Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences – École de Mathématique
Institut de Recherche en Mathématique et Physique
Centre de recherche en Géométrie, Physique et Probabilité

Invitation à la quantification géométrique : de Kirillov à Kostant et Souriau

par
Alban Jago

Mémoire rédigé en vue de
l'obtention d'un diplôme de
Master 60 en Sciences Mathématiques

Promoteur : Professeur Pierre Bieliavsky
Comité de lecture : Professeurs Jan Govaerts et Luc Haine

Année académique 2011-2012

Remerciements

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Pierre Bieliavsky pour m'avoir ouvert la porte de son domaine et de son équipe, à l'intersection des mathématiques et de la physique. L'enthousiasme érudit avec lequel il m'y a accompagné m'a été précieux.
J'aimerais également remercier Jan Govaerts et Luc Haine d'avoir accepté d'accorder de leur temps à la lecture de ce travail.
Enfin, mes pensées ne pourraient oublier d'aller vers tout mon entourage qui, au travers de ses attentions et de son soutien, a fait partie intégrante de l'élaboration de cette recherche.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{N}^*$	:	ensemble des nombres naturels non nuls ;
- $\mathcal{C}^\infty(M)$	:	applications lisses sur une variété M à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^\infty(M, N)$	:	applications lisses sur une variété M à valeurs dans la variété N ;
- $\mathcal{C}^\infty(M, N)^G$	:	applications lisses sur une variété M à valeurs dans la variété N $G-$équivariantes ;
- $\Gamma^\infty(E)$	:	sections lisses du fibré E ;
- TM	:	fibré tangent de la variété M ;
- T^*M	:	fibré cotangent de la variété M ;
- $\Omega^q(M)$	:	ensemble des $q-$formes sur la variété M ;
- $H^q(M, G)$	:	$q-$ème groupe de cohomologie de la variété M à coefficients dans G ;
- $H^q_{DR}(M)$	:	$q-$ème groupe de cohomologie de de Rham de la variété M ;
- $V_P(M)$	:	champs de vecteurs sur M appartenant à la polarisation P ;
- $\{\cdot, \cdot\}$	:	crochet de Poisson ;
- $[\cdot, \cdot]$	:	crochet de Lie ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	produit scalaire ;
- $\langle X, \cdot \rangle$	:	évaluation d'une forme linéaire X ;
- $d\alpha$	:	différentielle extérieure de la forme α ;
- $f^*\alpha$	:	pull-back de la forme α par l'application f ;
- