrak{Z} \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

C'est une modification formelle car $\mathfrak{f}$ en est une (Note 3, lemme 3). Or $\mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}$ est algébrisable i.e. il existe $\overline{Z}'$ unique à isomorphisme près et une modification $\overline{Z}' \to \overline{Z}$ dont $\mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}$ soit précisément le complété. En effet $\mathfrak{Z}'$ est un sous-espace formel de $\overline{Z} \times X'$ qui est formellement propre sur $\overline{Z}$. Son faisceau structurel est un faisceau formel sur $\overline{Z} \times X'$ à support propre sur $\overline{Z}$, qui est un schéma formel affine, donc ce faisceau formel provient d'un vrai faisceau (théorème d'existence de Grothendieck [AS]). De cette façon on trouve $\overline{Z}' \subset \overline{Z} \times X'$. Le morphisme $\overline{Z}' \to \overline{Z}$ est une modification ([AFM] II partie finale de la démonstration de 1.13). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{Z}' \arrow[r] \arrow[dr] & X' \\
\bar{V} \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{U} \arrow[u, hook] \\
 & \bar{Z} &
\end{tikzcd}$$

où $\bar{V} = \bar{Z} \setminus C$ et $\bar{Z}' \to X'$ est induit par la projection $\bar{Z} \times X' \to X'$. On en obtient la condition de compatibilité : ce que le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & \bar{V} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
V \arrow[rr, "g_V"'] & & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

doit être commutatif.

D'après ce qui précède, le foncteur F, "morphismes dans X", peut être défini pour A noethérien comme suit :

$F(A) = \left\{\right.$

a) sous-ensemble fermé $C = V(I)$ de $Z = \operatorname{Spec} A$.

b) $g_V : V \to \mathcal{U}$ où $V = Z \setminus C$, $\mathcal{U} = X' \setminus Y'$

$\mathcal{g} : \mathfrak{Z} \to \mathcal{X}$ où $\mathfrak{Z} = \operatorname{Spf} \bar{A}$ et $\bar{A}$ est le complété I-adique de A.

c) le diagramme $(*)$ correspondant à ces données doit être commutatif.

Il est clair que les données précédentes sont fonctorielles en A. On a déjà vu que si X existe F est représenté par X.

Proposition 6.11. (cf. [AFM] II, 3.7.)

Si F est représentable par un espace algébrique alors les données Y', $\mathcal{U} \xrightarrow{1} \mathcal{U}$, $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ définissent une flèche $X' \to X$ qui est la contraction cherchée.

Cas des dilatations

Il s'agit d'exprimer le foncteur X' à l'aide des éléments connus i.e. par les flèches solides dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] & Y' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathfrak{X}' \arrow[d, dash] \\
\mathcal{U} \arrow[ur, dash, dashed] \arrow[r, dash] & X \arrow[r, dash] & Y \arrow[r, dash] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd} .$$

Par définition on prend pour A noethérien

$$F(A) = \begin{cases} g : Z \to X \ , \ Z = \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{g}' : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}' \text{ où } \mathfrak{Z} \text{ est le complété de } Z \text{ le long de} \\ g^{-1}(Y) \ . \\ \text{Le diagramme suivant doit être commutatif} \\ \begin{tikzcd} \mathfrak{Z} \arrow[rr, "\mathfrak{g}'"] \arrow[dr, "\mathfrak{g}"'] & & \mathfrak{X}' \arrow[dl, "\mathfrak{f}"] \\ & \mathfrak{X} & \end{tikzcd} \\ \text{où } \mathfrak{g} \text{ est le complété de } g \ . \end{cases}$$

Ces foncteurs sont représentables i.e. vérifient les conditions 0) - 4) du critère de représentabilité (5.2.). On envoie à [AFM] II pour la démonstration. La condition 3) i.e. l'existence des déformations effectives universelles est triviale. Par exemple, dans le cas d'une contraction, ensemblistiquement X est construit et avec les complétés de ses anneaux locaux : pour un point de $\mathcal{U}$ on a le complété de son anneau local sur $\mathcal{U}$ et pour un point Y on prend son anneau local dans $\mathfrak{X}$. L'essentiel est la démonstration de 1) i.e. du fait que ces foncteurs sont localement de présentation finie. En effet ils font intervenir des complétés

$\overline{A} = \varprojlim A/I^n$ et si $A = \varinjlim_i A_i$, $I = \varinjlim_i I_i$ ($I_i \subset A_i$) l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_i (\varprojlim_n A_i/I_i^n) \to \varprojlim (A/I^n)$$

défini par $\overline{A}_i = \varprojlim_n A_i/I_i^n \to \overline{A}$ n'est pas généralement un isomorphisme. Donc par exemple, la donnée de

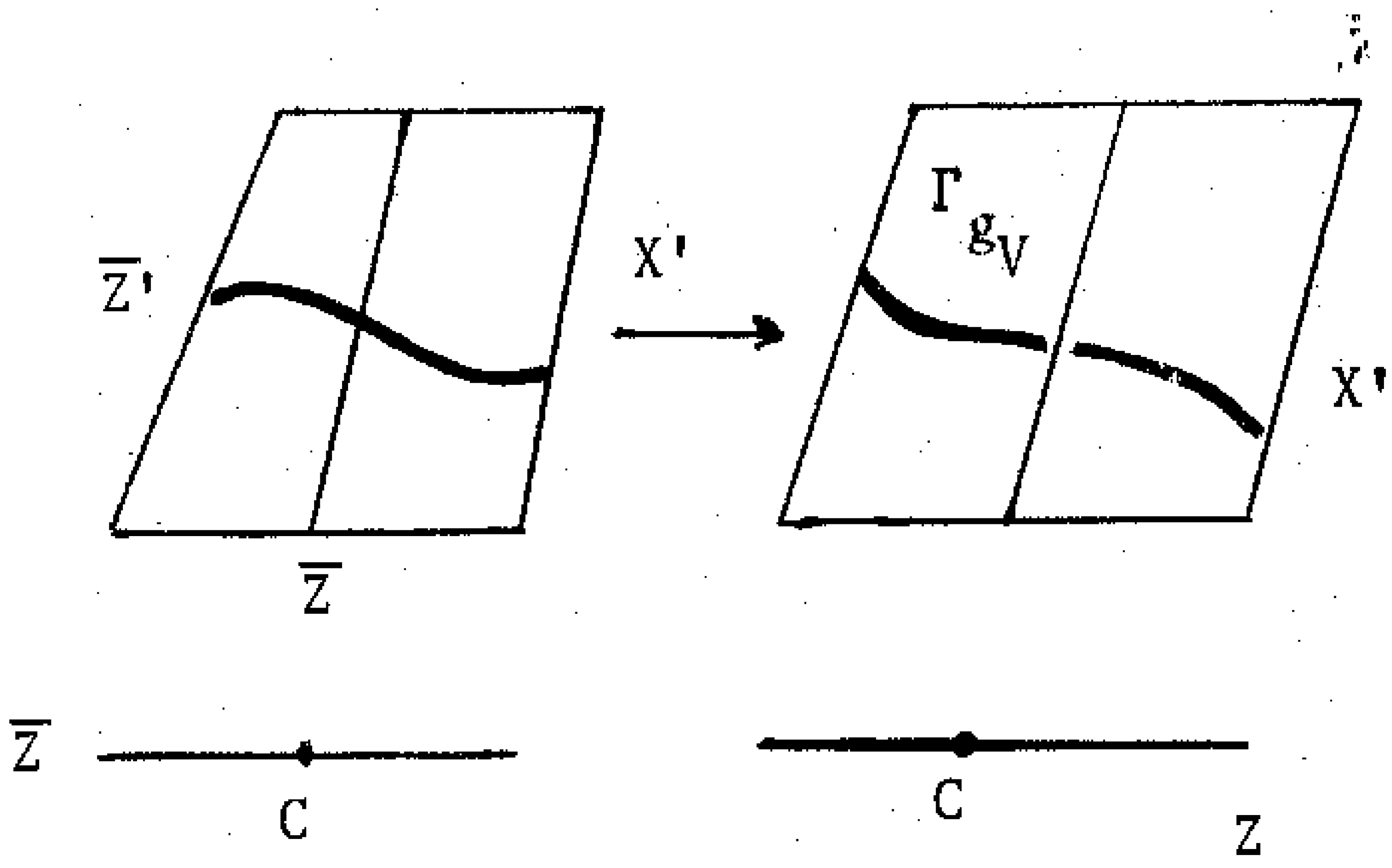
$$g : \mathfrak{Z} \to X$$

dans le cas d'une contraction n'a pas l'air de présentation finie. Cependant, avec la condition de compatibilité, on en sort. Voici l'idée de la démonstration.

Soit $A = \varinjlim_i A_i$ (limite inductive filtrante) A , A_i noethériens. Il faut descendre $\xi \in F(A)$ d'une façon essentiellement unique à $\xi_i \in F(A_i)$ i.e. de telle sorte que si ξ se descend aussi à $\xi_j \in F(A_j)$ il existe un $h \geq i, j$ pour lequel ξ_i , ξ_j correspondent au même élément de $F(A_h)$.

Par définition ξ est une collection formée par un idéal I de A , $g_V : V \to \mathcal{U}$ où $V = Z \setminus V(I)$, $g : \mathfrak{Z} \to X$ où $\mathfrak{Z} = \operatorname{Spf} \overline{A}$ avec $\overline{A}$ le complété I-adique de A . De plus on suppose que la condition de compatibilité (*) est satisfaite.

Soit $\overline{Z} = \operatorname{Spec} \overline{A}$. On a que $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \times_X X'$ est un sous-truc formel de $\overline{Z} \times X'$ qui est propre sur $\overline{Z}$ donc il existe un sous-schéma fermé $\overline{Z}'$ de $\overline{Z} \times X'$ tel que $\mathfrak{Z}'$ soit le complété formel de $\overline{Z}'$ (EGA III. 5, [AS]) et $\mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}$ est induit par $\overline{Z}' \to \overline{Z}$. On peut déduire de $\overline{Z}'$ un sous-schéma fermé Z' de $Z \times X'$ en appliquant 6.9. En effet on a le morphisme plat $\overline{Z} \times X' \to Z \times X'$, le sous-schéma $\overline{Z}'$ de $\overline{Z} \times X'$ et le graphe $\Gamma_{g_V} \subset V \times X'$ que l'on peut recoller grâce à la condition de compatibilité (*) . Le morphisme $Z' \to Z$ pris avec $C = V(I)$ constitue une modification car $\Gamma_{g_V} \xrightarrow{\sim} V$. Soit C' le sous-ensemble fermé de



Z' image inverse de C . On obtient comme cela le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dr] & \\
C' \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[dr] & & X' \\
C \arrow[dr] & Z' \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

dont tous les éléments sont de présentation finie : C est un fermé de Z , Z' un fermé de $Z \times X'$, C' aussi. Donc on peut descendre C , Z' , C' à $Z_i = \operatorname{Spec} A_i$ avec i convenable

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dr] & \\
C'_i \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[dr] & & X' \\
C_i \arrow[dr] & Z'_i \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& Z_i &
\end{tikzcd}$$

On peut supposer X affine $X = \operatorname{Spf} \overline{B}$ ([AFM] II, 4). Soit

$$\overline{B}' = H^0(X', O_{X'})$$

$$\overline{A}' = H^0(\mathfrak{Z}', O_{\mathfrak{Z}'}) = H^0(\overline{Z}', O_{\overline{Z}'})$$

$$A' = H^0(Z', O_{Z'}) \ .$$

D'après le théorème des fonctions holomorphes $\overline{A}'$ est un $\overline{A}$-module fini et il est précisément le complété I-adique de A'. Si $A \to A'$ est défini par $Z' \to Z$ alors dans la suite exacte

$$0 \to \varepsilon \to A \to A' \to \delta \to 0$$

ε et δ sont de I-torsion (i.e. sont annulés par une puissance de I) car $Z' \to Z$ est une modification. Il en résulte que ε et δ sont I-adiquement discrets donc aussi complets. En complétant, on a

$$0 \to \varepsilon \to \overline{A} \to \overline{A}' \to \delta \to 0$$

donc le noyau et le conoyau de $\overline{A} \to \overline{A}'$ sont de I-torsion. On a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\overline{A}' & \overline{B}' \arrow[l] \\
\overline{A} \arrow[u] & \overline{B} \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

qui correspond à

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}' \arrow[d] \\
\mathcal{Z} \arrow[r, "g"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

En revenant à F il est clair que C et g_V se descendent, donc le problème est de descendre g de telle sorte que le diagramme $(*)$ correspondant soit commutatif. On est déjà descendu à

$$\begin{tikzcd}
\overline{A}'_i & \overline{B}' \arrow[l] \\
\overline{A}_i \arrow[u] & \overline{B} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\overline{A}'_i = H^0(\overline{Z}'_i, O_{\overline{Z}'_i})$, $A_i = H^0(Z_i, O_{Z_i})$ donc le problème est de trouver $\phi_i : \overline{B} \to \overline{A}_i$ i.e. de descendre ϕ . Or $\overline{B}' \to \overline{A}'$ provient d'un vrai homomorphisme $B' = \Gamma(Z', O_{Z'}) \to A'$ notamment celui défini par la projection $Z' \to X'$. Donc $\overline{B}' \to \overline{A}'$ se descend, ce qui montre que l'homomorphisme composé $\phi' : \overline{B} \to \overline{B}' \to \overline{A}'$ se descend aussi. On en obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{A}'_i \arrow[r] & \overline{A}' \\
\overline{A}_i \arrow[u] \arrow[r] & \overline{A} \arrow[u] \\
& B \arrow[u, "\phi"] \arrow[uul, bend left=60] \arrow[uu, bend right=60, "\phi'"']
\end{tikzcd}$$

Maintenant, pour i assez grand, il existe une flèche $B \to \overline{A}_i$ qu'on peut insérer dans ce diagramme en préservant sa commutativité ([AFM], II, pp. 108-110 ; on y prouve également la commutativité de (*) et aussi que cette flèche est essentiellement unique).

APPLICATION AUX ESPACES DE MOISEZON

Définition

Soit X un espace analytique compact sur $\mathbb{C}$. X est un espace de Moisezon si toute composante irréductible de X_{red} a le nombre maximum possible de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes par rapport à $\mathbb{C}$ (i.e. égal avec la dimension complexe de cette composante).

Exemple

Soit X un espace algébrique de type fini sur $\mathbb{C}$. L'espace analytique sous-jacent à X , X^{an} s'obtient en prenant un recouvrement affine étale $\{U_\alpha\} \to X$ et puis en recollant les espaces analytiques U^{an} selon $(U_\alpha \times_X U_\beta)^{an}$. Ici, l'espace analytique associé à un schéma affine U est obtenu en considérant U comme sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n])$ et en prenant pour U^{an} le sous-espace analytique de $\mathbb{C}^n$ défini par l'idéal de U . On a aussi un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux $X(\mathbb{C}) \to X^{an}$. Si $X/\mathbb{C}$ est propre, alors X^{an} est compact et il est clair que X^{an} est un espace de Moisezon i.e. possède assez de fonctions méromorphes.

Théorème ([AFM], II, 7)

Le foncteur $X \to X^{an}$ définit une équivalence de catégories

$$(\text{esp algébriques propres}/\mathbb{C}) \to (\text{Moisezon spaces}) .$$

L'essentiel dans la démonstration de ce théorème est le suivant :

Proposition 6.12

Si X est un espace de Moisezon, alors X est isomorphe à l'espace analytique sous-jacent d'un espace algébrique.

Esquisse de la démonstration : A l'aide des fonctions méromorphes, on plonge un ouvert U partout dense de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$. L'adhérence dans $X \times \mathbb{P}^N$ du graphe de $U \to \mathbb{P}^N$ est un espace analytique X' et la projection $X' \to X$ est une modification. En particulier $X' \to X$ est biméromorphe donc X' est aussi un espace de Moisezon. Il en est de même de l'adhérence $X'' \to \mathbb{P}^N$ de l'image de U dans

$\mathbb{P}^N$ car la projection $X' \to X''$ est une modification. En vertu du théorème de Chow il en résulte que X'' est algébrique. Par construction, on a le diagramme de modifications

$$\begin{tikzcd}
 & & X' & & \\
\mathcal{U} \arrow[urr, hook] \arrow[dr, hook] & & & & \mathcal{U} \arrow[ull, hook] \arrow[dl, hook] \\
 & X \arrow[from=1-3] & & X'' \subset \mathbb{P}^N \arrow[from=1-3] &
\end{tikzcd}$$

Soit $Y = X \setminus \mathcal{U}$, $Y' = X' \setminus \mathcal{U}$, $Y'' = X'' \setminus \mathcal{U}$.

<u>Lemme</u>. Tout sous-espace fermé d'un espace de Moisezon est aussi un espace de Moisezon. (cf. [MS] ou aussi A. Douady, Sém. Bourbaki 1967/68, exp. 344 pour une esquisse de démonstration).

En utilisant ce résultat on peut démontrer 7.12. par récurrence sur la dimension de X . En effet, par l'hypothèse de récurrence Y , Y' sont algébriques. Soit $\mathcal{X}''$ le complété formel de X'' le long de Y'' , $\mathcal{X}'$ le complété formel de X' le long de Y' et $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ induit par $X' \to X''$. On a que $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ est une modification formelle et $\mathcal{X}' = \varprojlim Y'_n$, $\mathcal{X}'' = \varprojlim Y''_n$. Or Y'_n , Y''_n sont algébriques car Y' , Y'' le sont (Y'' est algébrique car sous-espace de X''). Donc $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ est une modification des espaces algébriques formels. Par le théorème d'existence des dilatations ((6.1),1)) on en déduit que X' est algébrique, car X' uniquement déterminé par $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ et X'' ([AFM], II, 6.9.). La démonstration de l'algébricité de X est tout à fait similaire en utilisant cette fois l'existence des contractions ((6.1), 2).

ANNEXE

NOTE 1

On se réduit au cas local i.e. $X' = \mathrm{Spf}\,\bar{A}$ avec $\bar{A}$ un anneau adique et I' définit un idéal de définition I de $\bar{A}$. Donc $Y = \mathrm{Spec}\,B$, $B = \bar{A}/I$. On peut supposer $I/I^2 \approx B$ et F défini par le $\bar{A}$-module noetherien M. On considère les gradués de $\bar{A}$, M par rapport à la filtration I-adique

$$\mathrm{gr}_\bullet(\bar{A}) = C$$

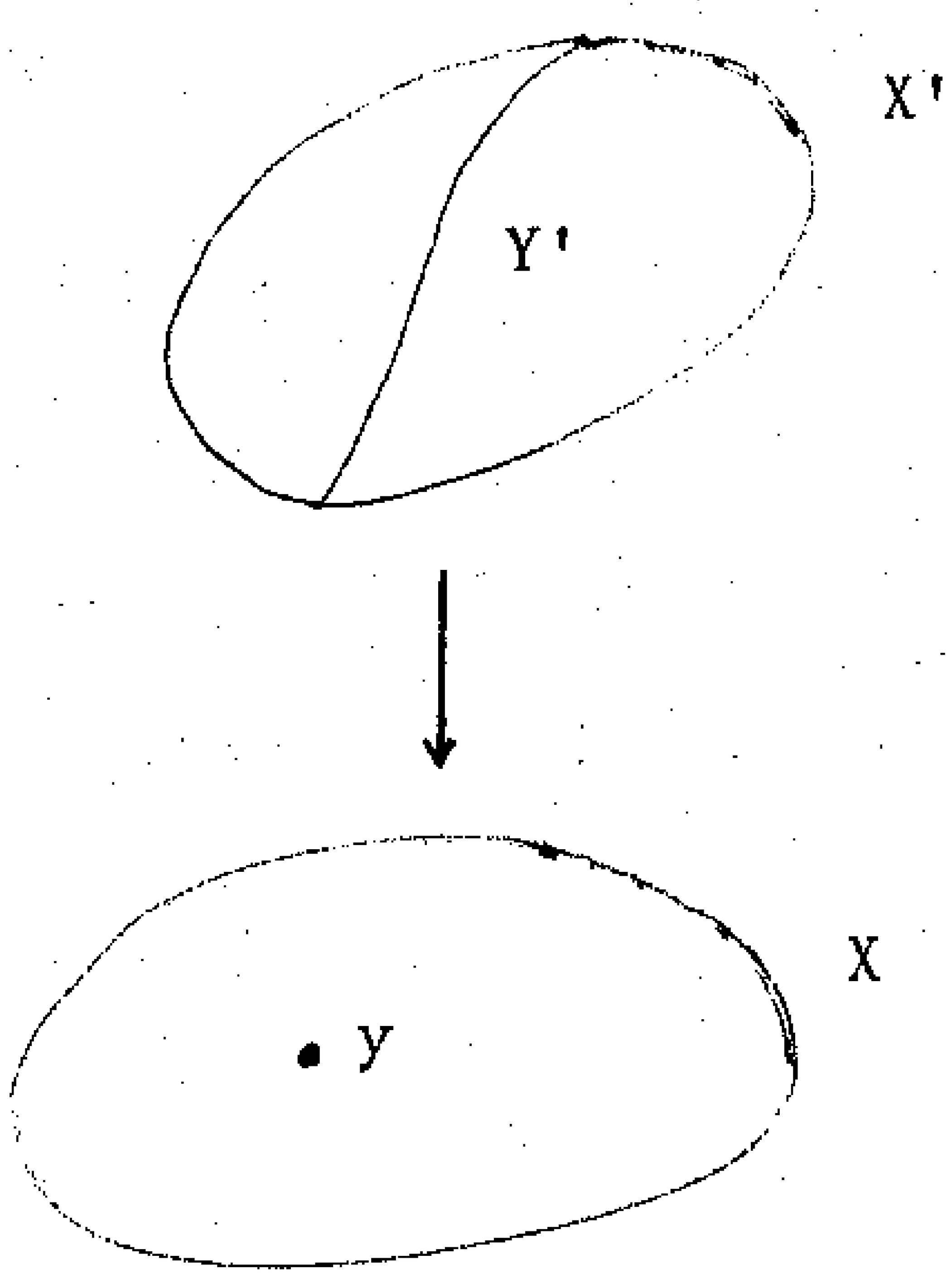
$$\mathrm{gr}_\bullet(M) = E .$$

Si t est un générateur de I/I^2 alors $C = B[t]$. Par multiplication avec t on obtient un homomorphisme homogène de degré 1 de E. Soit K le noyau de celui-ci

$$0 \to K \to E \xrightarrow{t} E \to 0 .$$

E est noetherien et $\tilde{K}_n = N_n$. Soit $e_1,\ldots,e_r$ un système de générateurs homogènes de K, $\deg(e_i) = \alpha_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Si $n > \alpha_i$ on a $N_n = 0$ car tout élément de N_n est de la forme $\sum_{i=1}^{r} b_i\, t^{n-\alpha_i} e_i$ avec $b_i \in B$ et $te_i = 0$.

NOTE 2

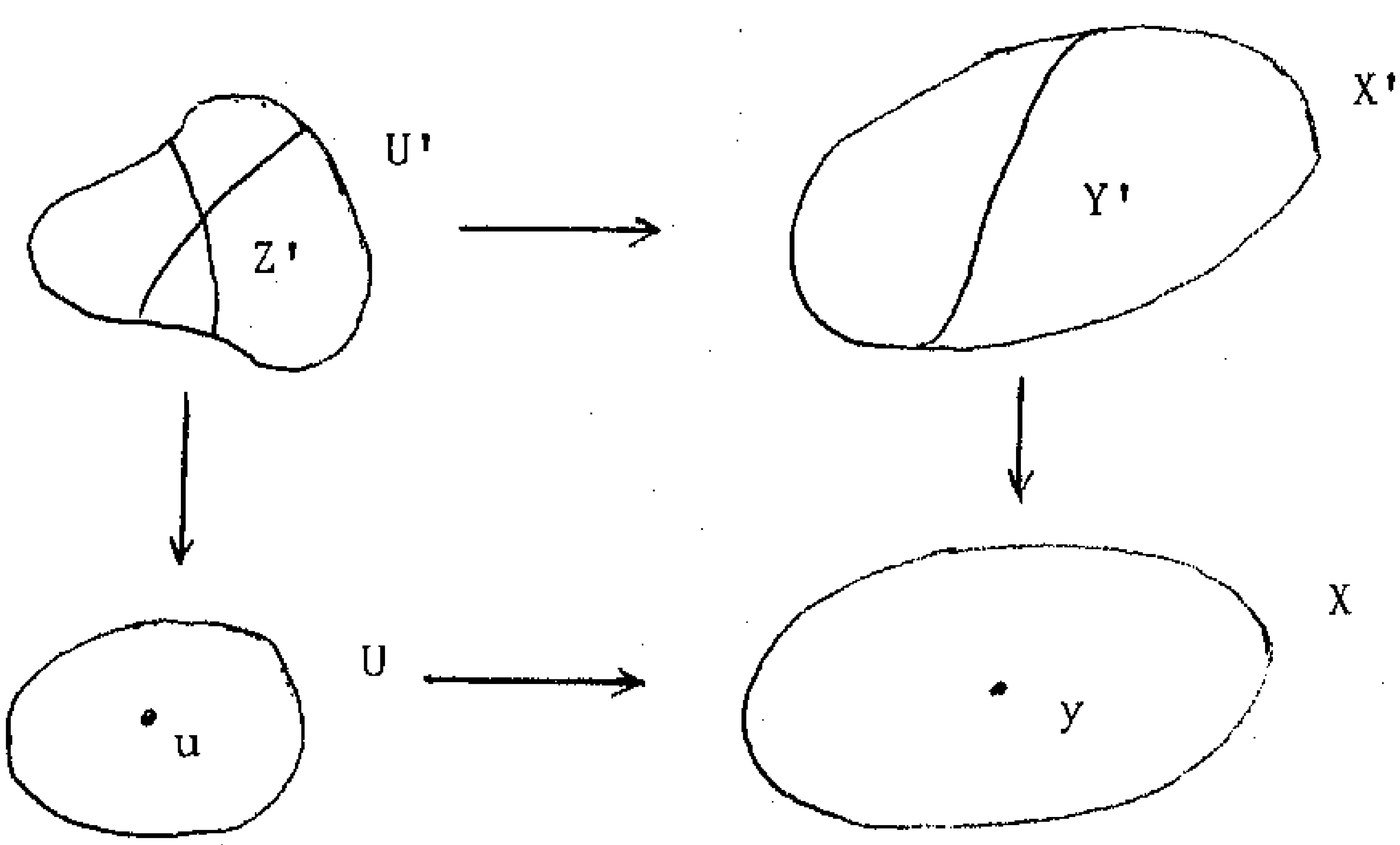


Soit

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{point} = \{y\} & \hookrightarrow & X \end{array}$$

une modification qui contracte Y' à un point. Soit (U,u) un voisinage affine de y i.e. un morphisme étale $U \to X$ qui transforme $u \in U(k)$ dans y. Alors $U' = U \times_X X'$ est un schéma et la projection $U' \to X'$ est un morphisme étale.

U' est un voisinage étale de Y' et si $Z' = Y' \times_{X'} U'$ la projection $f : U' \to U$ transforme chaque composante connexe de Z' à un point de la fibre de $U \to X$ au-dessus de x. On peut remplacer U' par un voisinage de $f^{-1}(u)$ afin que $Z' = f^{-1}(u)$. Soit a un élément de l'idéal maximal de $O_{U,u}$. Alors a correspond à une fonction rationnelle ϕ de U' dont le diviseur (ϕ) est positif et qui s'annule sur chaque composante de Z'. Il en résulte $(Z'.Z') < 0$ ce qui implique $(Y'.Y') < 0$.



NOTE 3

Lemme 1

Soit X un espace algébrique formel et I un idéal de définition. On suppose que I n'est pas nilpotent (i.e. X n'est pas un espace algébrique). Alors il existe une branche $\mathfrak{Z}$ de X i.e. un sous-espace formel fermé intègre de X de la forme $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\,\overline{A}$ avec $\overline{A}$ anneau local complet intègre de dimension 1.

Preuve. On se ramène au cas $X = \mathrm{Spf}\, B$ avec B anneau adique. B est un anneau de Zariski car I-adiquement complet. On peut supposer que I coïncide avec son radical. Par hypothèse I n'est pas nilpotent, donc il existe un idéal premier de B qui ne le contient pas. L'ensemble des idéaux $\underline{a}$ de B qui satisfont les conditions suivantes :

1) $I \not\subset \underline{a}$

2) $\underline{a}$ coïncide avec son radical.

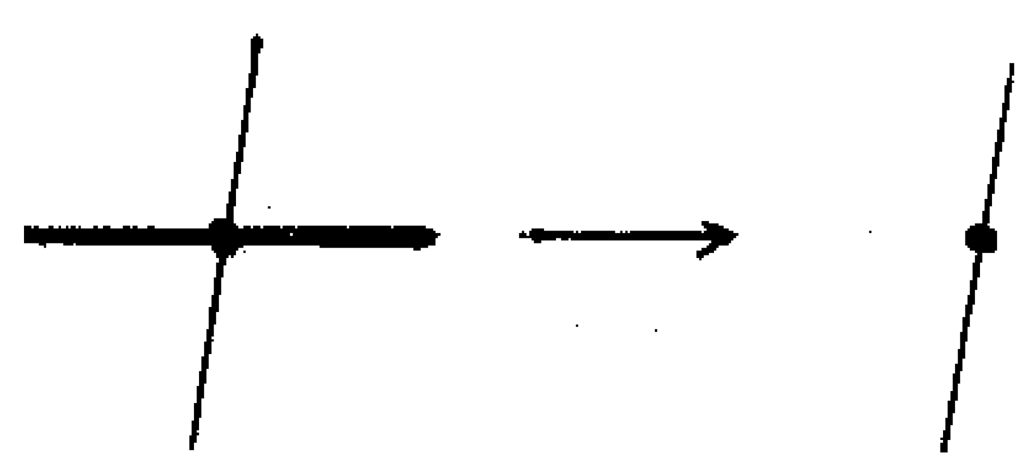
est filtrant. Soit $\underline{a}$ un élément maximal de celui-ci. Alors $\underline{a}$ est premier car $\underline{a} = \bigcap_{i=1}^{n} p_i$ avec p_i premiers et $I \not\subset \underline{a}$ implique $I \not\subset p_j$ pour un j convenable donc $\underline{a} = p_j$. Si M est un idéal maximal de B qui contient $\underline{a}$ alors $I + \underline{a} \subset M$ car $I \subset M$ (B est un anneau de Zariski). Donc si $D = B/\underline{a}$ et $J = ID = I + \underline{a}/\underline{a}$ alors $J \neq D$ i.e. D est un anneau adique. Il en résulte que D définit un sous-espace $\mathfrak{Z}$ de X. (0) est le seul idéal premier de D ne contenant pas J. Donc D possède seulement un nombre fini d'idéaux premiers minimaux :

$$m_1, \ldots, m_r .$$

Tout élément $x \in D$ qui n'est pas inversible est contenu dans un de ces idéaux. Soit $p \in \operatorname{Spec} D$. Alors $p \subseteq \bigcup_{1}^{r} m_i$, donc $p \subseteq m_j$ avec j convenable. Si $p \not\subset (0)$ il en résulte $p = m_j$ ce qui prouve que D est un anneau semi-local de dimension 1. Or D est intègre, $J \not\subset (0)$ et $J \subset \bigcap_{i=1}^{r} m_i$ ce qui montre que J est un idéal de définition de D i.e. D est complet en tant comme anneau semi-local. Il s'ensuit que D est local donc $\mathfrak{Z}$ est une branche.

Lemme 2 (cf. [AFM] II, p. 119-120)

Soit $X' \to X$ une modification formelle. On suppose que X est une branche. Alors X' est une réunion d'un schéma affine formel de dimension 1 et d'un espace algébrique. En plus $X' \to X$ est algébrisable i.e. il y a un espace algébrique X' sur $X = \operatorname{Spec} \overline{A}$, où $X = \operatorname{Spf} \overline{A}$, tel que $X' \to X$ soit le complété formel de $X' \to X$ i.e. le morphisme du complété formel de X' le long de la fibre fermée dans X défini par $X' \to X$.



Preuve. $\overline{A}$ est un anneau local intègre de dimension 1. Soit $\underline{m}$ son idéal maximal. Alors $I = \underline{m}\, O_{X'}$ est un idéal de définition de X'. Montrons que I n'est pas nilpotent. Il s'en suivra (lemme 1) qu'il y a au moins une branche de X'. Soit $\operatorname{Spf} R \to \operatorname{Spf} \overline{A}$ avec R anneau de valuation discrète et $\underline{m}R \neq 0$ (par exemple R égal à la clôture intégrale de $\overline{A}$ dans son corps des fractions : c'est normal, de dimension 1 d'après Cohen-Seidenberg, puis c'est local car fini sur $\overline{A}$, selon un théorème de Nagata LR , (32.1), donc semi-local complet et intègre). Il y a une flèche $\mathrm{Spf}\ R \to X'$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr] & & X \\ & \mathrm{Spf}\ R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ce qui implique $I^N \neq 0$ pour tout N naturel car $\underline{m}^N \overline{R} \neq 0$. Montrons maintenant qu'il y a seulement une branche de X' . Supposons qu'on en aurait deux $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2 \subseteq X'$. Alors $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \coprod \mathfrak{Z}_2 \subseteq X'$ et si $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\ \overline{C}$ Spec $\overline{C}$ a deux points au-dessus du point fermé de Spec $\overline{A}$. On en déduit que $\mathrm{Spec}(\overline{C} \otimes_{\overline{A}} \overline{C})$ en aura au moins quatre. Or $\mathfrak{Z} \times_X \mathfrak{Z} \subset X'' = X' \times_X X'$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z} \times_X \mathfrak{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X'' \arrow[d] \\ \mathfrak{Z} \arrow[r, hook] & X' \end{tikzcd}$$

D'autre part $X'' \to X'$ est un isomorphisme en dehors de V(I) ce qui implique aussi que $\mathfrak{Z} \times_X \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ est un isomorphisme en-dehors de $V(\underline{m}\ O_{\mathfrak{Z}})$, c'est-à-dire que $\overline{C} \otimes_{\overline{A}} \overline{C} \to \overline{C}$ définit un isomorphisme au-dessus du point fermé de Spec $\overline{A}$, absurde.

On en déduit qu'il y a un seul point p de X' tel que $I\ O_{X',p}$ ne soit pas nilpotent. En plus il y a une seule branche de Spf $O_{X',p}$ donc p est fermé et $\dim O_{X',p} = 1$. Dans tout autre point p' de X' $I\ O_{X',p'}$ est nilpotent, comme l'espace sous-jacent de X' est quasi compact car $X' \to X$ de type fini, il y a un N naturel tel que

$I^N \mathcal{O}_{X',p'} = 0$ pour tout $p' \neq p$. Alors $V(\mathrm{Ann}(I^N))$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{Spf}\ \overline{D}$ avec $\overline{D} = \mathcal{O}_{X',p}$ et

$$X' = (X'/I^N) \cup \mathrm{Spf}\ \overline{D} \quad .$$

Il reste seulement à vérifier que $X' \to X$ est algébrisable. Soit $U = \mathrm{Spf}\ \overline{B} \to \overline{X}'$ un recouvrement étale. On peut supposer que U a un seul point au-dessus de p, donc U a aussi une décomposition

$$U = U/J^n \cup \mathrm{Spf}\ \overline{C}$$

avec $J = I\overline{B}$ idéal de définition, n naturel et $\overline{C} = \overline{B}/\underline{b}$ local de dimension 1. On a $J^n\underline{b} = 0$ donc un homomorphisme injectif

$$\overline{B} \xrightarrow{\ \phi\ } \overline{B}/J^n \times \overline{C} \quad .$$

$\overline{C}$ est fini sur $\overline{A}$ car $\overline{D}/\overline{A}$ fini et $\overline{C}/\overline{D}$ étale, donc aussi fini ($\overline{D}$ complet). D'autre part $\overline{B}/J^n$ est de type fini sur $\overline{A}$ car X'/I^n l'est et $\mathrm{Spf}\ \overline{B}/J^n \to X'/I^n$ étale. Soit

$$\overline{C} = \sum_{i=1}^{r} \overline{A}\ \overline{y}_i$$

avec $y_i \in \overline{B}$ et $\overline{y}_i \in \overline{C}$ son image $(i = 1,\dots,r)$ et

$$\overline{B}/J^n = \overline{A}[\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_s]$$

$x_j \in \overline{B}$, $\overline{x}_j \in \overline{B}/J^n$ la classe de x_j $(j = 1,\dots,s)$. Montrons que $\overline{B}$ est de type fini sur $\overline{A}$, à savoir $\overline{B} = \overline{A}[x,y]$, $x = (x_1,\dots,x_s)$, $y = (y_1,\dots,y_r)$. En effet, pour tout $z \in \overline{B}$, $\phi(z) = (\overline{z},\overline{\overline{z}})$ avec

$\overline{z} = z \bmod J^n$, $\overline{\overline{z}} = z \bmod \underline{b}$; $\overline{z} = P(\overline{x})$ avec P polynôme à coefficients dans $\overline{A}$ en s variables. Donc $t = P(x)$ implique $(\phi(z) - \phi(t)) \in (0) \times \overline{C}$. Or $((0) \times \overline{C}) \cap \phi(\overline{B}) = (0) \times (J^n + \underline{b}/\underline{b})$ et $J^n + \underline{b}/\underline{b} = \underline{m}^n\, \overline{C} = \sum_{i=1}^{r} \underline{m}^n\, \overline{y}_i$. Donc $\phi(z) - \phi(t) = (0, \sum_{i=1}^{r} a_i\, \overline{y}_i)$ avec $a_i \in \underline{m}^n$. Il en résulte $\phi(z) - \phi(t) = \phi(\sum_{i=1}^{r} a_i y_i)$ ce qui implique $z = t + \sum_{i=1}^{r} a_i y_i$ car injectif.

De même on voit que $\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{U}$ est le spectre formel d'une $\overline{A}$-algèbre de type fini. On obtient ainsi une relation d'équivalence étale

$$R \rightrightarrows \operatorname{Spec} \overline{B}$$

qui donne l'algébrisation X' de $\mathcal{X}'$.

<u>Observation</u>

Le morphisme $X' \to X$ défini par $\overline{A} \to \overline{B}$ est une modification ([AFM], II, prop. (1.13) i)).

<u>Lemme 3</u>

Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \mathcal{Y} \arrow[d] \\ \mathcal{X}' \arrow[r, "f"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'espaces algébriques formels. Si $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est une modification formelle alors $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ en est aussi.

<u>Preuve</u>. Il est clair que $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ est propre. Soit $C(f)$ et $J(f)$ l'idéal de Fitting et l'idéal jacobien de f . Alors $C(f') = C(f)\, O_{\mathcal{Y}'}$ et $J(f') = J(f)\, O_{\mathcal{Y}'}$. Si I' est un idéal de définition $\mathcal{X}'$ alors $I' O_{\mathcal{Y}'}$ est un idéal de définition de $\mathcal{Y}'$. Donc la condition 2), 3. pour

$\mathfrak{f}$ implique la condition 2), 3. pour $\mathfrak{f}'$.

On a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}' & \longrightarrow & \mathcal{Y}' \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' = \mathcal{X}'' \end{array}$$

où les flèches orientables sont les immersions diagonales. Donc si $\delta \subset O_{\mathcal{X}''}$ est l'idéal de $\mathcal{X}'$ alors $\delta' = \delta\, O_{\mathcal{Y}''}$ est l'idéal de $\mathcal{Y}'$. Or si I'' est un idéal de définition de $\mathcal{X}''$, $J'' = I''\, O_{\mathcal{Y}''}$ est un idéal de définition de $\mathcal{Y}''$. Il s'ensuit que $I''^N \delta = 0$ implique $J''^N \delta' = 0$.

Soit $\overline{R}$ un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et ϕ : Spf $\overline{R} \to \mathcal{Y}$ un morphisme. Alors Spf $\overline{R} \to \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ se relève en Spf $\overline{R} \to \mathcal{X}'$ ce qui définit une flèche Spf $\overline{R} \to \mathcal{Y}'$ qui relève ϕ .

<u>Lemme 4</u>. Soit $\mathfrak{f} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ un morphisme propre d'espaces algébriques formels. Soit $\mathfrak{Z}' \subset \mathcal{X}'$ une branche et $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{X}$ le plus petit sous-espace de $\mathcal{X}$ tel que $\mathfrak{Z}' \to \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ se factorise par $\mathfrak{Z} \to \mathcal{X}$. Alors $\mathfrak{Z}$ est une branche.

<u>Preuve</u>. Soit g le morphisme composé $\mathfrak{Z}' \to \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$. C'est un morphisme propre donc $g_* O_{\mathfrak{Z}'}$ est un $O_{\mathcal{X}}$-module cohérent ([AS], chap. V). Il en résulte que le noyau de $O_{\mathcal{X}} \to g_* O_{\mathfrak{Z}'}$ est cohérent donc il définit un sous-espace fermé $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{X}$. L'espace topologique sous-jacent de $\mathfrak{Z}$ est réduit à un point t car l'espace sous-jacent de $\mathfrak{Z}'$ est réduit à un point t' fermé de $\mathcal{X}'$, $\mathfrak{f}$ est propre et $\mathfrak{f}(t') = t$. Il en résulte qu'on peut supposer $\mathcal{X}$ affine $\mathcal{X}$ = Spf A . Si $\mathfrak{Z}'$ = Spf B' alors $\mathfrak{Z}$ = Spf B où B est l'image de $A \to B'$. L'homomorphisme $B \to B'$ est injectif et fait de B' un B-module de type fini car $A \to B'$ est fini. Donc dim B = dim B' = 1 et B est un anneau local complet. Il est aussi intègre, parce que B' est intègre, ce qui prouve que $\mathfrak{Z}$ est une branche.

NOTE 4

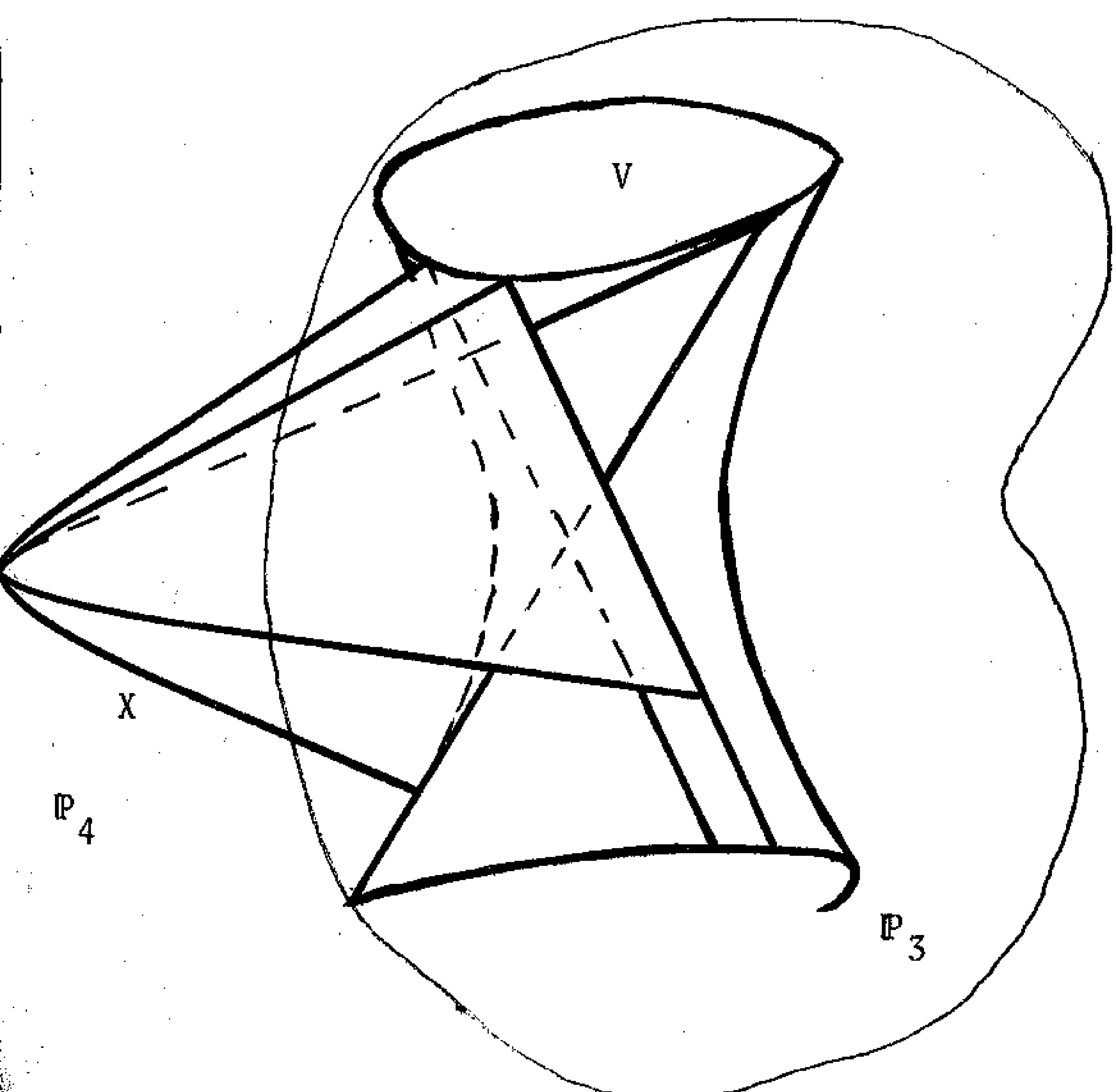
Exemple

Espace algébrique non singulier propre sur un corps k, qui n'est pas un schéma (pour un exemple similaire d'espace de Moisezon, voir Izvestia A.N. t. 30, p. 654-56).

1. Soit $V = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ la quadrique réglée $y_1y_2 - y_3y_4 = 0$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3$ sur un corps k algébriquement clos. On la projette d'un point $q \in \mathbb{P}_y \setminus \mathbb{P}_3$ pour obtenir un cône X, d'équation

$$x_1x_2 - x_3x_y = 0$$

par exemple, avec $\mathbb{P}_3$ l'hyperplan à l'infini $x_0 = 0$ et $q = (1,0,0,0,0)$. X est l'union des deux familles des plans projetant de q les génératrices de V. Donc X q est non singulière et q est un point double dont le contangent de Zariski est précisément V. Soit U la variété obtenue en faisant éclater q en X. La sous-variété de U correspondante à q est isomorphe à V donc on a le diagramme cartésien



$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook'] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ q \arrow[r, hook'] & X \end{tikzcd}$$

Il en résulte que U est non singulière car $U \setminus V = X \setminus q$ et V le sont et en plus l'idéal de V dans O_U est inversible. Soit $V \to P_1$ la projection de V sur une génératrice fixe. On peut voir que le problème de contraction

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook'] \arrow[d] & U \arrow[d, dashed] \\ P_1 \arrow[r, hook', dashed] & ? \end{tikzcd}$$

possède une solution Z variété algébrique. En effet Z n'est pas autre chose que l'éclatée de X selon l'idéal $J \subset O_X$ du plan $P_2 \subset X$ correspondant à la génératrice P_1 : l'idéal $J\,O_U$ est inversible donc $U \to X$ se factorise en $U \to Z \to X$; $U \setminus V \approx Z \setminus P_1$ car J inversible dans $X \setminus q$. Analytiquement

$U \subset P_y \times P_3$

$U = \{(x,y) \mid x \in X \;\text{ et }\; x_i y_j - x_j y_i = 0 \;,\; i,j = 1,\dots,4\}$ si P_1 est donnée par $y_1 = y_4 = 0$ donc P_2 par $x_1 = x_4 = 0$ alors

$Z \subset P_y \times P_1$

$Z = \{(x,u) \mid u_1 x_4 = u_2 x_1\}$

et $U \to Z$ est induit par la projection $\mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_1$, $(y_1,\dots,y_4) \mapsto (y_1,y_4)$. Le morphisme $Z \to X$ est intéressant par le fait que son lieu exceptionnel $\mathbb{P}_1$ est de codimension 2, ce qui est possible parce que l'anneau $O_{X,q}$ n'est pas factoriel. En effet, on a

Lemme 1

Soit $S \xrightarrow{f} T$ un morphisme birationnel et E une composante irréductible du lien exceptionnel de f (i.e. l'ensemble des points de S où f n'est pas birégulier). Soit x le point générique de E, $y = f(x)$ et O_y factoriel. Alors $\operatorname{codim}_S E = 1$ i.e. $\dim O_x = 1$.

Preuve. On a $O_y \subset O_x$, $\underline{m}_y \subset \underline{m}_x$, $O_y \neq O_x$. Soit $a \in O_x \setminus O_y$. On peut écrire $a = b/c$ avec $b,c \in O_y$ dépourvus des facteurs communs ; $c \in \underline{m}_y$ car $a \notin O_y$ donc $ac = b \in \underline{m}_x \cap O_y = \underline{m}_y$. Il en résulte que $I = bO_y + cO_y$ est un idéal propre de O_y. Tout idéal premier de I est de hauteur ≥ 2 car b,c n'ont pas de facteur commun. $IO_x = cO_x$ donc tout idéal premier P associé à IO_x est de hauteur 1. Si $P \neq \underline{m}_x$ alors f est birégulier dans le point $z \in S$ lui correspondant. $f(z) = t$ correspond à $P \cap O_y = \underline{p}$ donc $(O_x)_P = (O_y)_{\underline{p}}$ ce qui prouve que $\underline{p}$ est associé à I, donc de hauteur ≥ 2, et en même temps P et $\underline{p}$ ont même hauteur. La contradiction prouve que $P = \underline{m}_x$ donc cO_x est $\underline{m}_x$-primaire i.e. $\dim O_x = 1$.

2. Soit maintenant $X \subset A_4$ l'hypersurface

$$x_1x_2 - x_3x_4 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

et $q = (0,0,0,0)$. Le contangent de Zariski de X dans q est aussi V. Donc l'éclatement de centre q

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} V & \hookleftarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ q & \hookleftarrow & X \end{array}$$

donne aussi une variété U non singulière. On peut pourtant voir que le problème de contraction

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d] & U \arrow[d, dotted] \\ P_1 \arrow[r, dashed] & ? \end{tikzcd}$$

n'admet pas de solution variété algébrique. Cela résulte du

Lemme 2

L'algèbre affine de U, $R = k[x_1,\dots,x_4]/ f$
$f = x_1x_2 - x_3x_4 + x_3^3 + x_4^3$ est factorielle.

Preuve. R est normale car régulière en codimension 1 et de Cohen-Macauley ([AL], III-13, Prop. 9). Reste à montrer que tout idéal premier de hauteur 1 de R est principal.

$R/x_1R = k[x_1,\dots,x_4]/(f,x_1) = k[x_2,x_3,x_4]/(x_3x_4 + x_3^3 + x_4^3)$ avec $x_3x_4 + x_3^3 + x_4^3$ irréductible. Donc x_1R est premier. Il suffit maintenant que l'anneau des fractions R_S avec $S = \{x_1^n\}_{n\in N}$ soit factoriel. Or $R_S = R[x_5]/(x_5x_1-1) = k[x_1,\dots,x_5]/(f,x_5x_1-1) = k[x_1,\dots,x_5]/(x_2-x_3x_4x_5 + x_3^3x_5 + x_4^3x_5,\ x_5x_1-1) = k[x_1,x_3,x_4,x_5]/(x_5x_1-1) = k[x_1,x_3,x_4]_S$ qui est factoriel.

Supposons maintenant que ? dans (2) existe comme variété algébrique. (1), (2) et Z.M.T montre qu'il y a un morphisme birationnel $? \to X$ qui rend commutatif

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ ? \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$

L'image inverse de q dans ? égale à P_1 est de codimension 2, ce qui contredit les lemmes 1 et 2 car P_1 serait le lieu exceptionnel de $? \to X$.

? existe en tant qu'espace algébrique: on peut voir aisément que le faisceau conormal de V dans U est précisément le faisceau associé à une section hyperplane de V en P_3 et on conclut par [AFM]II Corollary (6.11).

3. Appelons Z l'espace algébrique qui réalise la contraction précédente

$$
(3) \qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
P_1 \arrow[r, hook] & Z
\end{tikzcd}
$$

On va donner une construction explicite de Z i.e. d'un recouvrement étale Z' ainsi que de la relation d'équivalence $Z' \times_Z Z' = R$.

On a $-x_3x_4+x_3^3+x_4^3 = (1+3x_3+3x_4)\left(\frac{x_4-x_2}{2} - \frac{x_4+x_3}{2}t\right)\left(\frac{x_4-x_3}{2} + \frac{x_4+x_3}{2}t\right)$ avec $t^2 = \frac{1-x_3-x_4}{1+3x_3+3x_4}$. Donc $x_1x_2-x_3x_4+x_3^3+x_4^3 = (z_1z_2-z_3z_4)(1+3x_3+3x_4)$ avec

$$
(4) \qquad
\left\{
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{x_1}{1+3x_3+3x_4}, \quad z_2 = x_2, \\
z_3 &= \frac{x_4-x_3}{2} - \frac{x_4+x_3}{2}t, \quad t^2 = \frac{1-x_3-x_4}{1+3x_3+3x_4}, \\
z_4 &= \frac{x_4-x_3}{2} + \frac{x_4+x_3}{2}t.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules définissent un recouvrement à deux feuilles de l'ouvert affine $D((1+3x_3+3x_4)(1-x_3-x_4))$ de X par l'ouvert affine $D(t(t\ 3(z_4-z_3)))$ de la variété $X' \subset A_S$ d'équations

$$
(5) \qquad
\left\{
\begin{aligned}
& z_1z_2-z_3z_4 = 0 \\
& t^3+3(z_4-z_3)t^2-t + z_4-z_3 = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

On remplace X et X' avec ces ouverts afin d'avoir un morphisme $X' \xrightarrow{f} X$. Après cette substitution $k[X'] = k[X][t]$ avec

$$t^2 - \frac{1-x_3-x_4}{1+3x_3+3x_4} = 0 .$$

Ainsi, $k[X']$ est un $k[X]$-module libre, de rang 2. $(t^2 - \frac{1-x_3-x_4}{1+3x_3+3x_4})' = 2t$. Donc si la caractéristique de k est $p \neq 2$, f est non ramifié. Etant aussi plat, c'est un recouvrement étale. On a $f^{-1}(q) = \{(1,0,0,0,0), (-1,0,0,0,0)\}$. On remplace X' par $X' \setminus \{(-1,0,0,0,0)\}$ de sorte que

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k \arrow[r, "q'"] \arrow[d, equal] & X' \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

soit cartésien avec $q' = (1,0,0,0,0)$. La flèche $U' \to X'$ du diagramme cartésien

$$(6) \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est l'éclatement de X' de centre q' et $U' \to U$ est un recouvrement étale. Soit $V' \subset U'$ l'image inverse de V. Dans

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k \arrow[r, "q'"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

le carré cartésien et celui de droite sont cartésiens donc $V' = V$. Le problème de contraction

$$(7)\qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, hookleftarrow] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ P_1 \arrow[r, hookleftarrow] & Z' \end{tikzcd}$$

possède une solution variété algébrique comme dans $n-1$:

$U' = \{(x',y) \in X' \times P_3 \mid y_i x_j' - y_j z_i' = 0\ ,\ i,j = 1,\dots,4,\ x' = (z_1',z_2',z_3',z_4',t)\}$

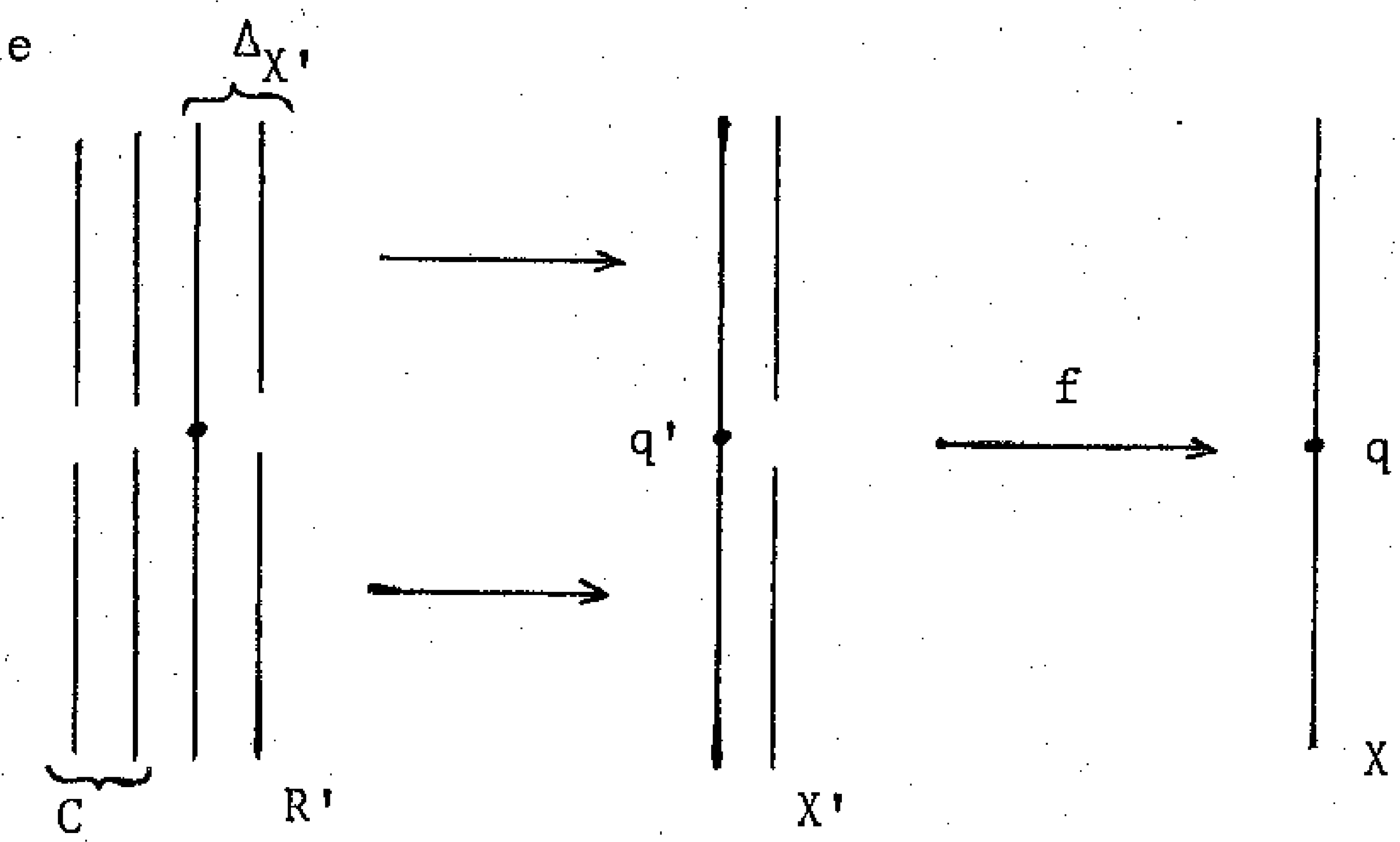
(car $z_1,\dots,z_4$ engendrent l'idéal maximal de $O_{X',q'}$) et on peut prendre

$z' = \{(x',u) \in X' \times P_1 \mid u_1 z_4' - u_2 z_1' = 0,\ x' = (z_1',\dots,z_4',t)\}$.

Il s'agit maintenant de descendre cette solution à une solution Z de (3). On a un diagramme exact

$$X' \times_X X' = R' \rightrightarrows X' \xrightarrow{f} X$$

car $X' \xrightarrow{f} X$ recouvrement étale. R' est une relation d'équivalence étale



On peut voir que $R' = \Delta_{X'} \coprod C$ avec $(q' \times X') \cap C = \phi$. En effet R' est un ouvert de $\mathrm{Spec}(A[t] \times_A A[t])$ où $A = k[X]$ et $t^2 = a\left(= \frac{1-x_3-x_4}{1+3x_3+3x_4}\right)$ qui est inversible dans A . On a $A[t] \times_A A[t] = A[t_1,t_2]/(t_1^2-a,t_2^2-a)$ et $(t_1^2-a,t_2^2-a) = (t_1-t_2,t_1^2-a) \cap (t_1+t_2,t_1^2-a)$ car

1) $(t_1-t_2,t_1^2-a) + (t_1+t_2,t_1^2-a) = A$: il contient $2t_1$ donc t_1 parce que 2 est inversible dans A ; donc $a = t_1^2-(t_1-a)$ en appar-

tient aussi. Or a est inversible. Il en résulte

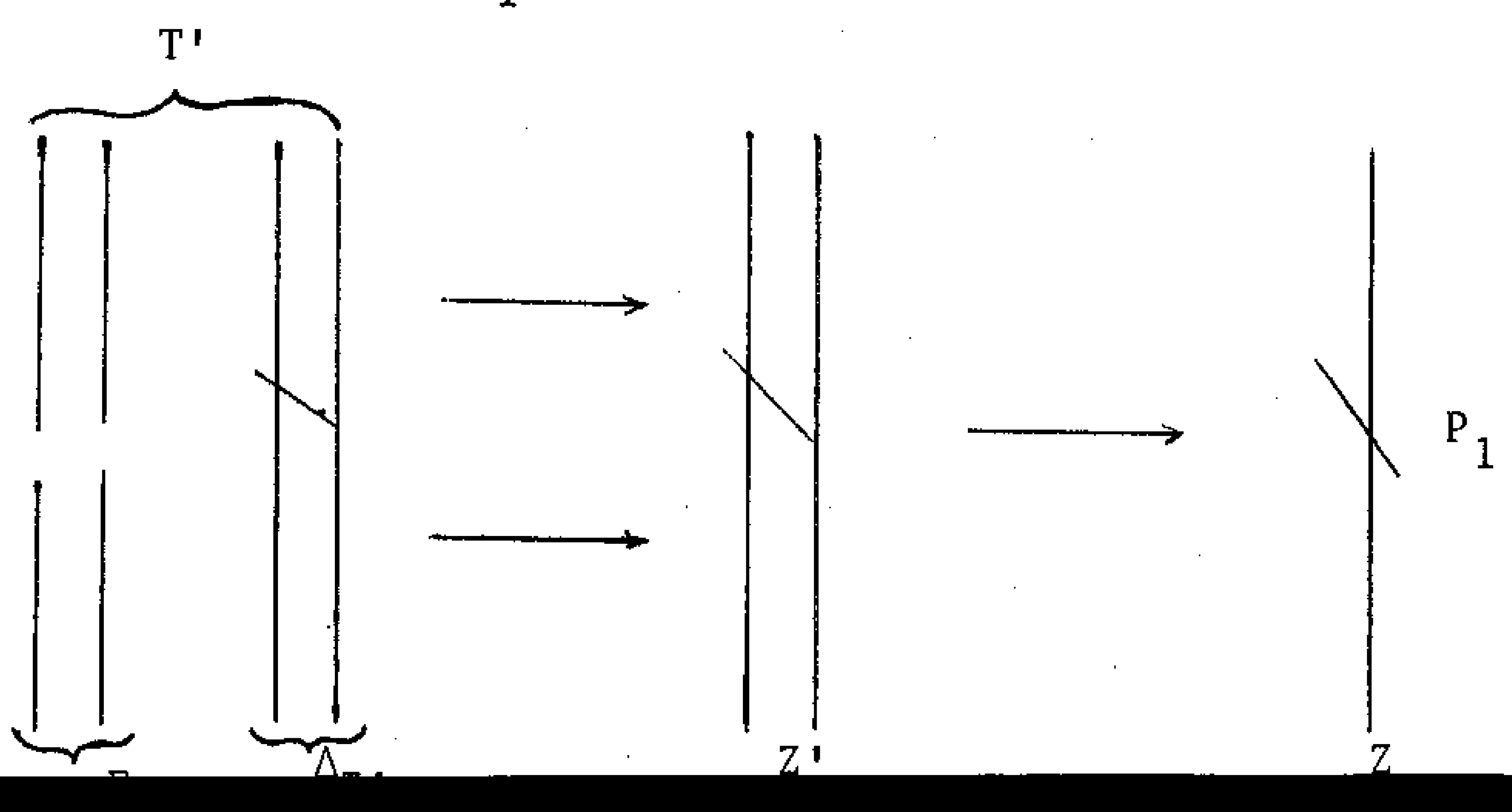
$$(t_1-t_2,t_1^2-a)\cap(t_1+t_2,t_1^2-a) = (t_1-t_2,t_1^2-a)(t_1+t_2,t_1^2-a)$$

2) $(t_1-t_2,t_1^2-a)(t_1+t_2,t_1^2-a)\subseteq(t_1^2-t_2^2,t_1^2-a)\subseteq(t_1^2-a,t_2^2-a)$

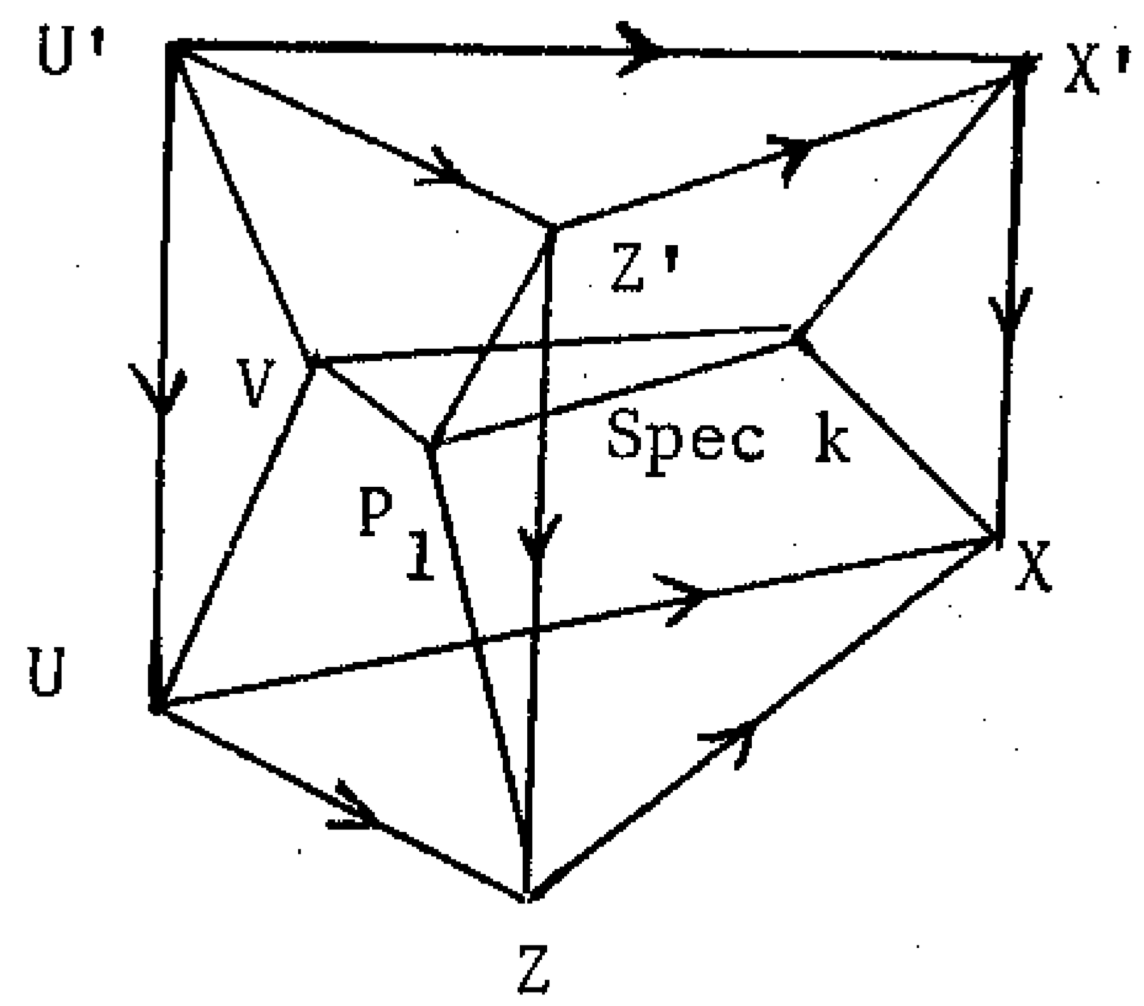
3) $(t_1^2-a,t_2^2-a)\subseteq(t_1-t_2,t_1^2-a)\cap(t_1+t_2,t_2^2-a)$. Donc $A[t]\ x_A\ A[t] = (A[t_1]/(t_1^2-a))\ x\ (A[t_1]/(t_1^2-a))$ où le premier facteur correspond à $\Delta_{X'}$ et le second à C . Comme (6) est cartésien $U'\ x_U\ U' = S' = R'\ x_{X'}\ U'$ donc $S' = \Delta_{U'} \coprod D$, avec $D \cap (V\ x\ U') = \phi$. On peut définir une relation d'équivalence $T' \subseteq Z'\ x\ Z'$ par $T' = \Delta_{Z'} \coprod E$ avec $E \subseteq (Z'\ z\ Z')\backslash(P_1\ x\ Z' \cup Z'\ z\ P_1)$ correspondant à $C \subset (X'\ x\ X')\backslash(q'\ x\ X' \cup X'\ x\ q')$ dans l'isomorphisme induit sur ces ouverts par $Z'\ x\ Z' \to X'\ x\ X'$. Il en résulte aussi que E est isomorphe à D par $U'\ x\ U' \to Z'\ x\ Z'$. Donc T' est une relation d'équivalence étale dont le quotient Z est un espace algébrique sur $X = X'/R'$. En plus $U \to X$ se factorise en $U \to Z \to X$ car $U = U'/S'$ et

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & T' \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
U' \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd}$$

est commutatif. T'/P_1 est réduite à l'identité donc $Z' \to Z$ définit une immersion fermée $P_1 \subset Z$



Enfin le diagramme



montre que

$$(8) \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d] & U \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ P_1 & Z \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

est commutatif et $U \setminus V \approx Z \setminus P_1$. En plus Z est non singulier car Z' l'est et $Z' \to Z$ étale surjectif.

CHAPITRE VII

LE THEOREME DE FINITUDE EN COHOMOLOGIE ETALE

SOMMAIRE

0. INTRODUCTION

On expose ici le théorème de finitude en cohomologie étale [cf. SGA 4, XIV, 1.1]. Pour simplifier on s'est limité à l'énoncé suivant :

Théorème :

Soit S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k. Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et F un faisceau abélien constructible sur X. Alors pour tout $q \geq 0$, le faisceau $R^q f_* F$ est constructible sur S.

L'introduction de la notion de faisceau constructible est simplifiée par le langage des espaces algébriques. Par définition, on dit qu'un faisceau F sur le grand site étale de S est localement constructible s'il est représentable par un espace algébrique localement séparé, localement de présentation finie et étale sur S. On dit qu'il est constructible, si de plus il est de type fini sur S (cette définition est équivalente à celle donnée dans SGA 4). On donne dans le paragraphe 2 des critères simples permettant d'affirmer qu'un faisceau localement constructible est constructible.

La démonstration du théorème se fait comme dans SGA 4 par réduction au cas de dimension relative ≤ 1. Cependant l'usage du théorème d'approximation permet de simplifier substantiellement la démonstration de la constructibilité locale des faisceaux $R^q f_* F$ (qui est essentiellement équivalente au théorème de changement de base [cf. SGA 4, XII, 5.1]).

De plus, la démonstration de la constructibilité du faisceau $R^1 f_* F$ donnée dans SGA 4 utilisait le fait que le groupe fondamental étale d'une courbe propre lisse et connexe de genre g sur un corps algébriquement clos k admet un système de $2g$ générateurs topologiques, ce qui se démontre par réduction au cas où la caractéristique de k est nulle et par voie transcendante dans ce cas [cf. SGA 1, X]. Ici, puisque nous nous limitons au cas des faisceaux de groupes abéliens, nous avons préféré utiliser la théorie de Kummer et le fait que le groupe des points rationnels d'ordre divisant ℓ, ℓ premier à la caractéristique de k, de la jacobienne est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$, ce qui se démontre par voie purement algébrique [cf. AV, p. 64]. Nous traitons le cas où $\ell = \mathrm{car}(k)$ à l'aide de la théorie d'Artin-Schreier.

On a évité autant que possible les références à SGA 4, si ce n'est pour des notions élémentaires de cohomologie étale, pour lesquelles on pourra consulter aussi "Grothendieck Topologies". En particulier, on a rappelé les théories de Kummer et d'Artin-Schreier. La seule référence sérieuse concerne la cohomologie du groupe multiplicatif sur une courbe (9.3).

Les cinq premiers paragraphes sont consacrés à la définition et aux propriétés des faisceaux constructibles qui servent par la suite. On trouve au paragraphe 6 quelques rappels sur les images directes supérieures, l'énoncé du théorème de finitude et un plan de la démonstration (6.8) qui est développée dans les paragraphes 7 à 13.

I. DEFINITION DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

(1.1) Soit X un espace algébrique (ou un schéma) que l'on supposera localement noethérien. On peut définir deux sites étales au-dessus de X :

- le <u>grand site</u>, noté X_{grd}, dont la catégorie sous-jacente (Esp. alg./X) est celle de tous les espaces algébriques sur X, munie de la topologie étale, i.e. de la topologie engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les familles surjectives de morphismes étales ;
- le <u>petit site</u>, noté X_{pet}, dont la catégorie sous-jacente (Et/X) est celle des espaces algébriques étales sur X, munie de la topologie induite par la topologie du grand site. Sachant que tout morphisme dans (Et/X) est étale [cf. SGA 1, I.4.8], on voit qu'une famille de morphismes est couvrante si et seulement si elle est surjective.

Le foncteur naturel d'inclusion :

$$(\mathrm{Et}/X) \to (\mathrm{Esp.\ alg.}/X)$$

commute aux limites projectives finies et transforme les familles couvrantes de X_{pet} en familles couvrantes de X_{grd}. Il définit donc un morphisme de sites [cf. SGA 4, III.2.7] :

$$u : X_{grd} \to X_{pet} \,.^{(*)}$$

Pour tout faisceau F sur le grand site, il est clair que la restriction u_*F de F en tant que préfaisceau au petit site, définie par :

$$u_*F(U) = F(U) \text{ , pour tout } U \in \mathrm{Et}/X \text{ ,}$$

(*) Pour respecter l'intuition géométrique, on convient ici de noter un morphisme de sites par une flèche en sens inverse de la flèche entre les catégories sous-jacentes.

est un faisceau. On obtient ainsi le foncteur image directe

$$u_* : X^{\sim}_{grd} \to X^{\sim}_{pet}$$

sur les catégories de faisceaux.

(1.2) A tout faisceau F sur le petit site, on va associer un espace algébrique $\mathcal{F}$ localement séparé et étale au-dessus de X, que l'on appellera espace étalé de F, par analogie avec le cas classique [cf. G, II.1.2] :

Lemme :

Soient U et V des schémas affines étales sur X. Soient $\xi \in F(U)$ et $\eta \in F(V)$. Alors le morphisme $U \times_F V \to U \times_X V$ induit par ξ et η est une immersion ouverte.

Démonstration :

Soient $\xi', \eta' : U \times_X V \rightrightarrows F$ les morphismes induits par ξ et η. Soient $W \in Et/X$ et $\phi : W \to U \times_X V$ un morphisme tel que $\xi' \circ \phi = \eta' \circ \phi$ i.e. tel que ϕ factorise à travers $U \times_F V$. Puisque W et $U \times_X V$ sont étales sur X, le morphisme ϕ est étale, son image W' est donc un ouvert de $U \times_X V$. Puisque F est un faisceau pour la topologie étale, on a $\xi'|_{W'} = \eta'|_{W'}$. Ainsi $U \times_F V$ est la réunion de tous les ouverts W' de cette forme, c'est un ouvert de $U \times_X V$.

Posons

$$(U \to F) = \coprod_{U, \xi \in F(U)} (U \xrightarrow{\xi} F) ,$$

la sommation étant effectuée sur les schémas affines U étales au-dessus de X et les $\xi \in F(U)$. D'après le lemme, le morphisme canonique

$\mathcal{U} \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times_X \mathcal{U}$ est une immersion ouverte ; il définit donc une relation d'équivalence étale sur $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{F}$ le quotient de $\mathcal{U}$ par cette relation d'équivalence. C'est un espace algébrique étale au-dessus de X ; cependant en général il n'est pas séparé, mais seulement localement séparé, autrement dit $\mathcal{U} \times_F \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times_X \mathcal{U}$ n'est pas une immersion fermée.

(1.3)

Définition

On dit que l'espace algébrique $\mathcal{F}$ est l'espace étalé associé au faisceau sur le petit site étale F .

(1.4)

Proposition

Pour tout $V \in Et/X$, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel en V :

$$F(V) = \mathrm{Hom}_X(V,\mathcal{F}) \ .$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ représente F sur le petit site étale.

Démonstration

Il suffit de montrer l'égalité ci-dessus dans le cas où V est affine. Alors tout $\xi \in F(V)$ détermine un morphisme $\phi_\xi^! : V \to \mathcal{U}$ qui envoie V identiquement sur le sommande de $\mathcal{U}$ indexé par ξ . En composant $\phi_\xi^!$ avec la projection canonique $\mathcal{U} \to \mathcal{F}$, on obtient un morphisme $\phi_\xi : V \to \mathcal{F}$. On a ainsi défini une application :

$$F(V) \to \mathrm{Hom}_X(V,\mathcal{F}) \ .$$

Réciproquement, un morphisme $\phi : V \to \mathcal{F}$ est déterminé par la donnée d'un morphisme étale $V' \to V$ et d'un morphisme $\phi' : V' \to \mathcal{U}$ tel qu'il existe $\phi'' : V' \times_V V' \to \mathcal{U} \times_F \mathcal{U}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V' \times_V V' \arrow[r, shift left, "v'_1"] \arrow[r, shift right, "v'_2"'] \arrow[d, "\phi''"] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & V \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
\mathcal{U} \times_F \mathcal{U} \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & \mathcal{U} \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

où v'_1 , v'_2 , u_1 , u_2 sont les projections canoniques. Soit $\psi' \in F(V')$ le composé de ϕ' avec la flèche canonique $\theta : \mathcal{U} \to F$. Soient ψ''_1 et ψ''_2 les images de ψ' dans $F(V' \times_V V')$. On a :

$$\psi''_i = \theta \circ \phi' \circ v'_i = \theta \circ u_i \circ \phi'' \text{ , pour } i = 1,2 \text{ .}$$

Mais $\theta \circ u_1 = \theta \circ u_2$, donc $\psi''_1 = \psi''_2$. Par ailleurs, puisque F est un faisceau sur le petit site étale, la suite

$$F(V) \to F(V') \rightrightarrows F(V' \times_V V')$$

est exacte. Par conséquent ψ' provient de $\psi \in F(V)$.

On vérifie facilement que ψ ne dépend que de la donnée du morphisme $\phi : V \to \mathcal{F}$ et que l'application

$$\mathrm{Hom}_X(V,\mathcal{F}) \to F(V)$$

ainsi définie est réciproque de l'application en sens inverse définie plus haut.

(1.5) La proposition précédente permet d'étendre le faisceau F donné sur le petit site étale en un faisceau u^*F sur le grand site, en posant pour tout $V \in$ Esp.alg./X :

$$u^*F(V) = \mathrm{Hom}_X(V,F) .$$

On obtient ainsi un foncteur :

$$u^* : X^{\sim}_{pet} \to X^{\sim}_{grd} .$$

Les propriétés de u_* et u^* sont résumées dans la proposition suivante :

(1.6)

Proposition

i) Pour tout faisceau F sur le petit site, il y a un isomorphisme canonique et fonctoriel en F : $F \to u_* u^* F$; en particulier, le foncteur u^* est pleinement fidèle.

ii) Le foncteur u^* est un adjoint à gauche du foncteur u_* .

iii) Soient F (resp. G) un faisceau abélien sur le petit (resp. le grand) site. Alors, pour tout $q \geq 0$, il y a des isomorphismes canoniques :

$$H^q(X_{pet}, u_*G) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{grd}, G) ,$$

$$H^q(X_{pet}, F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{grd}, u^*F) .$$

Démonstration

i) Le foncteur u_* est simplement le foncteur restriction au petit site, donc $u_*u^*F(V) = u^*F(V)$, pour tout $V \in$ Et/X . Or, par définition $u^*F(V) = \mathrm{Hom}_X(V,F)$ et $\mathrm{Hom}_X(V,F) = F(V)$, d'après la proposition (1.4).

ii) Puisque u est continu, le foncteur image directe u_* possède un adjoint à gauche u^s [cf. SGA 4, III.2.3] tel que, pour tous faisceaux F sur le petit site et G sur le grand site, on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{grd}(u^sF,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{pet}(F,\ u_*G) \ .$$

En particulier, si $G = u^*F$, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{grd}(u^sF,\ u^*F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{pet}(F,\ u_*u^*F) \ .$$

En prenant l'image réciproque de l'isomorphisme $F \xrightarrow{\sim} u_*u^*F$, on obtient un isomorphisme canonique et fonctoriel en F : $u^sF \xrightarrow{\sim} u^*F$. Autrement dit, les foncteurs u^* et u^s sont isomorphes, et par suite u^* est un adjoint à gauche de u_* .

iii) Puisque u est un morphisme de sites, le foncteur u^s , donc aussi u^* , est exact [cf. SGA 4, III.2.6]. En utilisant l'isomorphisme d'adjonction, on en déduit immédiatement que l'image par u_* d'un faisceau injectif sur le grand site est un faisceau injectif sur le petit site [cf. G.T., II.2.3]. Par conséquent $H^q(X_{pet},\ u_*G) = 0$, pour $q > 0$ et pour tout faisceau injectif G sur le grand site.

Ainsi $H^q(X_{pet},\ u_*G)$ et $H^q(X_{grd},\ G)$, considérés comme foncteurs en $G \in \tilde{X}_{grd}$, sont des foncteurs cohomologiques qui coïncident pour $q = 0$ et s'annulent sur les injectifs. D'après la caractérisation axiomatique des foncteurs dérivés, ils sont canoniquement isomorphes.

Si dans cet isomorphisme on pose $G = u^*F$ pour un faisceau F sur le petit site, on obtient un isomorphisme :

$$H^q(X_{pet}, u_*u^*F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{grd}, u^*F) .$$

Etant donné l'isomorphisme $F \xrightarrow{\sim} u_*u^*F$, ceci achève la démonstration de la proposition (1.6).

(1.7)

Notation

La proposition précédente montre qu'en ce qui concerne le calcul des groupes de cohomologie d'un faisceau, il est indifférent d'utiliser le petit ou le grand site étale. Pour simplifier, on notera dans la suite $H^q(X,F)$ ces groupes.

On a évidemment, d'après ce qui précède :

(1.8)

Proposition

Soit F un faisceau sur le grand site étale de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L'homomorphisme canonique $u^*u_*F \to F$ est un isomorphisme.

ii) F est représentable par un espace algébrique localement séparé et étale sur X .

(1.9)

Définition

Un faisceau F qui vérifie les conditions i) et ii) est dit localement constructible. On dit qu'il est constructible si, de plus, l'espace algébrique qui le représente est de type fini sur X .

Ainsi les faisceaux constructibles forment une sous-catégorie pleine aussi bien de la catégorie des faisceaux sur le petit site étale que de celle des faisceaux sur le grand site.

II. PROPRIETES ELEMENTAIRES DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Dans tout ce qui suit, les faisceaux considérés sont des faisceaux sur les grands sites étales.

(2.1)

Proposition

Soient $f : Y \to X$ un morphisme d'espaces algébriques et F un faisceau constructible sur X, alors f^*F est un faisceau constructible sur Y.

Démonstration

Le faisceau f^*F est représenté par $F \times_X Y$ qui est un espace algébrique étale et de type fini sur Y.

(2.2)

Proposition

Soient X un espace algébrique localement noethérien et F un faisceau constructible sur X. Alors il existe une famille surjective de sous-espaces algébriques X_i de X tels que la restriction de F à X_i soit finie au-dessus de X_i, pour tout i.

Démonstration

L'assertion étant locale, on peut supposer X noethérien. On procède alors par récurrence noethérienne. On dira qu'une partie localement fermée W de X vérifie la propriété $\mathbb{P}$ s'il existe une famille finie de sous-espaces algébriques W_i de X qui recouvrent W et tels que la restriction de F à W_i soit finie, pour tout i.

Supposons que X ne vérifie pas $\mathbb{P}$. Alors la famille des parties fermées de X qui ne vérifient pas $\mathbb{P}$ est non vide ; elle possède donc un élément minimal, soit Z .

Si Z n'est pas irréductible, chacune de ses composantes irréductibles, en nombre fini, vérifie $\mathbb{P}$. Par suite Z vérifie $\mathbb{P}$. Contradiction.

Si Z est irréductible, on notera encore Z le sous-espace algébrique intègre de X d'espace topologique sous-jacent Z . Par hypothèse F est étale (en particulier quasi fini) et de présentation finie au-dessus de Z , il existe donc un voisinage ouvert U du point générique de Z au-dessus duquel F est fini. De plus $Z-U$ est un fermé de X strictement contenu dans Z , il vérifie donc $\mathbb{P}$. Par suite Z vérifie $\mathbb{P}$. Contradiction.

(2.3)

Proposition

Dans l'énoncé précédent, on peut supposer que chacun des X_i possède un revêtement étale $\pi_i : U_i \to X_i$ tel que π_i^*F soit constant fini.

Démonstration

Par un raisonnement analogue au précédent, on peut supposer que X est intègre et il suffit de démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U du point générique η de X et un revêtement étale $\pi : V \to U$ tel que π^*F soit constant fini.

Soit $\overline{K}$ une clôture séparable du corps résiduel de X en η . Puisque F est étale et de type fini, $F \otimes \overline{K}$ est un produit fini de copies de $\overline{K}$, i.e. est constant fini. Puisque F est de présentation finie, il en est déjà ainsi au-dessus d'un voisinage étale $W \to X$ de η . De plus il existe un voisinage ouvert U de η au-dessus duquel W est fini, c'est-à-dire est un revêtement étale de U .

(2.4)

Proposition

Soient X un espace algébrique localement noethérien et F un faisceau localement constructible sur X . Supposons qu'il existe une famille surjective de morphismes de type fini $X_i^! \to X$ tels que l'image réciproque $F_i^!$ de F sur $X_i^!$ soit constructible pour tout i . Alors F est constructible.

Démonstration

L'assertion étant locale, on peut supposer X noethérien et la famille $\{X_i^! \to X\}$ finie. Il suffit de montrer que de tout recouvrement étale $\{U_j \to F\}_{j\in J}$ de F par des schémas affines, on peut extraire un recouvrement fini. Pour tout i , les $U_{ij}^! = U_j \times_F F_i^!$ constituent un recouvrement étale de $F_i^!$; on peut donc en extraire un recouvrement fini $\{U_{ij}^!\}_{j\in J_i}$. Alors la famille $\{U_j\}_{j\in \bigcup_i J_i}$ est un recouvrement fini de F.

Des propositions (2.3) et (2.4), il résulte :

(2.5)

Corollaire

Soient X un espace algébrique localement noethérien et F un faisceau localement constructible sur X. Pour que F soit constructible, il faut et il suffit qu'il existe une famille surjective de morphismes de type fini $X_i^! \to X$ tels que le faisceau $F_i^!$, image réciproque de F sur $X_i^!$ soit constant fini pour tout i.

(2.6)

Proposition

Un sous-faisceau localement constructible d'un faisceau constructible est constructible.

Démonstration

Soit $\phi : F' \to F$ un monomorphisme de faisceaux au-dessus de X. Supposons F constructible et F' localement constructible. Puisque F' et F sont étales sur X, le morphisme ϕ est étale. Ainsi ϕ est un monomorphisme étale, c'est-à-dire une immersion ouverte. Mais F est de type fini sur X, donc aussi F'.

(2.7)

Définition

Soit X un espace topologique noethérien. Soit h une application de X dans $\mathbb{Z}$. On dit que h est constructible, si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $h^{-1}(t)$ est réunion finie de parties localement fermées de X.

Il revient au même de dire que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert non vide de l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de x sur lequel h est constante.

(2.8)

Proposition

Soient X *un espace algébrique noethérien et* F *un faisceau localement constructible sur* X . *Pour que* F *soit constructible, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées* :

i) *Pour tout* $x \in X$, *la fibre* $F\ x_X\ x$ *de* F *(considéré comme espace algébrique) au-dessus de* x *est finie*.

ii) *Soit* $\overline{x}$ *le spectre d'une clôture algébrique du corps résiduel de* X *en* x . *Alors la fonction* $x \to \#(F\ x_X\ \overline{x})$ = *nombre de points de la fibre géométrique de* F *en* x , *est constructible*.

Démonstration

Il est clair que les conditions i) et ii) sont nécessaires, d'après (2.3) par exemple. Montrons qu'elles sont suffisantes. Par récurrence noethérienne, on peut supposer X irréductible et il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert du point générique η de X au-dessus duquel F est constructible.

D'après i), le nombre de points de la fibre générique de F est fini ; soient $y_1,\ldots,y_r$ ces points. Pour tout $i = 1,\ldots,r$, soient U_i un voisinage étale affine de y_i et V_i l'image de U_i dans F . Alors $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$ est un ouvert de F qui contient les points $y_1,\ldots,y_r$ et qui est de type fini sur X . En particulier V est un faisceau constructible au-dessus de X ; par suite la fonction $x \to \#(V\ x_X\ \overline{x})$ est constructible, donc constante au-dessus d'un voisinage ouvert W de η dans X .

D'après ii), il existe un voisinage ouvert W' de η dans X au-dessus duquel la fonction $x \to \#(F \times_X \bar{x})$ est constante. Alors, au-dessus de $W \cap W'$ ces deux fonctions sont constantes et égales puisqu'elles coïncident en η. Autrement dit, dans chaque fibre géométrique au-dessus d'un point de $W \cap W'$, V et F ont même nombre de points. Mais V est un ouvert de F, donc V et F coïncident au-dessus de $W \cap W'$ et la restriction de F à $W \cap W'$ est constructible.

(2.10)

Remarque

Il se peut qu'un faisceau soit localement constructible et à fibres finies sans être constructible. Pour tout nombre premier p, soit G_p le schéma en groupes au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ obtenu en recollant p copies de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ suivant l'ouvert $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})-\{p\}$. Pour p et q premiers distincts, on recolle G_p et G_q suivant la section unité. Soit G le schéma en groupes obtenu en recollant les G_p pour tous les p premiers. G est localement constructible, la fibre générique a un seul point et la fibre en p a p points. Cependant la fonction rang des fibres géométriques n'est pas constructible et G n'est pas constructible.

III. LES FAISCEAUX ABELIENS CONSTRUCTIBLES

Dans tout ce qui suit, on supposera, sauf mention expresse du contraire, que les faisceaux considérés sont des faisceaux de groupes abéliens sur le grand site étale. On dit qu'un tel faisceau est constructible (resp. localement constructible) si le faisceau d'ensembles sous-jacent est constructible (resp. localement constructible).

(3.1)

Proposition

Soit $\phi : F \to F'$ un homomorphisme de faisceaux localement constructibles. Alors :

i) Si F est constructible, $\mathrm{Ker}\,\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$ sont constructibles.

ii) Si F' est constructible, $\mathrm{Coker}\,\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$ sont constructibles.

Démonstration

i) Soit $X \xrightarrow{0} F'$ la section nulle du faisceau F'. On a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\phi \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "0"] \\
F \arrow[r, "\phi"] & F'
\end{tikzcd}$$

Par conséquent $\mathrm{Ker}\,\phi$ est représentable par un espace algébrique. De plus F et F' étant étales au-dessus de X, le morphisme $\phi : F \to F'$ est étale. Par changement de base, le morphisme $\mathrm{Ker}\,\phi \to X$ est étale. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\phi$ est un sous-faisceau localement constructible du faisceau constructible F, il est constructible (2.6).

ii) Par définition, Coker ϕ est le quotient (en tant que faisceau étale sur X) de F' par la relation d'équivalence sur F' induite par F , relation qui est l'image du morphisme :

$$\psi : F \times_X F' \xrightarrow{(\phi, id_{F'})} F' \times_X F' .$$

Les espaces $F \times_X F'$ et $F' \times_X F'$ sont étales au-dessus de X , donc le morphisme ψ est étale. Ainsi l'image de ψ est ouverte dans $F' \times_X F'$; c'est une relation d'équivalence étale sur F' . Le quotient Coker ϕ est donc représentable par un espace algébrique. Il est étale et de type fini sur X , puisque F' l'est. C'est donc un faisceau constructible.

Les assertions sur l'image de ϕ résultent des isomorphismes canoniques :

$$\operatorname{Im} \phi \simeq \operatorname{Coker} (\operatorname{Ker} \phi \to F)$$

$$\operatorname{Im} \phi \simeq \operatorname{Ker} (F' \to \operatorname{Coker} \phi) .$$

Il est clair qu'un produit fini de faisceaux constructibles est constructible. On déduit donc de (3.1) :

(3.2)

Corollaire

La catégorie des faisceaux abéliens constructibles sur X est une catégorie abélienne.

(3.3)

Définition

Soient G un faisceau de groupes sur X et F un faisceau d'ensembles sur lequel G opère. On dit que F est un torseur (pour la topologie étale) sous G, s'il existe un changement de base $X' \to X$ étale et surjectif tel que $F' = F \times_X X'$ soit trivial sous $G' = G \times_X X'$ i.e. isomorphe à G' sur lequel G' opère par translations.

(3.4)

Proposition

Soient G un faisceau de groupes sur X et F un torseur sous G. Si G est constructible, F est constructible.

Démonstration

Par définition, il existe un changement de base étale et surjectif $X' \to X$ tel que $F' = F \times_X X'$ soit isomorphe en tant que faisceau d'ensembles à $G' = G \times_X X'$. Ainsi F' est constructible. Puisque $X' \to X$ est étale et surjectif, il en résulte que F est constructible.

(3.5)

Corollaire

Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une petite suite exacte de faisceaux. Alors, si F' et F'' sont constructibles, F est constructible.

Démonstration

Le faisceau F, considéré comme faisceau d'ensembles sur lequel $F' \times_X F''$ opère, est un torseur sous $F' \times_X F''$ au-dessus de F''.

Puisque F' est constructible sur X, $F' \times_X F''$ est constructible sur F'', par suite F est constructible sur F'' (3.4). Puisque F'' est constructible sur X, il en est de même de F.

Il résulte immédiatement de (3.1) et (3.5) :

(3.6)

Corollaire

Soit $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to F_5$ une suite exacte de faisceaux. Supposons que F_1 et F_5 sont localement constructibles et que F_2 et F_4 sont constructibles. Alors F_3 est constructible.

IV. EFFACABILITE DE LA COHOMOLOGIE

Nous adopterons une définition de l'effaçabilité d'un foncteur plus faible que celle donnée par Grothendieck dans [T] :

(4.1)

Définition

Soient C une catégorie abélienne et T un foncteur défini sur C et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. On dit que T est effaçable (à droite) dans C si, pour tout objet A de C et pour tout $\alpha \in T(A)$, il existe un monomorphisme $0 \to A \overset{u}{\to} M$ dans C tel que $T(u) \cdot \alpha = 0$.

Nous allons montrer que les foncteurs $H^q(X,\cdot)$, pour $q > 0$, sont effaçables dans la catégorie des faisceaux abéliens constructibles. Puisque cette catégorie est une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux sur le petit site étale de X et que la cohomologie se calcule indifféremment sur le grand ou le petit site (1.6), nous travaillerons exceptionnellement dans ce paragraphe sur les petits sites.

(4.2)

Proposition

Soit X un espace algébrique localement noethérien. Tout faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur le petit site étale de X est limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles.

Démonstration

Soit F un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur le petit site. Soient

$U \to X$ un schéma affine étale au-dessus de X et $\xi \in F(U)$. Soit G le sous-faisceau abélien de F engendré par l'image (en tant que faisceau d'ensembles) du morphisme $U \xrightarrow{\xi} F$. Il est clair que F est limite inductive des faisceaux G construits comme ci-dessus. Il suffit donc de montrer que G est constructible.

Puisque G est un faisceau sur le petit site, il est localement constructible. Puisque U est affine et étale au-dessus de X , il existe, d'après (2.3), un recouvrement de X par des sous-espaces localement fermés X_i et, pour chaque i , un revêtement étale X_i' de X_i tel que $U \times_X X_i'$ soit constant fini au-dessus de X_i' .

D'après (2.4), et compte tenu du fait que la formation de G commute au changement de base, on peut donc supposer que U est une somme finie de copies de X . Alors G est l'image (en tant que faisceau abélien), dans le faisceau localement constructible F , d'une somme finie de faisceaux constants $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après (3.1), G est donc constructible.

(4.3)

<u>Définitions</u>

Pour tout $x \in X$, on appelle <u>point géométrique</u> de X centré en x un morphisme $p : \overline{x} \to X$ tel que $\overline{x}$ soit le spectre d'un corps séparablement clos et que $p(\overline{x}) = x$.

Pour tout faisceau F sur le petit site étale de X , on appelle <u>résolution de Godement</u> de F l'homomorphisme canonique

$F \to \prod_{x \in X} p_* p^* F$, où pour tout $x \in X$, p est un point géométrique centré en x .

Puisque la famille des morphismes p , pour $x \in X$, est surjective, il est clair que l'homomorphisme $F \to \prod_{x \in X} p_* p^* F$ est un monomorphisme. Si l'on suppose de plus que l'espace algébrique X est de type fini sur un corps algébriquement clos k , il suffit même de prendre le produit sur les points rationnels $x \in X(k)$ pour que l'homomorphisme $F \to \prod p_* p^* F$ soit un monomorphisme.

(4.4)

Proposition

Le faisceau $\prod p_* p^* F$ *sur le petit site étale de* X *est acyclique. Autrement dit,* $H^q(X, \prod p_* p^* F) = 0$, *pour* $q > 0$.

Démonstration

La formation de la cohomologie commute au produit ; il suffit donc de montrer que, étant donné un point géométrique $p : \overline{x} \to X$, on a $H^q(X, p_* p^* F) = 0$, pour $q > 0$. Plus généralement, si G est un faisceau sur le petit site étale de $\overline{x}$, montrons que $H^q(X, p_* G) = 0$, pour $q > 0$.

Montrons tout d'abord que $R^q p_* G = 0$, pour $q > 0$. Le faisceau $R^q p_* G$ est le faisceau sur le petit site étale de X associé au préfaisceau

$$U \mapsto H^q(U \times_X \overline{x}, G) \text{ , pour } U \in Et/X \text{ .}$$

Il suffit donc de montrer que $H^q(V \times_X \overline{x}, G) = 0$, pour tout V

affine et étale sur X . Puisque $\bar{x}$ est le spectre d'un corps séparablement clos, $V \times_X \bar{x}$ est somme d'un nombre fini de copies de $\bar{x}$, donc

$$H^q(V \times_X \bar{x},G) = \prod_{\text{fini}} H^q(\bar{x},G) .$$

De plus, $H^q(\bar{x},G) = 0$, pour $q > 0$, car $\bar{x}$ ne possède pas de recouvrement étale non trivial.

Puisque $R^q\, p_*G = 0$, pour $q > 0$, on a

$$H^q(X,\, p_*G) = H^q(\bar{x},G) \text{ , pour tout } q ,$$

d'où la proposition.

(4.5)

Corollaire 1

Les foncteurs $H^q(X,\cdot)$ pour $q > 0$, sont effaçables dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le petit site étale de X .

(4.6)

Corollaire 2

Soit X un espace algébrique noethérien. Les foncteurs $H^q(X,\cdot)$ pour $q > 0$, sont effaçables dans la catégorie des faisceaux abéliens constructibles sur X .

Démonstration

Soit F un faisceau abélien constructible sur X . On peut toujours trouver un entier n tel que F soit un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules.

En effet, d'après (2.5), il existe une famille surjective de morphismes de type fini $\pi_i : X'_i \to X$, que l'on peut supposer finie car X

est noethérien, tels que les faisceaux π_i^*F soient constants finis sur $X_i^!$. Soit n un entier tel que la multiplication par n annule tous les π_i^*F . Le morphisme canonique $F \to \prod_i \pi_{i*} \pi_i^* F$ est un monomorphisme, donc la multiplication par n annule F .

Soit $0 \to F \to \Pi\, p_* p^* F = F'$ la résolution de Godement de F . Si F est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules, F' en est un par fonctorialité. D'après (4.2), F' est donc limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles : $F' = \varinjlim F_j^!$. De plus, puisque F est constructible, on peut supposer que les $F_j^!$ contiennent F .

Les foncteurs $H^q(X,\bullet)$ sur la catégorie des faisceaux abéliens sur le petit site étale commutent aux limites inductives [cf. SGA 4, VII 3.3] , donc $H^q(X,F') = \varinjlim H^q(X,F_j^!)$. Mais $H^q(X,F') = 0$ pour $q > 0$, d'après (4.4). Par conséquent, tout élément de $H^q(X,F)$, pour $q > 0$, devient nul dans un $H^q(X,F_j^!)$ pour j assez grand.

V. UN THEOREME DE STRUCTURE

Le théorème ci-dessous montre que tout faisceau constructible sur un espace algébrique X se réalise comme sous-faisceau d'un faisceau obtenu essentiellement à partir de faisceaux constants sur des espaces algébriques finis au-dessus de X. Les morphismes finis étant acycliques (6.5), le théorème nous permettra dans la suite de réduire certaines vérifications au cas d'un faisceau constant. Dans ce paragraphe, nous travaillerons sur les petits sites étales ; nous étendrons plus loin le résultat aux grands sites (8.3).

(5.1)

Théorème

Soient X *un espace algébrique de type fini sur un corps et* F *un faisceau (resp. un faisceau abélien) constructible sur* X *. Alors il existe une famille finie d'espaces algébriques normaux* $X_i^!$ *, de morphismes finis* $\pi_i : X_i^! \to X$ *, de faisceaux (resp. de faisceaux abéliens) constants finis* C_i *sur le petit site étale de* $X_i^!$ *, et un monomorphisme de faisceaux sur le petit site étale de* X

$$0 \to F \to \prod_i \pi_{i*} C_i .$$

Démonstration

Par récurrence noethérienne, on peut supposer que tous les sous-espaces algébriques fermés de X dont l'espace topologique sous-jacent est distinct de X tout entier , vérifient le théorème.

Supposons d'abord que X n'est pas irréductible. Soient X_j ses composantes irréductibles, en nombre fini, munies par exemple de leur structure réduite, et $u_j : X_j \to X$ les immersions fermées correspondantes. Par hypothèse de récurrence, il existe pour tout j une famille finie d'espaces algébriques normaux $(X'_{ij})_{i\in I_j}$, des morphismes finis $\pi_{ij} : X'_{ij} \to X_j$, des faisceaux constants finis C_{ij} sur X'_{ij}, et un monomorphisme

$$0 \to u_j^* F \to \prod_{i\in I_j} \pi_{ij*} C_{ij} .$$

Puisque les X_j recouvrent X, F se plonge dans $\prod_j u_{j*} u_j^* F$, d'où un monomorphisme

$$0 \to F \to \prod_{i,j} (u_j \circ \pi_{ij})_* C_{ij} .$$

Ainsi X vérifie le théorème, puisque les morphismes $u_j \circ \pi_{ij}$ sont finis.

D'après ce qui précède, on peut supposer X irréductible et même intègre. Soient η le point générique de X et K le corps résiduel en η. Le faisceau $F|_\eta$ est une K-algèbre étale de type fini, c'est-à-dire un produit fini d'extensions finies séparables de K. On peut donc trouver une extension finie séparable K' de K telle que $F|_{K'}$ soit constant fini, égal à C.

Soit X' la fermeture intégrale de X dans K'. Le morphisme canonique $\pi : X' \to X$ est fini, car X est de type fini sur un corps [cf. EGA II, 6.3.10]. Le faisceau π^*F est constant au point générique, donc sur un ouvert non vide U de X'. Soient $j : U \to X'$ l'immersion ouverte canonique et C_U le faisceau constant de valeur C sur U. L'homomorphisme naturel

$$\pi^*F \to j_*j^*\pi^*F = j_*\, C_U$$

est un isomorphisme au-dessus de U. De plus, d'après le lemme suivant, $j_*C_U = C_{X'}$.

(5.2)

Lemme

Soient Y un espace algébrique géométriquement unibranche (par exemple normal) et $j : U \to Y$ un sous-espace ouvert dense. Soient C un ensemble et C_Y (resp. C_U) le faisceau constant de valeur C sur le petit site étale de Y (resp. de U). Alors l'homomorphisme naturel $C_Y \to j_*C_U$ est un isomorphisme.

Démonstration

Puisqu'il s'agit de faisceaux sur les petits sites étales, l'assertion se vérifie sur les fibres aux points géométriques de Y [cf. SGA 4, VIII.3.5]. On peut donc supposer que Y est le spectre d'un anneau hensélien à corps résiduel séparablement clos. Alors dire que Y est géométriquement unibranche, c'est dire que Y est irréductible. L'ouvert non-vide U de Y est lui aussi irréductible. Par conséquent :

$$C_Y(Y) = C ,$$

$$j_*C_U(Y) = C_U(U) = C ,$$

d'où le lemme.

Nous pouvons maintenant poursuivre la démonstration de (5.1). Puisque le morphisme $\pi : X' \to X$ est fini, l'ouvert U contient l'image réciproque d'un ouvert non-vide V de X. En appliquant le foncteur exact à gauche π_* à l'homomorphisme $\pi^*F \to C_{X'}$, on trouve donc un homomorphisme $\pi_*\pi^*F \to \pi_*C_{X'}$ qui est un monomorphisme au-dessus de V.

Mais le morphisme π est surjectif (car fermé et dominant), donc l'homomorphisme naturel $F \to \pi_*\pi^*F$ est un monomorphisme. D'où finalement un homomorphisme $F \to \pi_*C_{X'}$ qui est un monomorphisme au-dessus de l'ouvert V

Soit $Z = X-V$ le fermé complémentaire et $h : Z \to X$ l'immersion de Z muni de sa structure réduite dans X. Par hypothèse de récurrence, Z vérifie le théorème (5.1). Il existe donc une famille finie d'espaces algébriques normaux Z_i', des morphismes finis $\pi_i : Z_i' \to Z$, des faisceaux constants finis C_i sur Z_i' et un monomorphisme :

$$h^*F \to \prod_i \pi_{i*} C_i .$$

Puisque Z et V recouvrent X, l'homomorphisme

$$F \to (h_*h^*F) \amalg (\pi_*C_{X'})$$

est un monomorphisme. D'où finalement un monomorphisme

$$F \to (\prod_i (h \circ \pi_i)_* C_i) \amalg (\pi_*C_{X'}) ,$$

ce qui achève la démonstration de (5.1), puisque les morphismes π et $h \circ \pi_i$ sont finis.

VI. RAPPEL SUR LES IMAGES DIRECTES SUPERIEURES ET ENONCE DU THEOREME DE FINITUDE

Dans toute la suite les faisceaux considérés seront des faisceaux abéliens sur les grands sites étales.

(6.1) Rappelons tout d'abord la définition des foncteurs images directes supérieures. Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces algébriques. Le foncteur image directe f_*, qui va de la catégorie des faisceaux abéliens sur le grand site étale de X dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le grand site étale de S, est exact à gauche. On note $R^q f_*$ ses dérivés à droite pour tout $q \geq 0$.

On peut donner des foncteurs $R^q f_*$ la description plus concrète suivante [cf. GT, II.4.7] :

(6.2)

Proposition

Pour tout faisceau abélien F *sur* X, *les faisceaux* $R^q f_* F$ *sont canoniquement isomorphes aux faisceaux sur* S *associés aux préfaisceaux*

$$S' \mapsto H^q(X \times_S S', F) \quad , \quad S' \in \text{Esp.alg./}S \quad .$$

Démonstration

Le foncteur f_* est canoniquement isomorphe au foncteur composé :

$$(\text{Faisceaux}/X) \xrightarrow{i} (\text{Préfaisceaux}/X) \xrightarrow{f_p} (\text{Préfaisceaux}/S) \xrightarrow{a} (\text{Faisceaux}/X) \quad ,$$

où i est l'inclusion canonique, f_p le foncteur image directe pour les préfaisceaux et a le foncteur faisceau associé. Les foncteurs a et f_p sont exacts. On a donc un isomorphisme canonique de foncteurs :

$$R^q f_* \simeq a \circ f_p \circ R^q i \ ,$$

d'où la proposition. En effet, on vérifie facilement [cf. GT, II.2.4], en utilisant les propriétés caractéristiques des foncteurs dérivés, que $R^q iF$ est canoniquement isomorphe au préfaisceau $\mathcal{H}^q(F)$ défini par :

$$\mathcal{H}^q(F)\ (X') = H^q(X', F) \quad , \quad X' \in \text{Esp.alg./}X \ .$$

De la définition des foncteurs $R^q f_*$ comme foncteurs dérivés résultent les propriétés suivantes :

(6.3) Si $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux abéliens sur X, on a une longue suite exacte de faisceaux abéliens sur S :

$$0 \to f_*F' \to f_*F \to f_*F'' \to R^1 f_*F' \to \dots$$
$$\dots \to R^{q-1} f_*F'' \to R^q f_*F' \to R^q f_*F \to R^q f_*F'' \to R^{q+1} f_*F' \to \dots$$

(6.4) Etant donnés deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ et F un faisceau abélien sur X, on a une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{pq} = R^p g_*(R^q f_* F) \Longrightarrow R^{p+q}(g \circ f)_* F \ .$$

Remarquons que les morphismes finis sont cohomologiquement triviaux :

(6.5)

Proposition

Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini et F un faisceau abélien sur X. Alors $R^q f_* F = 0$, pour tout $q > 0$.

Démonstration

D'après (6.2) $R^q f_* F$ est le faisceau associé (pour la topologie étale sur Y) au préfaisceau :

$$Y' \mapsto H^q(X \times_Y Y', F) \quad , \; Y' \in \text{Esp.alg.}/Y \; .$$

Il suffit donc de montrer que tout élément α de $H^q(X \times_Y Y', F)$ $(q > 0)$ est localement trivial pour la topologie induite sur $X \times_Y Y'$ par la topologie étale de Y'.

Localisons Y' (pour la topologie étale) en un point géométrique y' ; on obtient ainsi le spectre $\tilde{Y}'$ d'un anneau local hensélien à corps résiduel séparablement clos. Par hypothèse $X \times_Y \tilde{Y}'$ est fini sur $\tilde{Y}'$, c'est donc une somme finie de copies $\tilde{Y}'_i$ de $\tilde{Y}'$. D'où :

$$H^q(X \times_Y \tilde{Y}', F) = \prod_i H^q(\tilde{Y}'_i, F) \quad .$$

Mais $H^q(\tilde{Y}'_i, F) = 0$ quels que soient i et $q > 0$, puisqu'un anneau local hensélien à corps résiduel séparablement clos ne possède pas de recouvrement étale non trivial. Par conséquent $H^q(X \times_Y \tilde{Y}', F) = 0$, $q > 0$, d'où la proposition.

Le théorème de finitude que nous voulons démontrer est le suivant :

(6.6)

Théorème

Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k, $f : X \to S$ un morphisme propre et F un faisceau abélien constructible sur X. Alors pour tout $q \geq 0$, le faisceau $R^q f_* F$ est constructible sur S.

[Rappelons que les foncteurs $R^q f_*$ sont calculés ici sur les grands sites étales].

En particulier, on a :

(6.7)

Corollaire

Soient X un espace algébrique propre sur le spectre d'un corps algébriquement clos k, et F un faisceau abélien constructible sur X. Alors les groupes $H^q(X,F)$ sont finis pour tout $q \geq 0$.

(6.8)

Plan de la démonstration :

On commence par donner à l'aide du théorème de représentabilité un critère de constructibilité locale (7), puis on démontre le théorème pour $q = 0$ (8). Après quelques rappels sur les théories de Kummer (9) et d'Artin-Schreier (10), on démontre la constructibilité locale (11), puis la constructibilité (12) de $R^q f_* F$ dans le cas où f est de dimension relative ≤ 1. La démonstration s'achève par réduction à ce cas (13).

(6.9)

Le morphisme de changement de base :

Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de morphismes d'espaces algébriques. On définit un morphisme de foncteurs,

$$g^* f_* \to f'_* g'^* \ ,$$

dit morphisme de changement de base, de la manière suivante : puisque g_* et g^* sont adjoints, se donner un tel morphisme équivaut à se donner un morphisme de foncteurs

$$f_* \to g_* f'_* g'^* \ .$$

Mais on a : $g_* f'_* = (gf')_* = (fg')_* = f_* g'_*$. Il suffit donc de se donner un morphisme

$$f_* \to f_* g'_* g'^* \ .$$

On l'obtient en appliquant f_* au morphisme canonique

$$\mathrm{id} \to g'_* g'^* \ .$$

De même, si l'on se restreint aux faisceaux abéliens, on définit, pour tout $q \geq 0$, un morphisme de foncteurs

$$g^*(R^q f_*) \to (R^q f'_*)\ g'^* \ .$$

En effet, par adjonction, se donner un tel morphisme revient à se donner un morphisme

$$R^q f_* \to g_*(R^q f'_*)\ g'^* \ .$$

On prend le composé des morphismes canoniques :

$$R^qf_* \to (R^qf_*)g'_*g'^* \to R^q(fg')_*g'^* = R^q(gf')_*g'^* \to g_*(R^qf'_*)g'^* .$$

La représentabilité des faisceaux R^qf_*F sur le grand site étale, i.e. leur constructibilité locale, implique que leur formation est compatible au changement de base. Plus précisément :

(6.10)

Corollaire

(Théorème de changement de base). Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k , $f : X \to S$ un morphisme propre et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de morphismes d'espaces algébriques. Soit F un faisceau abélien constructible sur X . Alors, pour tout $q \geq 0$, le morphisme de changement de base

$$g^*(R^qf_*F) \to R^qf'_*(g'^* F)$$

est un isomorphisme.

VII. UN CRITERE DE CONSTRUCTIBILITE LOCALE

Rappelons le théorème de représentabilité sous sa forme relative [cf. Chapitre V, 5.2 ou AFM, 3.4] :

(7.1)

Théorème

Soient k un corps algébriquement clos et S un espace algébrique de type fini sur k. Soit F un foncteur : $(\text{Esp.alg}/S)^0 \to (\text{Ens.})$. Alors F est représenté par un espace algébrique localement séparé et localement de présentation finie sur S si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

[0] F est un faisceau pour la topologie étale sur S.

[1] F est localement de présentation finie sur S.

[2] Soit U un S-schéma affine de type fini sur S. Soient $\xi, \eta \in F(U)$. Alors le noyau du couple de flèches $U \underset{\eta}{\overset{\xi}{\rightrightarrows}} F$ est représenté par un sous-schéma de U.

[3] Pour tout $\xi_0 \in F(k)$, il existe une déformation formelle effective universelle de ξ_0 au-dessus de S.

[4] Soit U un S-schéma affine de type fini sur S et soient $\xi \in F(U)$ et $u \in U(k)$ tels que ξ réalise la déformation universelle de $\xi(u)$ au point u. Alors il existe un voisinage ouvert U' de u dans U tel que, en tout point $u' \in U'(k)$, ξ réalise la déformation universelle de $\xi(u')$.

Dans le cas d'un faisceau localement constructible, autrement dit d'un espace algébrique étale, le théorème de représentabilité se simplifie substantiellement :

(7.2)

Théorème

Soient k un corps algébriquement clos et S un espace algébrique de type fini sur k. Soit G un faisceau sur le grand site étale de S. Pour que G soit localement constructible, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

[1] G est localement de présentation finie sur S.

[2 bis] Pour toute O_S-algèbre locale noethérienne complète $\overline{A}$ de corps résiduel k, l'application canonique $G(\overline{A}) \to G(k)$ est bijective.

Démonstration

Il est clair que la condition [1] est nécessaire. La condition [2 bis] l'est aussi. En effet $G \times_S \operatorname{Spec}(\overline{A})$ est étale au-dessus de $\operatorname{Spec}(\overline{A})$; mais $\overline{A}$ est un anneau local complet à corps résiduel algébriquement clos, donc $G \times_S \operatorname{Spec}(\overline{A})$ est un produit de copies de $\operatorname{Spec}(\overline{A})$.

Pour montrer que les conditions [1] et [2 bis] sont suffisantes, nous allons vérifier les conditions [2], [3] et [4] du théorème de représentabilité.

(7.3)

Lemme 1

Tout foncteur G vérifiant la condition [2 bis] vérifie la condition [3]. Plus précisément, soient $s_0 \in S(k)$ et $\xi_0 \in G(k)$ au-dessus de s_0. Soient $\overline{A}$ le complété de l'anneau local de S en s_0 et $\overline{\xi} \in G(\overline{A})$ l'image réciproque de $\xi_0 \in G(k)$ par la bijection $G(\overline{A}) \to G(k)$. Alors $(\overline{A}, \overline{\xi})$ est une déformation effective universelle de ξ_0.

Démonstration

Soient B' une $\underline{O}_S$-algèbre locale telle que la puissance $(n+1)$-ième de l'idéal maximal de B' soit nulle et (B',η') une déformation infinitésimale de ξ_0. Soient B une $\underline{O}_S$-algèbre quotient de B' et $\eta \in G(B)$ induit par η'. Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\overline{A}$, ξ_n l'image de $\overline{\xi}$ dans $G(\overline{A}/\underline{m}^{n+1})$ et $\overline{A}/\underline{m}^{n+1} \to B$ un $\underline{O}_S$-homomorphisme envoyant ξ_n sur η.

Puisque $\overline{A}$ est le complété de l'anneau local de S en s_0, il existe un et un seul $\underline{O}_S$-homomorphisme $\overline{A}/\underline{m}^{n+1} \to B'$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \overline{A}/\underline{m}^{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & B' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

D'après [2 bis], les homomorphismes canoniques :

$$G(\overline{A}/\underline{m}^{n+1}) \to G(B') \to G(B) \to G(k)$$

sont bijectifs. Par suite ξ_n s'envoie sur η' ; ce qui montre que $(\overline{A},\overline{\xi})$ est une déformation effective universelle de ξ_0.

(7.4)

Remarque

Lorsqu'on aura démontré la représentabilité de G par un S-espace algébrique, il résultera automatiquement du lemme 1 que le morphisme $G \to S$ est étale.

(7.5)

Lemme 2

Tout foncteur G vérifiant la condition [2 bis] vérifie la condition [4].

Démonstration

Soient $s_0 \in S(k)$ et $\xi_0 \in G(k)$ au-dessus de s_0. Soit $h : U \to S$ un S-schéma affine de type fini sur S. Soient $\xi \in G(U)$ et $u \in U(k)$ au-dessus de ξ_0, tels que ξ réalise la déformation universelle de ξ_0 au point u.

D'après le lemme 1, l'homomorphisme canonique $\hat{\underline{O}}_{S,s_0} \to \hat{\underline{O}}_{U,u}$, entre les complétés des anneaux locaux de S en s_0 et de U en u, est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme h est étale au point u. Il est donc étale dans un voisinage U' de u dans U. Par suite, pour tout $u' \in U'(k)$, l'homomorphisme canonique $\hat{\underline{O}}_{S,h(u')} \to \hat{\underline{O}}_{U',u'}$ est un isomorphisme. En appliquant de nouveau le lemme 1, on voit que ξ réalise la déformation universelle de $\xi(u')$ au point u'.

(7.6)

Lemme 3

Soit G un foncteur vérifiant la condition [2 bis]. Soit U un S-schéma affine de type fini sur S. Soient $\xi,\eta \in G(U)$ et N le noyau du couple de flèches $U \overset{\xi}{\underset{\eta}{\rightrightarrows}} G$. Alors N, considéré comme foncteur au-dessus de U, vérifie la condition [2 bis] (où l'on a remplacé S par U).

Démonstration

Soient $\bar{A}$ une $\underline{O}_U$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel

k , $\alpha : \mathrm{Spec}(\overline{A}) \to U$ le morphisme structural et $\beta : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(\overline{A})$ l'immersion canonique. On a par définition de N :

$$N(\overline{A}) = \emptyset \quad \text{si} \quad \xi \circ \alpha \neq \eta \circ \alpha \quad ,$$

$$N(\overline{A}) = \{\emptyset\} \quad \text{si} \quad \xi \circ \alpha = \eta \circ \alpha \quad ;$$

$$N(k) = \emptyset \quad \text{si} \quad \xi \circ \alpha \circ \beta \neq \eta \circ \alpha \circ \beta \quad ,$$

$$N(k) = \{\emptyset\} \quad \text{si} \quad \xi \circ \alpha \circ \beta = \eta \circ \alpha \circ \beta \quad .$$

L'application canonique $N(\overline{A}) \to N(k)$ est nécessairement injective, puisque $N(\overline{A})$ a au plus un élément. Montrons qu'elle est surjective. Considérons $\overline{A}$ comme une $\underline{O}_S$-algèbre (grâce au morphisme structural $U \to S$) ; par hypothèse l'application canonique $G(\overline{A}) \to G(k)$ est injective. En particulier $\xi \circ \alpha = \eta \circ \alpha$ dès que $\xi \circ \alpha \circ \beta = \eta \circ \alpha \circ \beta$.

Pour achever la démonstration du théorème (7.2), appliquons le théorème de représentabilité à N , considéré comme foncteur au-dessus de U . Puisque G vérifie les conditions [0] et [1], N vérifie automatiquement [0], [1] et [2]. Mais (Lemme 3) il vérifie aussi la condition [2 bis], donc (Lemmes 1 et 2) les conditions [3] et [4].

Ainsi N est un espace algébrique localement de présentation finie sur U . De plus le morphisme $N \to U$ est un monomorphisme et (7.4) est étale, c'est donc une immersion ouverte, ce qui montre que G vérifie la condition [2].

(7.7)

<u>Remarque</u>

Il est un peu immoral de déduire le théorème (7.2) du théorème général de représentabilité (7.1). En effet, on utilise ici l'algébrisation des déformations seulement dans le cas non obstructé. On sait que dans ce cas c'est une conséquence pratiquement immédiate du théorème d'approximation.

(7.8) Revenons à la situation du théorème (6.6). Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k, $f : X \to S$ un morphisme propre et F un faisceau abélien constructible sur X. Pour montrer la constructibilité locale des faisceaux $R^q f_* F$ (calculés sur les grands sites étales), nous essaierons de vérifier les conditions [1] et [2 bis] du théorème (7.2).

[1] Le faisceau $R^q f_* F$ est localement de présentation finie. En effet, pour tout système inductif filtrant de $\underline{O}_S$-algèbres affines A_i, l'application canonique

$$\varinjlim R^q f_* F(A_i) \to R^q f_* F(\varinjlim A_i)$$

est bijective, car la cohomologie commute aux limites projectives de schémas à morphismes de transition affines [cf. SGA 4, VII.5].

[2 bis] Soit $\overline{A}$ une $\underline{O}_S$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel k. Les anneaux $\overline{A}$ et k sont strictement henséliens, ils n'admettent pas de recouvrement étale non trivial. Par conséquent, on a :

$$R^q f_* F(\overline{A}) = H^q(\overline{X}, F) \ ,$$
$$R^q f_* F(k) = H^q(X_0, F) \ ,$$

en notant $\overline{X} = X \times_X \mathrm{Spec}(\overline{A})$, $X_0 = X \times_S \mathrm{Spec}(k)$ et F l'image réciproque de F sur $\overline{X}$ et X_0. D'où finalement :

(7.9)

Proposition

Pour que le faisceau $R^q f_* F$ *soit localement constructible, il faut et il suffit que pour toute* $\underline{O}_S$*-algèbre locale noethérienne complète* $\bar{A}$ *de corps résiduel* k *, l'application canonique*

$$H^q(\bar{X},F) \to H^q(X_0,F)$$

soit un isomorphisme.

VIII. CONSTRUCTIBILITE DE f_*F

Dans tout ce paragraphe, et sauf mention expresse du contraire, les faisceaux considérés sont des faisceaux sur les grands sites étales et les images directes sont calculées sur les grands sites.

Nous traiterons d'abord le cas où F est constant.

(8.1)

Proposition

Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k, $f : X \to S$ un morphisme propre et F un faisceau constant fini sur X. Alors le faisceau f_*F est localement constructible.

Démonstration

Soit $\overline{A}$ une $\underline{O}_S$-algèbre locale noethérienne complète d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel k. Posons $\overline{X} = X \times_S \operatorname{Spec}(\overline{A})$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = X \times_S \operatorname{Spec}(\overline{A}/\underline{m}^{n+1})$. D'après (7.9), pour montrer que f_*F est constructible, il suffit de vérifier que l'application canonique

$$H^0(\overline{X},F) \overset{\alpha}{\to} H^0(X_0,F)$$

est bijective.

Supposons F constant fini de valeur C. Alors $H^0(\overline{X},F)$ n'est autre que l'ensemble des applications localement constantes de $\overline{X}$ dans C. Par conséquent, pour que l'application α soit bijective, quel que soit C, il faut et il suffit que l'application $\overline{U} \to U_0 = \overline{U} \times_{\overline{X}} X_0$ de l'ensemble $\theta(\overline{X})$ des parties à la fois ouvertes et fermées de $\overline{X}$

dans l'ensemble analogue $\theta(X_0)$ soit bijective. La proposition (8.1) résulte donc du lemme suivant :

(8.2)

Lemme

Soit $\overline{A}$ un anneau local noethérien complet. Soient $\overline{f} : \overline{X} \to \mathrm{Spec}(\overline{A})$ un morphisme propre et X_0 la fibre fermée de $\overline{f}$. Alors l'application canonique $\theta(\overline{X}) \to \theta(X_0)$ est bijective.

Démonstration

On sait que l'ensemble $\theta(\overline{X})$ correspond bijectivement à l'ensemble $\mathrm{Idem}(\overline{X})$ des idempotents de $H^0(\overline{X},\underline{O}_{\overline{X}})$. De même $\theta(X_0)$ correspond bijectivement à l'ensemble $\mathrm{Idem}(X_0)$ des idempotents de $H^0(X_0,\underline{O}_{X_0})$. Il s'agit donc de montrer que l'application canonique

$$\mathrm{Idem}(\overline{X}) \to \mathrm{Idem}(X_0)$$

est bijective.

D'après le théorème fondamental des morphismes propres [EGA III, 4.1.5 ou K, V.3.1], l'application canonique

$$H^0(\overline{X},\underline{O}_{\overline{X}}) \to \varprojlim H^0(X_n,\underline{O}_{X_n})$$

est un isomorphisme. En particulier, l'application canonique

$$\mathrm{Idem}(\overline{X}) \to \varprojlim \mathrm{Idem}(X_n)$$

est bijective. Mais, puisque X_n et X_0 ont même espace topologique sous-jacent, l'application canonique

$$\mathrm{Idem}(X_n) \to \mathrm{Idem}(X_0)$$

est bijective, ce qui achève la démonstration du lemme et par suite celle de la proposition (8.1).

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre le théorème de structure (5.1) démontré sur les petits sites étales aux grands sites.

(8.3)

Théorème

Soient X un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos et F un faisceau (resp. un faisceau abélien) constructible sur X. Alors il existe une famille finie d'espaces algébriques normaux $X_i^!$, de morphismes finis $\pi_i : X_i^! \to X$, de faisceaux (resp. de faisceaux abéliens) constants finis C_i sur le grand site étale de $X_i^!$, et un monomorphisme de faisceaux sur le grand site étale de X,

$$0 \to F \to \prod_i \pi_{i_*} C_i \quad .$$

Démonstration

Nous noterons $u : X_{grd} \to X_{pet}$ le morphisme de sites entre le grand et le petit site étale et $\tilde{X}_{grd} \underset{u^*}{\overset{u_*}{\rightleftarrows}} \tilde{X}_{pet}$ le couple de foncteurs adjoints sur les catégories de faisceaux correspondantes (cf. § 1). Nous affecterons les symboles images directes d'un indice pet ou grd suivant qu'ils sont calculés dans les petits ou les grands sites.

D'après le théorème (5.1), il existe une famille finie d'espaces algébriques normaux $X_i^!$, de morphismes finis $\pi_i : X_i^! \to X$, de faisceaux constants finis $C_{i,pet}$ de valeur C_i sur le petit site étale de $X_i^!$ et un monomorphisme de faisceaux sur le petit site de X

$$0 \to u_*F \overset{\phi}{\to} \prod_i \pi_{i,pet*} C_{i,pet} \quad .$$

En appliquant le foncteur exact u^*, on obtient un monomorphisme de faisceaux sur le grand site de X :

$$0 \to u^*u_*F \xrightarrow{u^*\phi} \prod_i u^*\pi_{i,pet*} C_{i,pet} .$$

De plus, puisque F est constructible, on a $u^*u_*F = F$.

Soit $C_{i,grd}$ le faisceau constant de valeur C_i sur le grand site étale de $X_i^!$. D'après (8.1), le faisceau $\pi_{i,grd*} C_{i,grd}$ est localement constructible, donc :

$$\pi_{i,grd*} C_{i,grd} = u^*u_* \pi_{i,grd*} C_{i,grd} .$$

Mais il est clair que la restriction au petit site de X de l'image directe par π_i du faisceau $C_{i,grd}$ se calcule entièrement sur les petits sites ; autrement dit on a :

$$u_* \pi_{i,grd*} C_{i,grd} = \pi_{i,pet*} C_{i,pet} ,$$

d'où :

$$u^* \pi_{i,pet*} C_{i,pet} = \pi_{i,grd*} C_{i,grd} .$$

Finalement, le monomorphisme $u^*\phi$ s'écrit :

$$0 \to F \to \prod_i \pi_{i,grd*} C_{i,grd} .$$

(8.4)

Proposition

Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k , $f : X \to S$ un morphisme propre et F un faisceau constant fini sur X . Alors le faisceau f_*F est constructible sur S .

On procède tout d'abord à quelques réductions :

(8.5)

Lemme 1

On peut supposer que le morphisme f est fini.

Démonstration

Considérons la factorisation de Stein de f [cf. EGA, III.4.3 ou K , V.4.1] :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & Y \arrow[dl, "h"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où g est à fibres géométriquement connexes et h fini. Soit $F = C_X$ un faisceau constant fini sur X . Puisque les fibres géométriques de g sont connexes et puisque l'on sait (8.1) que g_*C_X est localement constructible, on a $g_*C_X = C_Y$. Par conséquent

$$f_*C_X = h_*(g_*C_X) = h_*C_Y \quad .$$

Il suffit donc de démontrer la proposition pour le morphisme fini h et pour le faisceau constant fini C_Y .

(8.6)

Lemme 2

On peut supposer de plus que X est une somme finie de copies de X .

Démonstration

On sait déjà que le faisceau f_*F est localement constructible (8.1). D'après (2.4), pour montrer qu'il est constructible, il suffit de montrer qu'il existe une famille surjective de morphismes de type fini $g_i : S_i \to S$ tels que l'image réciproque $g_i^*(f_*F)$ de f_*F sur S_i soit constructible. Soient X_i le produit fibré $X \times_S S_i$ et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X_i \arrow[l, "g_i'"'] \arrow[d, "f_i"] \\ S & S_i \arrow[l, "g_i"] \end{tikzcd}$$

le diagramme cartésien correspondant. Si F est constant fini, $g_i'^*F$ l'est aussi. De plus, puisque f_*F (calculé sur les grands sites) est localement constructible, le morphisme de changement de base

$$g_i^*(f_*F) \to f_{i*}(g_i'^*F)$$

est un isomorphisme.

Pour prouver le lemme 2, il suffit donc de montrer qu'on peut trouver une famille surjective de morphismes de type fini $S_i \to S$ tels que, pour tout i, X_i soit une somme finie de copies de S_i. Par récurrence noethérienne sur S, on peut supposer S intègre de point générique η et il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de η et un morphisme de type fini $U' \to S$ recouvrant U tel que $X \times_S U'$ soit une somme finie de copies de U'.

Puisque $X \to S$ est fini, il existe une extension finie K' du corps des fractions de S telle que $X \times_S \mathrm{Spec}(K')$ soit une somme finie de copies de $\mathrm{Spec}(K')$. Soient S' la fermeture intégrale de S dans K' et $X' = X \times_S S'$. Alors il existe un voisinage ouvert U' du point générique de S' tel que $X' \times_{S'} U'$ soit une somme finie de copies de

U' . Le morphisme $S' \to S$ étant fini [cf. EGA II, 6.3.10], U' contient l'image réciproque d'un voisinage ouvert U du point générique η de S .

(8.7)

Fin de la démonstration de (8.4)

Soient $X = \coprod_{i=1}^{m} S$, $f : X \to S$ la projection canonique et $F = C_X$ un faisceau constant fini sur X . Alors

$$f_*(C_X) = (C^m)_S$$

est un faisceau constant fini, ce qui achève la démonstration.

(8.8)

Proposition

Soient S *un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos* k , $f : X \to S$ *un morphisme propre et* F *un faisceau abélien constructible sur* X . *Alors le faisceau* f_*F *(calculé sur les grands sites étales) est localement constructible*.

Démonstration

Soit $\overline{A}$ une $\underline{O}_S$-algèbre locale noethérienne complète d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel k . Posons $\overline{X} = X \times_S \mathrm{Spec}(\overline{A})$ et $X_0 = X \times_S \mathrm{Spec}$
D'après (7.9), pour montrer que f_*F est localement constructible, il suffit de vérifier que l'application canonique

$$H^0(\overline{X},F) \to H^0(X_0,F)$$

est bijective.

D'après (8.3), il existe des morphismes finis $\pi_i : X_i' \to X$, des faisceaux constants finis C_i sur X_i' et un monomorphisme

$$0 \to F \xrightarrow{\phi} G = \prod_i \pi_{i*} C_i \quad .$$

D'après (8.4), les faisceaux $(f \circ \pi_i)_* C_i$ sont constructibles. Ainsi $f_*G = \prod_i (f \circ \pi_i)_* C_i$ est constructible et l'application canonique

$$H^0(\overline{X},G) \to H^0(X_0,G)$$

est bijective.

Du monomorphisme ϕ , on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\overline{X},F) & \longrightarrow & H^0(\overline{X},G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_0,F) & \longrightarrow & H^0(X_0,G) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des injections, car H^0 est exact à gauche. Par suite l'application canonique

$$H^0(\overline{X},F) \to H^0(X_0,F)$$

est injective pour tout faisceau constructible F sur X .

Montrons qu'elle est bijective. Soit H le conoyau de ϕ ; c'est un faisceau constructible sur X d'après (3.1). De la suite exacte

$$0 \to F \xrightarrow{\phi} G \to H \to 0$$

on déduit un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H^0(\overline{X},F) & \longrightarrow & H^0(\overline{X},G) & \longrightarrow & H^0(\overline{X},H) \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \\ 0 \to & H^0(X_0,F) & \longrightarrow & H^0(X_0,G) & \longrightarrow & H^0(X_0,H) \end{array}$$

et où les flèches verticales sont des injections d'après ce qui précède. La surjectivité de β entraîne alors celle de α ; d'où la proposition.

(8.9)

<u>Proposition</u>

<u>Soient</u> S <u>un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos,</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme propre et</u> F <u>un faisceau abélien constructible sur</u> X . <u>Alors le faisceau</u> f_*F <u>est constructible.</u>

<u>Démonstration</u>

D'après (8.3), il existe des morphismes finis $\pi_i : X_i^! \to X$, des faisceaux constants finis C_i sur $X_i^!$ et un monomorphisme

$$0 \to F \to \prod_i \pi_{i*} C_i .$$

Puisque f_* est exact à gauche, on a encore un monomorphisme

$$0 \to f_*F \to f_*(\prod_i \pi_{i*} C_i) = \prod_i (f \circ \pi_i)_* C_i .$$

D'après (8.4), les faisceaux $(f \circ \pi_i)_* C_i$ sont constructibles, donc aussi $\prod_i (f \circ \pi_i)_* C_i$. Ainsi f_*F est un sous-faisceau localement constructible (8.8) d'un faisceau constructible. Il est donc constructible (2.6).

De la proposition (8.9) et de la trivialité cohomologique des morphismes finis (6.5), il résulte en particulier :

(8.10)

<u>Corollaire</u>

<u>Le théorème de finitude (6.6) est vrai pour un morphisme</u> f <u>fini.</u>

IX. THEORIE DE KUMMER

Pour tout espace algébrique X , on notera G_{mX} le faisceau représenté par le groupe multiplicatif Spec $\underline{O}_X[t,t^{-1}]$ sur X . Pour tout $U \to X$, les sections de G_{mX} sont les éléments inversibles $\Gamma(U,\underline{O}_U^*)$ de $\Gamma(U,\underline{O}_U)$. Pour tout entier n inversible sur X , on appelle "faisceau des racines n-ièmes de l'unité", noté μ_{nX} , le noyau de l'élévation à la puissance n-ième dans G_{mX} .

(9.1)

Théorie de Kummer

Si n est inversible sur X , l'élévation à la puissance n-ième est un épimorphisme de faisceaux. On a donc une suite exacte :

$$0 \to \mu_{nX} \to G_{mX} \xrightarrow{n} G_{mX} \to 0 \quad .$$

Démonstration

Soient $U \to X$ un morphisme et $a \in G_{mX}(U)$. Puisque n est inversible sur U , l'équation $T^n-a = 0$ est séparable ; autrement dit $U' = \mathrm{Spec}\ \underline{O}_U[T]/(T^n-a)$ est étale au-dessus de U . Par ailleurs $U' \to U$ est surjectif, c'est donc un morphisme couvrant pour la topologie étale et a induit une puissance n-ième sur U' , d'où le résultat.

On déduit de la théorie de la descente pour les faisceaux inversibles la proposition suivante [SGA 4, IX.3.3], qui généralise le théorème 90 de Hilbert :

(9.2)

Proposition

On a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$H^1(X,G_{mX}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X) ,$$

où Pic(X) *est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur* X *(faisceaux pour la topologie de Zariski).*

De plus, des calculs explicites [SGA 4, IX.4.5.1] donnent dans le cas d'une courbe :

(9.3)

Proposition

Soit X *un schéma de dimension 1 et de type fini sur un corps séparablement clos* k . *Alors, on a, pour* $q > 1$:

$H^q(X,G_{mX}) = 0$, *si* $\mathrm{car}(k) = 0$;

$H^q(X,G_{mX})$ *est un groupe de p-torsion, si* $\mathrm{car}(k) = p > 0$.

D'où il résulte, en utilisant la suite exacte de cohomologie déduite de la théorie de Kummer (9.1) et la proposition (9.2) :

(9.4)

Proposition

Soit X *un schéma de dimension 1 et de type fini sur un corps séparablement clos* k . *Soit* n *un entier inversible dans* k . *Alors on a*

$$H^q(X,\mu_{nX}) = 0 \quad \text{si} \quad q > 2 ,$$

et la cohomologie pour $q \leq 2$ *est donnée par la suite exacte* :

$$0 \to H^0(X,\mu_{nX}) \to \Gamma(X,\underline{O}_X^*) \overset{n}{\to} \Gamma(X,\underline{O}_X^*) \to H^1(X,\mu_{nX}) \to \mathrm{Pic}(X) \overset{n}{\to} \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X,\mu_{nX}) \to 0$$

(9.5)

Corollaire

Si de plus X est connexe propre et lisse sur k et si g est le genre de X, on a

$$H^0(X,\mu_{nX}) \underset{\sim}{} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$H^1(X,\mu_{nX}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$
$$H^2(X,\mu_{nX}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad .$$

Démonstration

Sous les hypothèses du corollaire, on a $\Gamma(X,\underline{O}_X) = k$. Puisque n est inversible dans k et k séparablement clos, l'élévation à la puissance n dans $\Gamma(X,\underline{O}_X^*) = k^*$ est surjective et le groupe $\mu_n(k)$ des racines n-ièmes de l'unité dans k est isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après la suite exacte (9.4), on a :

$$H^0(X,\mu_{nX}) = \mu_n(k) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$H^1(X,\mu_{nX}) = {}_n\mathrm{Pic}(X) = \{\text{éléments de } \mathrm{Pic}(X) \text{ annulés par } n\}$$
$$H^2(X,\mu_{nX}) = \mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \quad .$$

Soit $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ le schéma de Picard de X sur k. Sa composante neutre est une variété abélienne A de dimension g, la jacobienne de X, et on a une suite exacte :

$$0 \to A \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathbb{Z}} \to 0$$

où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le groupe constant associé à $\mathbb{Z}$ sur $\mathrm{Spec}(k)$. En prenant les points à valeurs dans k, on en déduit une suite exacte :

$$0 \to A(k) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \quad .$$

L'endomorphisme de multiplication par n dans A est étale, car n est inversible dans k. Son image est donc un sous-groupe ouvert de A ; puisque A est connexe, c'est A tout entier. Ainsi l'endomorphisme de multiplication par n est étale et surjectif dans A. Le corps k étant séparablement clos, la multiplication par n dans $A(k)$ est elle aussi surjective. Par conséquent, on a

$$_n\,\mathrm{Pic}(X) \simeq {}_n\,A(k)$$

$$\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad .$$

De plus, n étant inversible dans k et A étant une variété abélienne, on montre que $_n\,A(k)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ [cf. AV, p. 64] , ce qui achève la démonstration du corollaire.

X. THEORIE D'ARTIN-SCHREIER

Commençons par un "rappel" sur les applications "q-linéaires" emprunté à un exposé de N. Katz [SGA 7, XXII].

(10.1) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Désignons par q une puissance de p. On dit qu'une application :

$$\phi : V \to V$$

est q-linéaire si elle est additive et si elle vérifie

$$\phi(\lambda v) = \lambda^q \phi(v) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in k \ , \ v \in V \ .$$

On fera attention au fait que l'itéré n-ième ϕ^n d'un endomorphisme q-linéaire est q^n-linéaire, et que, si k n'est pas parfait, l'image $\phi(V)$ d'un endomorphisme q-linéaire n'est pas nécessairement un k-sous-espace vectoriel de V.

(10.2) On dit qu'un endomorphisme q-linéaire ϕ de V est semi-simple si son image engendre V comme k-vectoriel, et qu'il est nilpotent s'il admet un itéré nul.

Si ϕ est un endomorphisme q-linéaire quelconque, on définit un k-sous-espace vectoriel de V stable par ϕ :

$$V_{ss} = \bigcap_{n \geq 1} (\text{k-sous-espace de } V \text{ engendré par } \phi^n(V)) \ .$$

La restriction de ϕ à V_{ss} est semi-simple et l'endomorphisme de V/V_{ss} induit par ϕ est nilpotent.

(10.3)

Proposition

<u>Soit</u> ϕ <u>un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel</u> V <u>de dimension finie sur un corps séparablement clos</u> k . <u>Alors, si</u> ϕ <u>est semi-simple</u>, V <u>possède une k-base formée de points fixes sous</u> ϕ .

Démonstration

Soit $\underline{e}$ une k-base quelconque de V . Soient n la dimension de V sur k et $A \in GL(n,k)$ tel que $\phi(\underline{e}) = A\underline{e}$. Désignons par

$$F : GL(n,k) \to GL(n,k)$$

la flèche "élévation des coordonnées à la puissance q-ième". Alors, pour $g \in GL(n,k)$, $g\underline{e}$ est une base de V formée de points fixes de ϕ si et seulement si

$$g^{-1} A\, F(g) = 1 .$$

Le k-groupe algébrique $GL(n)$ agit sur la k-variété $GL(n)$ par:

$$\begin{aligned} u : GL(n) \times GL(n) &\to GL(n) \\ (g,B) &\to g^{-1}BF(g) . \end{aligned}$$

Pour B fixé, la flèche :

$$\begin{aligned} u_B : GL(n) &\to GL(n) \\ g &\to g^{-1}BF(g) \end{aligned}$$

est étale. En effet, la différentielle de l'application $F : GL(n) \to GL(n)$ est identiquement nulle, donc la différentielle de u_B est $d(u_B) = d(g^{-1})\ BF(g)$.

Par suite les orbites de u sont ouvertes. Mais elles forment une partition de $GL(n)$ qui est un groupe connexe ; il n'y a donc qu'une seule orbite. Autrement dit, la flèche

$$\begin{aligned} u_A : GL(n) &\to GL(n) \\ g &\to g^{-1}AF(g) \end{aligned}$$

est surjective. Comme elle est aussi étale et que k est séparablement clos, l'application induite sur les points à valeurs dans k est surjective. En particulier, il existe $g \in GL(n,k)$ tel que $g^{-1}AF(g) = 1$, ce qui veut dire que $g\underline{e}$ est une base de V formée de points fixes de ϕ.

(10.4)

Corollaire

Soit ϕ un endomorphisme q-linéaire quelconque d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Alors l'application additive

$$\phi - 1 : V \to V$$

est surjective.

Démonstration

La suite exacte

$$0 \to V_{ss} \to V \to V/V_{ss} \to 0$$

est stable par $\phi-1$. Par le "lemme du serpent", il suffit de traiter le cas de V_{ss}, évident par (10.3) en employant une base formée de points fixes, et celui de V/V_{ss}, sur lequel ϕ est nilpotent, donc $\phi-1$ inversible.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la théorie d'Artin-Schreier qui repose sur la proposition suivante :

(10.5)

Théorie d'Artin-Schreier

Soit X un espace algébrique sur un corps de caractéristique $p > 0$. Alors on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale :

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \to \underline{O}_X \xrightarrow{\gamma} \underline{O}_X \to 0$$

où γ est le morphisme de groupes additifs défini par $\gamma(x) = x^p - x$, pour tout $U \to X$ et $x \in \Gamma(U,\underline{O}_U)$.

Démonstration

Le noyau de γ est le faisceau des sections de $\underline{O}_X$ qui sont localement dans le corps premier, donc est le faisceau constant $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X$.

Le morphisme γ est surjectif pour la topologie étale. En effet, pour tout $U \to X$ et $a \in \Gamma(U,\underline{O}_U)$, l'équation $T^p - T - a = 0$ est séparable, car U est de caractéristique p . Autrement dit, $U' = \operatorname{Spec} \underline{O}_U[T]/(T^p - T - a)$ est un revêtement étale de U .

(10.6)

Proposition

Soit X un espace algébrique propre sur un corps séparablement clos de caractéristique $p > 0$. Alors la longue suite exacte de cohomologie déduite de la théorie d'Artin-Schreier se scinde en des petites suites exactes:

$$0 \to H^i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^i_{zar}(X,\underline{O}_X) \to H^i_{zar}(X,\underline{O}_X) \to 0 ,$$

où l'on désigne par $H^i_{zar}(X,\underline{O}_X)$ les groupes de cohomologie du faisceau cohérent $\underline{O}_X$ pour la topologie de Zariski.

Démonstration

Notons tout d'abord que, grâce à la théorie de la descente pour les faisceaux, les groupes de cohomologie étale du faisceau étale associé à un faisceau Zariski quasi-cohérent sont isomorphes aux groupes de cohomologie de Zariski de ce faisceau [SGA 4, VII.4.3].

Ceci vaut en particulier pour le faisceau cohérent $\underline{O}_X$. De plus, puisque X est propre sur k , les groupes $H^i(X,\underline{O}_X) \simeq H^i_{zar}(X,\underline{O}_X)$ dont des espaces vectoriels de dimension finie sur k [cf. EGA, III.3.2.3 ou K, IV.4.1]. Par ailleurs, il est clair que l'endomorphisme de $H^i(X,\underline{O}_X)$ induit par γ est de la forme $\phi-1$ où ϕ est une application p-linéaire. D'après (10.4) $\phi-1$ est surjectif, d'où la proposition.

(10.7)

Corollaire

Soit X un espace algébrique propre sur un corps séparablement clos k de caractéristique $p > 0$. Soit ν un entier > 0 . Alors

$$H^i(X,\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i > \dim X .$$

Démonstration

Par récurrence, il suffit de démontrer le corollaire pour $\nu = 1$. C'est une conséquence immédiate de la proposition (10.6) et de la nullité des groupes $H^i_{zar}(X,\underline{O}_X)$ pour $i > \dim X$.

XI. CONSTRUCTIBILITE LOCALE DE $R^q f_* F$ DANS LE CAS DE DIMENSION RELATIVE ≤ 1

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, les faisceaux considérés sont des faisceaux sur les grands sites étales et les images directes supérieures sont calculées sur les grands sites.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat suivant :

(11.1)

Proposition

Soient S un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos k , $f : X \to S$ un morphisme propre de dimension relative ≤ 1 et F un faisceau abélien constructible sur X . Alors pour tout $q \geq 0$, le faisceau $R^q f_* F$ est localement constructible.

(11.2)

Corollaire

Soient $f : X \to S$ et F comme ci-dessus et soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de morphismes d'espaces algébriques. Alors, pour tout $q \geq 0$, le morphisme de changement de base

$$g^*(R^q f_* F) \to R^q f'_*(g'^* F)$$

est un isomorphisme.

On aura besoin d'un lemme technique sur les foncteurs cohomologiques effaçables [cf. définition (4.1)] :

(11.3)

Lemme

Soit $\phi^{\bullet} : T^{\bullet} \to T'^{\bullet}$ un morphisme de foncteurs cohomologiques définis sur une catégorie abélienne C et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Supposons que $\phi^0 : T^0 \to T'^0$ est bijectif et que T^q est effaçable pour $q > 0$. Soit n un entier, $n \geq 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) ϕ^q est bijectif pour $1 \leq q \leq n$,

ii) ϕ^q est surjectif pour $1 \leq q \leq n$,

iii) T'^q est effaçable pour $1 \leq q \leq n$.

Démonstration

Elle ne présente pas de difficulté, nous la donnerons cependant puisque nous avons adopté une définition de l'effaçabilité plus faible que la définition habituelle. L'implication i) $\Longrightarrow$ ii) est triviale.

ii) $\Longrightarrow$ iii) : Soient A un objet de C , q un entier, $1 \leq q \leq n$ et $\alpha' \in T'^q(A)$. Puisque ϕ^q est surjectif, il existe $\alpha \in T^q(A)$ tel que $\phi^q(A)\cdot\alpha = \alpha'$. Puisque T^q est effaçable, il existe un monomorphisme $0 \to A \xrightarrow{u} M$ dans C tel que $T^q(u)\cdot\alpha = 0$, d'où $T'^q(u)\cdot\alpha' = 0$. Donc T'^q est effaçable.

iii) $\Longrightarrow$ i) : Nous procéderons par récurrence sur q . Supposons démontré que ϕ^i est bijectif pour tout $i < q$.

Montrons que ϕ^q est <u>surjectif</u>. Soient A un objet de $\mathcal{C}$ et $\alpha' \in T'^q(A)$. Puisque T'^q est effaçable, il existe une suite exacte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \to A \overset{u}{\to} M \overset{v}{\to} B \to 0$$

telle que $T'^q(u)\cdot\alpha' = 0$. On en déduit un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} T^{q-1}(B) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & T^q(A) \arrow[r] \arrow[d] & T^q(M) \arrow[d] \\ T'^{q-1}(B) \arrow[r, "d'"] & T'^q(A) \arrow[r] & T'^q(M) \end{tikzcd} .$$

Puisque $T'^q(u)\cdot\alpha' = 0$, il existe $\beta' \in T'^{q-1}(B)$ tel que $d'\beta' = \alpha'$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\beta \in T^{q-1}(B)$ tel que $\phi^{q-1}(B)\cdot\beta = \beta'$. Alors $\alpha' = \phi^q(A)\cdot d\beta$.

Montrons que ϕ^q est <u>injectif</u>. Soient A un objet de $\mathcal{C}$ et $\alpha \in T^q(A)$ tel que $\phi^q(A)\cdot\alpha = 0$. Puisque T^q est effaçable, il existe une suite exacte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \to A \overset{u}{\to} M \overset{v}{\to} B \to 0$$

telle que $T^q(u)\cdot\alpha = 0$. On en déduit un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} T^{q-1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^{q-1}(B) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & T^q(A) \arrow[r] \arrow[d] & T^q(M) \arrow[d] \\ T'^{q-1}(M) \arrow[r] & T'^{q-1}(B) \arrow[r, "d'"] & T'^q(A) \arrow[r] & T'^q(M) \end{tikzcd} .$$

Puisque $T^q(u)\cdot\alpha = 0$, il existe $\beta \in T^{q-1}(B)$ tel que $d\beta = \alpha$.

Soit $\beta' = \phi^{q-1}(B)\cdot\beta$. On a $d'\beta' = 0$, donc il existe $\gamma' \in T'^{q-1}(M)$ tel que $T'^{q-1}(v)\cdot\gamma' = \beta'$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\gamma \in T^{q-1}(M)$ tel que $\phi^{q-1}(M)\cdot\gamma = \gamma'$. En appliquant encore une fois l'hypothèse de récurrence, $\phi^{q-1}(B)$ est injectif, donc $T^{q-1}(v)\cdot\gamma = \beta$. Par conséquent, $\alpha = 0$.

(11.4)

<u>Remarque</u>

L'implication ii) ==> iii) est vraie pour A et q fixés, la surjectivité de $\phi^q(A)$ implique l'effaçabilité de $T'^q(A)$.

(11.5) Pour montrer la constructibilité locale de R^qf_*F , il suffit, d'après (7.9), de vérifier que, étant donné une $\underline{O}_S$-algèbre locale noethérienne complète $\overline{A}$ de corps résiduel k , l'application canonique

$$(*) \qquad H^q(\overline{X},F) \to H^q(X_0,F) ,$$

où $\overline{X} = X \otimes \overline{A}$ et $X_0 = X \otimes k$, est bijective.

Le membre de gauche est effaçable dans la catégorie des faisceaux constructibles sur $\overline{X}$ (4.6). D'après le lemme (11.3) et le cas $q = 0$ déjà traité (8.9), il suffit de montrer que le membre de droite est effaçable dans cette même catégorie.

Pour montrer l'effaçabilité pour F donné, on peut évidemment remplacer F par un faisceau constructible le contenant. Or, d'après le théorème de structure (8.3), il existe des morphismes finis $\pi_i : X_i^! \to \overline{X}$ en nombre fini, des faisceaux abéliens constants finis C_i sur $X_i^!$ et un monomorphisme

$$0 \to F \to \prod_{i=1}^{n} \pi_{i*}C_i \to G \ .$$

D'après (8.4), les faisceaux $\pi_{i*}C_i$ sont constructibles. Donc G est constructible et on peut remplacer F par G. De plus :

$$H^q(X_0, \prod_{i=1}^{n} \pi_{i*}C_i) = \prod_{i=1}^{n} H^q(X_0,\pi_{i*}C_i) \ ,$$

et, puisque π_i est fini, donc cohomologiquement trivial :

$$H^q(X_0,\pi_{i*}C_i) = H^q(X_i' \times_{\overline{X}} X_0,C_i) \ , \quad q > 0 \ .$$

Quitte à remplacer $\overline{X}$ par X_i', il suffit donc de montrer l'effaçabilité dans le cas où F est constant fini. Puisque tout groupe abélien fini est produit de groupes de la forme $\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$, avec ℓ premier et ν entier, on peut même supposer $F = \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$.

De plus, d'après la remarque (11.4), le membre de gauche de (*) étant effaçable, l'effaçabilité du membre de droite résultera de la surjectivité de l'application :

$$H^q(\overline{X},\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \to H^q(X_0,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \ .$$

Si $\ell = \mathrm{car}(k)$, on a, d'après la théorie d'Artin-Schreier (10.7), puisque X_0 est de dimension ≤ 1,

$$H^q(X_0,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) = 0 \ , \text{ pour } q > 1 \ .$$

Si $\ell \neq \mathrm{car}(k)$, $\overline{A}$ étant un anneau local noethérien complet à corps résiduel séparablement clos, il existe un isomorphisme non canonique $(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})_{\overline{X}} \simeq (\mu_{\ell^{\nu}})_{\overline{X}}$. On a, d'après la théorie de Kummer (9.4), puisque X_0 est de dimension ≤ 1,

$$H^q(X_0,\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \simeq H^q(X_0,\mu_{\ell^\nu}) = 0 \text{ , pour } q > 2 \text{ .}$$

Il suffit donc de considérer les cas :

- $q = 1$ et ℓ quelconque ;
- $q = 2$ et $\ell \neq \mathrm{car}(k)$.

(11.6)

Cas $q = 1$ et ℓ quelconque

Pour tout espace algébrique Y , on sait [cf. SGA 4, VII.2] , que $H^1(Y,\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe des classes à isomorphisme près de torseurs [cf. définition (3.3)] sur Y sous $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, c'est-à-dire de revêtements étales de Y sur lesquels le groupe $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$ opère librement et transitivement. On notera $\mathrm{Rev.et.}(Y)$ la catégorie des revêtements étales de Y . La surjectivité (et même la bijectivité) de l'application $H^1(\overline{X},\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \to H^1(X_0,\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ est conséquence du théorème suivant :

(11.7)

Théorème

Soient $\overline{A}$ un anneau local noethérien complet et $\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$. Soient $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ un morphisme propre et X_0 la fibre fermée de f . Alors le foncteur de restriction

$$\mathrm{Rev.et.}(\overline{X}) \to \mathrm{Rev.et.}(X_0)$$

est une équivalence de catégories.

(11.8)

Remarque

A posteriori, d'après le théorème d'approximation, on peut dans l'énoncé précédent supposer que $\overline{A}$ est un anneau local hensélien [cf.A,3.1].

Démonstration

Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\overline{A}$ et $X_n = X \times_{\overline{\Lambda}} \overline{\Lambda}/\underline{m}^{n+1}$ le n-ième voisinage infinitésimal de X_0. Rappelons que les revêtements étales ne sont pas affectés par les éléments nilpotents de la base, plus précisément [cf. SGA 1, I.8.3] le foncteur de restriction

$$\text{Rev.et.}(X_n) \to \text{Rev.et.}(X_0)$$

est une équivalence de catégories.

Ainsi tout revêtement étale W_0 de X_0 se relève en un système inductif de revêtements étales W_n des X_n, chacun d'eux étant le spectre d'une $\underline{O}_{X_n}$-algèbre cohérente $\underline{B}_n$. D'après le théorème d'existence de Grothendieck [cf. EGA, III.5.1.4 et K , V.6.3] le faisceau formel $\underline{B}_n$ est induit par un faisceau cohérent $\overline{\underline{B}}$ de $\underline{O}_{\overline{X}}$-algèbres. Posons $\overline{W} = \text{Spec}(\overline{\underline{B}})$. $\overline{W}$ est un espace algébrique fini sur $\overline{X}$ et relève W_0.

Montrons que le morphisme $\pi : \overline{W} \to \overline{X}$ est étale. L'ensemble des points de $\overline{W}$ où π est étale est un ouvert $\overline{V}$ de $\overline{W}$. Mais le morphisme π est fini, en particulier fermé, par conséquent l'ensemble $\overline{U} = \overline{X}-\pi(\overline{W}-\overline{V})$ des points de $\overline{X}$ au-dessus desquels π est étale est un ouvert de $\overline{X}$. Au-dessus de chacun des X_n, W_n est étale ; π est donc étale au-dessus des points de X_0. Ainsi $\overline{U} = \overline{X}$ et $\pi : \overline{W} \to \overline{X}$ est un revêtement étale.

Il reste à montrer qu'étant donné deux revêtements étales $\overline{W}$ et $\overline{W}'$ de $\overline{X}$, l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{X}}(\overline{W},\overline{W}') \to \mathrm{Hom}_{X_0}(W_0,W_0')$$

est bijective. Pour tout entier $n \geq 0$, le foncteur de restriction $\mathrm{Rev.et.}(X_n) \to \mathrm{Rev.et.}(X_0)$ est une équivalence de catégories ; en particulier l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_{X_n}(W_n,W_n') \to \mathrm{Hom}_{X_0}(W_0,W_0')$$

est bijective. Soient $\hat{X}$, $\hat{W}$, $\hat{W}'$ les complétés formels de $\overline{X}$, $\overline{W}$, $\overline{W}'$, le long de l'image réciproque du point fermé de $\overline{S}$. En passant à la limite, on voit que l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{X}}(\hat{W},\hat{W}') = \varprojlim \mathrm{Hom}_{X_n}(W_n,W_n') \to \mathrm{Hom}_{X_0}(W_0,W_0')$$

est bijective. Mais, d'après le théorème d'existence de Grothendieck, l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{X}}(\overline{W},\overline{W}') \to \mathrm{Hom}_{\hat{X}}(\hat{W},\hat{W}')$$

qui à tout morphisme fait correspondre son prolongement aux complétés, est une bijection [cf. EGA, III.5.4.1] . D'où le résultat voulu.

(11.9)

<u>Cas</u> $q = 2$ <u>et</u> $\ell \neq \mathrm{car}(k)$

Rappelons que dans ce cas $(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})_{\overline{X}}$ est isomorphe à $(\mu_{\ell^{\nu}})_{\overline{X}}$. On déduit de la théorie de Kummer (9.1) un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & H^2(\overline{X},\mu_{\ell^{\nu}}) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathrm{Pic}(X_0) \arrow[r, "\beta"'] & H^2(X_0,\mu_{\ell^{\nu}})
\end{tikzcd}$$

où l'application β est surjective (9.4). Pour montrer la surjectivité de γ , il suffit donc de montrer celle de α .

(11.10)

Théorème

Soient $\overline{S}$ le spectre d'un anneau local noethérien complet, $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ un morphisme propre de dimension relative ≤ 1 et X_0 la fibre fermée de f . Alors l'application canonique de restriction

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(X_0)$$

est surjective.

(11.11)

Remarque

À posteriori, d'après le théorème d'approximation, on peut dans l'énoncé précédent supposer que $\overline{S}$ est le spectre d'un anneau local hensélien. On peut d'ailleurs, par une méthode sensiblement différente, démontrer le résultat directement dans ce cas [EGA, IV, 21.9.12].

Démonstration

On notera $\underline{J}$ l'idéal quasi-cohérent de $\underline{O}_{\overline{X}}$ qui définit la fibre fermée X_0 et X_n le n-ième voisinage infinitésimal de X_0 . Alors la suite de faisceaux de groupes (pour la topologie de Zariski)

$$0 \to \underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2} \xrightarrow{u} \underline{O}^*_{X_{n+1}} \xrightarrow{v} \underline{O}^*_{X_n} \to 1$$

est exacte. Précisons que la structure de groupe de $\underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2}$ est la structure additive, que $u(x) = 1+x$ pour tout $x \in \underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2}$, et que

v est l'homomorphisme déduit de l'injection $\underline{J}^{n+2} \to \underline{J}^{n+1}$. L'application u est un homomorphisme de groupes car $\underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2}$ est un idéal de carré nul de $\underline{O}_{X_{n+1}} = \underline{O}_{\overline{X}}/\underline{J}^{n+2}$. La vérification de l'exactitude est immédiate.

On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$\mathrm{Pic}(X_{n+1}) \to \mathrm{Pic}(X_n) \to H^2_{zar}(\overline{X},\underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2}) ,$$

où l'on a identifié $H^1(\overline{X},\underline{O}^*_{X_{n+1}})$ (resp. $H^1(\overline{X},\underline{O}^*_{X_n})$) et $\mathrm{Pic}(X_{n+1})$ (resp. $\mathrm{Pic}(X_n)$).

Puisque $\overline{f}$ est de dimension relative ≤ 1 , on a $H^2_{zar}(\overline{X},\underline{J}^{n+1}/\underline{J}^{n+2}) = 0$. On peut donc relever de proche en proche un faisceau inversible $\underline{L}_0$ donné sur X_0 en des faisceaux inversibles $\underline{L}_n$ sur X_n tels que $\underline{L}_n \otimes \underline{O}_{X_{n-1}}$ soit isomorphe à $\underline{L}_{n-1}$. D'après le théorème d'existence de Grothendieck [EGA, III.5.4], le faisceau formel $\{\underline{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est induit par un faisceau cohérent, nécessairement inversible, $\overline{\underline{L}}$ sur $\overline{X}$. Ceci achève la démonstration de (11.10) et par conséquent celle de la proposition (11.1).

XII. CONSTRUCTIBILITE DE R^qf_*F DANS LE CAS DE DIMENSION RELATIVE ≤ 1

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante :

(12.1)

Proposition

Soient S *un espace algébrique de type fini sur un corps algébriquement clos* k , $f : X \to S$ *un morphisme propre de dimension relative* ≤ 1 *et* F *un faisceau abélien constructible sur* X . *Alors, pour tout* $q \geq 0$, *le faisceau* R^qf_*F *est constructible sur* S .

On procède tout d'abord à quelques réductions :

(12.2)

Lemme 1

On peut supposer F *constant fini.*

Démonstration

D'après le théorème de structure (8.3), il existe des espaces algébriques X_i' $(i = 1,\ldots,n)$, des morphismes finis $\pi_i : X_i' \to X$, des faisceaux constants finis C_i sur X_i' et un monomorphisme

$$0 \to F \to \prod_{i=1}^{n} \pi_{i*} C_i = G .$$

Les faisceaux $\pi_{i*} C_i$ sont constructibles, d'après (8.4), donc G est constructible. Par suite, le conoyau H du morphisme $F \to G$ est constructible (3.1). On déduit de la suite exacte

$$0 \to F \to G \to H \to 0 ,$$

une suite exacte de cohomologie

$$R^{q-1}f_*G \to R^{q-1}f_*H \to R^qf_*F \to R^qf_*G \to R^qf_*H \quad .$$

Tous les faisceaux de cette suite sont localement constructibles (11.1). De plus, d'après (8.9), la proposition (12.1) est vraie pour $q = 0$; par récurrence sur q , on peut donc supposer que $R^{q-1}f_*H$ est constructible. Pour démontrer la constructibilité de R^qf_*F , il suffit alors, d'après (3.6), de démontrer celle de R^qf_*G . Puisque les morphismes π_i sont finis, en particulier cohomologiquement triviaux, on a :

$$R^qf_*G = \prod_{i=1}^{n} R^q(f\ \pi_i)_*\ C_i \ .$$

Quitte à remplacer X par X'_i et F par C_i , on peut donc supposer que F est constant fini.

(12.3)

Lemme 2

On peut supposer de plus qu'il existe un espace algébrique $\overline{X}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où π est un morphisme fini surjectif et $\overline{f}$ un morphisme lisse.

Démonstration

On sait déjà (11.1) que le faisceau R^qf_*F est localement constructible. D'après (2.4), pour montrer qu'il est constructible, il suffit de montrer qu'il existe une famille surjective de morphismes de type fini $g_i : S_i \to S$ tels que l'image réciproque $g_i^*(R^q f_* F)$ de $R^q f_* F$ sur S_i soit constructible. Soient X_i le produit fibré $X \times_S S_i$ et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X_i \arrow[l, "g_i'"'] \arrow[d, "f_i"] \\ S & S_i \arrow[l, "g_i"] \end{tikzcd}$$

le diagramme cartésien correspondant. D'après (11.2), on a

$$g_i^*(R^q f_* F) \simeq R^q f_{i*}(g_i'^* F) .$$

De plus, si F est constant fini, $g_i'^* F$ l'est aussi.

Pour prouver le lemme 2, il suffit donc de montrer qu'on peut trouver une famille surjective de morphismes de type fini $S_i \to S$ tels que les morphismes $f_i : X_i \to S_i$ s'insèrent dans des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "f_i"'] & \overline{X}_i \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[dl, "\overline{f}_i"] \\ S_i & \end{tikzcd}$$

avec π_i fini surjectif et $\overline{f}_i$ lisse.

Par récurrence noethérienne sur S, cela résulte du lemme suivant :

(12.4)

<u>Lemme 3</u>

<u>Soient</u> S <u>un espace algébrique intègre de type fini sur un</u>

corps k et $f : X \to S$ un morphisme propre de dimension relative ≤ 1. Alors il existe un ouvert non vide U de S et un morphisme fini surjectif $U' \to U$, avec U' intègre, tel que le normalisé $\overline{X}'_{U'}$ de $(X \times_S U')_{red}$ soit lisse sur U'.

Remarque

Le morphisme canonique $\overline{X}'_{U'} \to X \times_S U'$ est nécessairement surjectif, il est aussi fini car $X \times_S U'$ est de type fini sur un corps [cf. EGA, II.6.3.10].

Démonstration

Soit η le point générique de S. La fibre générique X_η est de dimension ≤ 1 et de type fini sur le corps des fractions $K = k(\eta)$ de S. Il existe donc une extension radicielle finie K' de K telle que le normalisé $\overline{X}'_{K'}$ de $(X_\eta \otimes_K K')_{red}$ soit lisse sur K'. Soient S' la fermeture intégrale de S dans K' et $\overline{X}'$ le normalisé de $(X \times_S S')_{red}$. L'ensemble des points de $\overline{X}'$ en lesquels le morphisme canonique $\overline{f}' : \overline{X}' \to S'$ est lisse, est un ouvert V' de $\overline{X}'$ qui contient la fibre générique. Mais $\overline{f}'$ est propre, donc V' contient l'image réciproque d'un voisinage ouvert W' du point générique de S'. De même, le morphisme $S' \to S$ étant fini, W' contient l'image réciproque U' d'un voisinage ouvert U du point générique η de S.

(12.5)

Lemme 4

On peut supposer que le morphisme $f : X \to S$ est lisse.

Démonstration

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \bar{X} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où π est fini surjectif et $\bar{f}$ lisse. Soit F un faisceau constant fini sur X. Alors π^*F est également un faisceau constant fini et l'homomorphisme canonique $F \to \pi_*\pi^*F$ est un monomorphisme, parce que π est surjectif. En procédant par récurrence sur q, comme dans la démonstration du lemme 1, on voit qu'il suffit de montrer que $R^q\bar{f}(\pi^*F)$ est constructible. Quitte à remplacer f par $\bar{f}$ et F par π^*F, on peut donc supposer que f est lisse.

(12.6)

Lemme 5

On peut supposer de plus que S est réduit et que les fibres géométriques de $f : X \to S$ sont connexes et de dimension 1.

Démonstration

La factorisation de Stein de f [cf. EGA, III.4.3 ou K, V.4.1] permet d'écrire f comme le composé d'un morphisme lisse g dont les fibres géométriques sont connexes et d'un morphisme fini h. La proposition (12.1) étant déjà démontrée pour le morphisme fini h (8.10), il suffit de la démontrer pour g. Quitte à remplacer f par g, on peut donc supposer que f est propre lisse de dimension relative ≤ 1 et à fibres géométriques connexes.

La dimension des fibres de f est une fonction constructible sur S [cf. EGA, IV.9.5.6]. Autrement dit, il existe une famille de sous-espaces localement fermés S_i de S, que l'on peut supposer réduits, qui recouvrent S et tels que la dimension des fibres du morphisme $f_i : X_i = X \times_S S_i \to S_i$ déduit de f par changement de base soit constante, égale à 0 ou 1. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2, on voit qu'il suffit de démontrer la proposition (12.1) pour les morphismes f_i et pour les faisceaux constants sur X_i. Si la dimension relative de f_i est nulle, f_i est fini et la proposition est déjà démontrée (8.10). Sinon f_i est propre lisse à fibres géométriquement connexes et de dimension 1. D'où le lemme.

La démonstration du lemme suivant utilise des résultats de Grothendieck sur le comportement de la cohomologie (de Zariski) des fibres d'un morphisme propre et plat pour lesquels nous renvoyons à EGA, III.7. Signalons qu'on peut en trouver un exposé moins complet, mais plus lisible, dans le livre de Mumford sur les variétés abéliennes [AV, II.5].

(12.7)

Lemme 6

Soient S un espace algébrique réduit et $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse dont les fibres sont de dimension 1. Alors le genre des fibres de f est localement constant sur S, de plus le faisceau $R^1f_*\underline{O}_X$ est localement libre (de rang fini) et sa formation commute au changement de base.

Démonstration

Pour tout $s \in S$, on notera $k(s)$ le corps résiduel de S en s , $X_s = X \otimes k(s)$ la fibre de f au-dessus de s et

$$h^0(s) = \dim_{k(s)} H^0(X_s, \underline{O}_{X_s})$$

$$h^1(s) = \dim_{k(s)} H^1(X_s, \underline{O}_{X_s}) = \text{genre de } X_s \ .$$

Puisque f est lisse , $H^0(X_s, \underline{O}_{X_s})$ est une $k(s)$-algèbre séparable, par conséquent $\underline{O}_X$ est cohomologiquement plat sur S en dimension 0 [EGA, III.7.8.6]. En particulier la fonction $s \mapsto h^0(s)$ est localement constante. Mais la caractéristique d'Euler-Poincaré de X_s , $\chi(s) = h^0(s) - h^1(s)$ est localement constante [EGA, III.7.9.4], par conséquent $h^1(s)$ l'est aussi.

Puisque S est réduit, le fait que $h^1(s)$ soit localement constant entraîne que le faisceau $R^1 f_* \underline{O}_X$ est localement libre et que sa formation commute au changement de base [EGA, III.7.8.4]. Il est évidemment de rang fini égal au genre des fibres de f .

Remarque

Dans le lemme ci-dessus, la cohomologie est prise au sens de Zariski. Cependant comme le faisceau $\underline{O}_X$ est cohérent, $R^1 f_* \underline{O}_X$ calculé sur le petit site étale s'identifie au faisceau sur le petit site étale canoniquement associé à $R^1_{zar} f_* \underline{O}_X$ (*) . De plus, comme la formation de $R^1_{zar} f_* \underline{O}_X$ commute au changement de base, $R^1 f_* \underline{O}_X$ calculé sur le grand site étale s'identifie au faisceau sur le grand site étale canoniquement associé à $R^1_{zar} f_* \underline{O}_X$.

(*) [cf. SGA 4, VII.4.3].

(12.8)

Démonstration de la proposition (12.1)

On suppose S réduit, $f : X \to S$ propre lisse à fibres géométriquement connexes de dimension 1, et F constant fini, on peut même supposer $F = \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$.

Supposons d'abord $\ell \neq \mathrm{car}(k)$. Sachant que $R^q f_* F$ est localement constructible, il suffit de montrer que le rang des fibres géométriques de l'espace algébrique $R^q f_* F$ est fini et que c'est une fonction constructible sur S (2.8).

Soient s un point de S , $\overline{k}(s)$ une clôture algébrique du corps résiduel en s et $X_{\overline{s}} = X \times \overline{k}(s)$. D'après (11.2), appliqué au changement de base $\mathrm{Spec}\, \overline{k}(s) \to S$, on a :

$$\mathrm{rang}_{\overline{k}(s)}\, R^q f_*(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \otimes \overline{k}(s) = \mathrm{card.}\, H^q(X_{\overline{s}}, \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \quad .$$

D'après la théorie de Kummer, (9.5), on a :

$$H^1(X_{\overline{s}}, \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})^{2g} \text{ , où } g = \text{genre de } X_{\overline{s}} \text{ ,}$$

$$H^2(X_{\overline{s}}, \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z} \text{ ,}$$

$$H^q(X_{\overline{s}}, \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) = 0 \text{ , si } q > 2 \text{ .}$$

Ainsi le rang des fibres géométriques de $R^q f_*(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ est fini et est une fonction constructible de s , puisque le genre de X_s (= genre de $X_{\overline{s}}$) en est une (12.7).

Supposons maintenant $\ell = \mathrm{car}(k) = p$. En procédant par récurrence sur ν et par extensions successives, il suffit de traiter le cas où $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après la théorie d'Artin-Schreier (10.7), on a

$$H^q(X_{\overline{s}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \ , \text{ si } \ q > 1 \ .$$

Le seul cas à considérer est donc $q = 1$. On déduit de la suite exacte d'Artin-Schreier (10.5) une suite exacte de cohomologie :

$$f_*\underline{O}_X \xrightarrow{\gamma} f_*\underline{O}_X \to R^1f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to R^1f_*\underline{O}_X \xrightarrow{\gamma} R^1f_*\underline{O}_X \quad .$$

Par hypothèse $f_*\underline{O}_X = \underline{O}_S$, or le morphisme $\gamma : \underline{O}_S \to \underline{O}_S$ est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie étale. D'où une suite exacte :

$$0 \to R^1f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to R^1f_*\underline{O}_X \xrightarrow{\gamma} R^1f_*\underline{O}_X \quad .$$

Le faisceau $R^1f_*\underline{O}_X$ est localement libre de rang fini et sa formation commute au changement de base (12.7) ; considéré comme faisceau sur le grand site étale de S , il est donc représentable par le fibré vectoriel $\mathbb{V}(R^1f_*\underline{O}_X)$ [cf. EGA, I.9.4.10] qui est de type fini sur S . Par conséquent $R^1f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, noyau d'un morphisme entre espaces de type fini, est lui aussi de type fini sur S , ce qui achève la démonstration de (12.1).

XIII. REDUCTION A LA DIMENSION RELATIVE 1

Dans ce paragraphe, on montre que, le théorème de finitude (6.6) étant vrai pour $q = 0$ (8.9), et pour un morphisme fini (8.10) ou de dimension relative ≤ 1 (12.1), il est vrai pour un morphisme propre quelconque.

(13.1)

Lemme 1

Etant donné un diagramme commutatif de morphismes propres :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "f'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

si le théorème est vrai pour f et π, il est vrai pour f'.

Démonstration

Soit F' un faisceau constructible sur X'. On a une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{pq} = R^p f_*(R^q \pi_* F') \Longrightarrow R^{p+q} f'_* F' .$$

Puisque le théorème est vrai pour f et π, les termes E_2^{pq} sont des faisceaux constructibles quels que soient p et q. Par suite l'aboutissement est constructible, d'après (3.1) et (3.5).

(13.2)

Lemme 2

Soient

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

<u>un diagramme commutatif de morphismes propres et</u> U <u>un ouvert de</u> X <u>au-dessus duquel</u> π <u>est un isomorphisme. Soit</u> Y <u>le sous-espace algébrique fermé réduit de</u> X <u>de support</u> $X-U$. <u>Supposons le théorème vrai pour</u> $\overline{f}$, π <u>et la restriction</u> f_0 <u>de</u> f <u>à</u> Y . <u>Alors il est également vrai pour</u> f .

<u>Démonstration</u>

Soient $j : U \to X$ et $i : Y \to X$ les immersions canoniques. Soient F un faisceau constructible sur X et H le noyau de l'homomorphisme canonique $F \to i_* i^* F$. Puisque F est constructible, i^*F est constructible (2.1). Puisque i est une immersion fermée, $i_* i^* F$ est constructible (8.10). Par conséquent H est constructible (3.1).

De plus l'homomorphisme $F \to i_* i^* F$ est un épimorphisme et, si l'on note $j!$ l'extension par zéro en dehors de U , on a $H = j!j^*F$. D'où finalement une suite exacte de faisceaux constructibles sur X :

(1) $$0 \to H = j!j^*F \to F \to i_* i^* F \to 0 .$$

Compte tenu de la longue suite exacte de cohomologie correspondante pour les $R^q f_*$ et de (3.6), on voit qu'il suffit de vérifier la constructibilité des $R^q f_*$ pour les membres extrêmes. Puisque i est une immersion fermée, on a :

$$(R^q f_*)(i_* i^* F) \simeq (R^q f_{0*})(i^*F) ,$$

et ces faisceaux sont constructibles d'après l'hypothèse sur f_0 . Reste à vérifier la constructibilité des $R^q f_* H$.

Soient $\overline{Y} = Y \times_X \overline{X}$, $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ et $\overline{i} : \overline{Y} \to \overline{X}$, $\overline{j} : \overline{U} \to \overline{X}$ les immersions correspondantes :

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, "\wr"] & \overline{X} \arrow[d, "\pi"] & \overline{Y} \arrow[l, "\overline{i}"'] \arrow[d, "\pi_Y"] \\ U \arrow[r, "j"'] & X & Y \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

Le faisceau $\overline{F} = \pi^*F$ est constructible (2.1) et l'on montre comme ci-dessus que l'on a une suite exacte de faisceaux constructibles sur $\overline{X}$:

(2) $$0 \to \overline{K} = \overline{j}_! \, \overline{j}^* \, \overline{F} \to \overline{F} \to \overline{i}_* \overline{i}^* \, \overline{F} \to 0 \; .$$

D'après l'hypothèse sur π , le faisceau $\pi_* \overline{K}$ est constructible. Montrons qu'il est canoniquement isomorphe à H . Des suites exactes (1) et (2), on déduit un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & i_* i^* F \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \pi_* \overline{K} \arrow[r] & \pi_* \pi^* F \arrow[r] & \pi_* \overline{i}_* \overline{i}^* \pi^* F = i_* \pi_{Y*} \pi_Y^* \, i^* F \end{tikzcd}$$

et où les flèches verticales sont définies par les morphismes d'adjonction. Ce diagramme définit un homomorphisme canonique $H \to \pi_* \overline{K}$.

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit, puisque H et $\pi_* \overline{K}$ sont constructibles, de montrer que les fibres géométriques des espaces étalés correspondants sont isomorphes. Soient $\overline{y}$ un point géométrique de Y et $\pi_{\overline{y}} : \overline{X}_{\overline{y}} \to \overline{y}$ la fibre de $\overline{X}$ au-dessus de $\overline{y}$. D'après la définition de H et $\overline{K}$, on a $H_{\overline{y}} = 0$ et $\overline{K}|_{\overline{X}_{\overline{y}}} = 0$. D'après l'hypothèse sur π , la formation des images directes par π commute au changement de base, d'où :

$$(\pi_* \overline{K})_{\overline{y}} = \pi_{\overline{y}*}(\overline{K}|_{X_{\overline{y}}}) = 0 \ .$$

De plus, puisque π est un isomorphisme au-dessus de $X-Y = U$, on a $H|_U \simeq \pi_*\overline{K}|_U$, ce qui achève de montrer que l'homomorphisme canonique $H \to \pi_*\overline{K}$ est un isomorphisme.

De même les faisceaux $R^q\pi_*\overline{K}$ sont constructibles et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y on a

$$(R^q\pi_*\overline{K})_{\overline{y}} = (R^q\pi_{\overline{y}*})(\overline{K}|_{X_{\overline{y}}}) = 0 \ .$$

Puisque π est un isomorphisme au-dessus de $X-Y$, il en résulte $R^q\pi_*\overline{K} = 0$, pour $q > 0$.

De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = R^p f_*(R^q \ \pi_*\overline{K}) \Longrightarrow R^{p+q} \ \overline{f}_*\overline{K} \quad ,$$

on déduit donc des isomorphismes

$$R^p f_* H \simeq R^p f_*(\pi_*\overline{K}) \simeq R^p \overline{f}_*\overline{K} \quad ,$$

pour $p \geq 0$. D'après l'hypothèse sur $\overline{f}$, ces faisceaux sont constructibles ; d'où le lemme.

(13.3)

Réduction à f projectif

Soit $f : X \to S$ propre. Par récurrence noethérienne sur X , on peut supposer $X \neq \emptyset$ et le théorème vrai pour tout sous-espace algébrique fermé de X dont l'espace topologique sous-jacent est distinct de X . D'après le lemme de Chow [EGA, III.5.6], étendu par Knutson [K, IV.3] aux espaces algébriques, il existe des morphismes projectifs $\pi : \overline{X} \to X$ et $\overline{f} : \overline{X} \to S$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

et un ouvert dense U de X au-dessus duquel π est un isomorphisme.

Par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour la restriction de f à $X-U$. D'après le lemme 2, s'il est vrai pour $\overline{f}$ et π, il est vrai pour f. On peut donc supposer f projectif.

(13.4)

<u>Réduction à</u> $X = \mathbb{P}_S^n$

Soit $f : X \to S$ projectif et de dimension relative $\leq n$. Alors on peut trouver localement sur S, un morphisme fini $\pi : X \to \mathbb{P}_S^n$. D'après le lemme 1, puisque le théorème est vrai pour un morphisme fini (8.10), il suffit de le démontrer pour le morphisme canonique $\mathbb{P}_S^n \to S$.

(13.5)

<u>Réduction définitive</u>

On procède par récurrence sur la dimension relative de f. D'après ce qui précède, on peut supposer $X = \mathbb{P}_S^n$, $n \geq 2$. Considérons la projection $\phi : \mathbb{P}_S^n \to \mathbb{P}_S^1$ qui envoie le point de coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sur (x_0, x_1). C'est une application rationnelle définie en dehors du fermé Y de $\mathbb{P}_S^n$ d'équations homogènes $x_0 = x_1 = 0$, fermé S-isomorphe à $\mathbb{P}_S^{n-2}$.

Soit $\pi : P \to \mathbb{P}^n_S$ l'éclatement de $\mathbb{P}^n_S$ à centre Y . Il existe alors un morphisme $u : P \to \mathbb{P}^1_S$, unique à isomorphisme près, qui prolonge l'application rationnelle ϕ . De plus u est de dimension relative $n-1$.

En notant $v : \mathbb{P}^1_S \to S$ et $f' : P \to S$ les morphismes canoniques, on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "f'"] & \\ \mathbb{P}^n_S \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^1_S \arrow[dl, "v"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Le théorème est vrai pour v qui est de dimension relative 1 . Par hypothèse de récurrence, il est vrai pour u qui est de dimension relative $n-1$. D'après le lemme 1, il est donc vrai pour f' .

Le morphisme π est de dimension relative ≤ 1 , il vérifie donc le théorème. De plus, c'est un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{P}^n_S - Y$ et la restriction de f à $Y \simeq \mathbb{P}^{n-2}_S$ vérifie le théorème par hypothèse de récurrence. D'après le lemme 2, le théorème est donc vrai pour f .

Ainsi s'achève la démonstration du théorème de finitude (6.6).

BIBLIOGRAPHIE

Chapitres I à VI

[A.A] ARTIN, M., Algebraic approximation of Structures over complete local rings. Publ. Math. IHES No 36 (1969), 25-28.

[AE] ARTIN, M., On the Solutions of Analytic Equations, Inventiones math. 5, 277-291 (1968).

[AFM] I ARTIN, M., Algebrization of formal moduli I in a Collection of Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira. University of Tokyo Press (1970), 21-71.

[AFM] II ARTIN, M., Algebrization of formal moduli II. Annals of Math. vol. 91, No 1, January 1970, 88-135.

[AL] SERRE, J.P., Algèbre locale. Multiplicités, Springer Lecture Notes No 11, 1965.

[AS] KNUTSON, D., Algebriac spaces. Springer Lecture Notes No 203, 1971.

[AV] MUMFORD, D., Abelian varieties. Tata Institute-Oxford, Bombay 1970.

[EGA] DIEUDONNE, J. & GROTHENDIECK, A., Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. IHES, No 4,8,11,... et Chapitre I (nouvelle édition) Springer 1971.

[G] GODEMENT, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris, 1958.

[GT] ARTIN, M., Grothendieck Topologies, Harvard University, 1962 (notes miméographiées).

[Hi] HIRONAKA, H., An example of a non-kählerian complex analytic deformations. Ann. Math. 75 (1962) 190-208.

[IFT] ARTIN, M., The implicit function theorem in Algebraic Geometry. Proc. of the Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 13-34.

[L.R.] NAGATA, M., Local rings. Interscience Publ. Math., New York, 1962.

[M] MUMFORD, D., The topology of normal singularisaties of an algebraic surface. Publ. IHES No 9, 1961.

[Re] HIRONAKA, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math. v. 79 (1964), 109-326.

[R] ABHYANKAR, S., Ramification theoretic methods in Algebraic Geometry. Princeton Univ. Press (1959).

[SGA 1] GROTHENDIECK, A., Séminaire de géométrie algébrique, 1960-61.

[SGAD] GROTHENDIECK, A. & DEMAZURE, M., Schémas en groupes.

[SGA 4] ARTIN, M., GROTHENDIECK, A. & VERDIER, J.L., Séminaire de géométrie algébrique, 1963-64.

[T] GROTHENDIECK, A., Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. Journal, vol. IX (1957), 119-221.

MOISEZON, B.G., On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions. Izv. Ak. Nauk. SSSR Ser. Mat. 30 (1966) 133-174, 345-386, 621-656. English translation Amer. Math. Soc. Transl. (2) 63 (1967), 51-177.

Chapitre VII

[GT] M. ARTIN, Grothendieck topologies, Harvard University, 1962 (notes miméographiées).

[A] M. ARTIN, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Pub.Math. I.H.E.S. No 36 (1969), 25-58.

[AFM] M. ARTIN, Algebraization of formal moduli : I, in A Collection of Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press (1970), 21-71.

[SGA 4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.L. VERDIER, Séminaire de géométrie algébrique 1963-64, Cohomologie étale des schémas (notes miméographiées I.H.E.S.).

[EGA] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, Eléments de géométrie algébrique, Pub. Math. I.H.E.S. No 4, 8, 11,... et Chapitre I (nouvelle édition), Springer, 1971.

[G] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[T] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Jour., vol. IX (1957), 119-221.

[SGA 1] A. GROTHENDIECK, Séminaire de géométrie algébrique, 1960-61, Revêtements étales et groupe fondamental (notes miméographiées I.H.E.S.).

[K] D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes No 203, Springer, 1971.

[AV] D. MUMFORD, Abelian varieties, Tata Institute, Oxford, Bombay, 1970.

INDEX TERMINOLOGIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES - UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PUBLICATIONS DU SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1. LIONS, Jacques L., Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 176 p.

2. WAELBROECK, Lucien, Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 148 p.

3. MARANDA, Jean-Marie, Introduction à l'algèbre homologique, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 52 p.

4. KAHANE, Jean-Pierre, Séries de Fourier aléatoires, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p.

5. PISOT, Charles, Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p.

6. DAIGNEAULT, Aubert, Théorie des modèles en logique mathématique, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 138 p.

7. JOFFE, Anatole, Promenades aléatoires et mouvement brownien, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, viii et 144 p.

8. DIEUDONNÉ, Jean, Fondements de la géométrie algébrique moderne, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, x et 154 p.

9. RIBENBOIM, Paulo, Théorie des valuations, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, 317 p.

10. HILTON, Peter, Catégories non abéliennes, (3 session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 151 p.

11. ECKMANN, Beno, Homotopie et cohomologie, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1965, 134 p.

12. FOX, Geoffrey, Intégration dans les groupes topologiques, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 360 p.

13. AGMON, Shmuel, Unicité et convexité dans les problèmes différentiels, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 158 p.

14. BRELOT, Marcel, Asiomatique des fonctions harmoniques, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1969, 148 p.

15. BROWDER, Felix E., Problèmes non linéaires, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 156 p., $3.00.

16. STAMPACCHIA, Guido, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 330 p.

17. BARROS-NETO, José, Problèmes aux limites non homogènes, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 87 p.

18. ZAIDMAN, Samuel, Equations différentielles abstraites, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 81 p.

19. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, Equations aux dérivées partielles, textes de : Robert CARROLL, George DUFF, Jöran FRIGERG, Jules GOBERT, Pierre GRISVARD, Jindřich NEČAS et Robert SEELEY, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 144 p.

20. FRAÏSSÉ, Roland, L'algèbre logique et ses rapports avec la théorie des relations, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 81 p.

21. HENKIN, Leon, Logical Systems Containing Only a Finite Number of Symbols, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 50 p.

22. Non disponible.

23. Non disponible.

24. LEBLANC, Léon, Représentabilité et définissabilité dans les algèbres transformationnelles et dans les algèbres polyadiques, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 126 p.

25. MOSTOWSKI, Andrzej, Modèles transitifs de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 174 p.

26. FUCHS, Wolfgang H. J., Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable complexe, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 138 p.

27. HAYMAN, Walter K., Les fonctions multivalentes, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 56 p.

28. LELONG, Pierre, Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables), (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 304 p.

29. RAHMAN, Qazi Ibadur, Applications of Functional Analysis to Extremal Problems for Polynomials, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 69 p.

30. ROSSI, Hugo, Topics in Complex Manifolds, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 85 p.

31. HUBER, Peter J., Théorie de l'inférence statistique robuste, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 148 p.

32. KAC, Mark, Aspects probabilistes de la théorie du potentiel, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1970, 154 p.

33. LECAM, Lucien M., Théorie asymptotique de la décision statistique, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 146 p., $2.75.

34. NEVEU, Jacques, Processus aléatoires gaussiens, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 230 p.

35. VAN EEDEN, Constance, Nonparametric Estimation, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 48 p.

36. KAROUBI, Max, K-théorie, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 182 p.

37. KOHN, Joseph J., Differential Complexes, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1972, 90 p.

38. KUIPER, Nicolas H., Variétés hilbertiennes : aspects géométriques, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 154 p.

39. KURANISHI, Masatake, Deformations of Compact Complex Manifolds, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 100 p.

40. NARASIMHAN, Raghavan, Grauert's Theorem on Direct Images of Coherent Sheaves, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971 79 p.

41. SPENCER, Donald D., Systèmes d'équations différentielles partielles linéaires et déformations des structures de pseudo-groupes, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Unversité de Montréal, à paraître.

42. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, Analyse globale, textes de : P. LIBERMANN, K. D. ELWORTHY, N. MOULIS, K. K. MUKHERJEA, N. PRAKASH, G. LUSZTIG, et W. SHIH, (8e session été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 216 p.

43. ABHYANKAR, Shreeram S., Algebraic Space Curves, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 116 p.

44. ARTIN, Michael, Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, 1973, 284 p.

45. GROTHENDIECK, Alexandre, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

46. NAGATA, Masayoshi, On Flat Extensions of a Ring, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 53 p.

47. MIYANISHI, Masayoshi, Introduction à la théorie des sites et son application à la construction des préschémas quotients, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 100 p.

48. TAKAHASHI, Shuichi, Méthodes logiques dans la géométrie diophantienne, (9e session, été 1970), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

49. ROTA, Gian-Carlo, La Géométrie combinatoire, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

50. SCHUTZENBERGER, Marcel, et al., Problèmes de tri et tableaux de Young, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

51. BERGE, Claude, Introduction à la théorie des hypergraphes, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, 1973, 116 p.

52. DE BRUIJN, Nicolaas G., Automath, a Language for Mathematics, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, 1973, 63 p.

53. SABIDUSSI, Gert, Automorphismes des graphes, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

54. FOATA, Dominique, Principes généraux d'énumération, (10e session, été 1971), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

janvier 1973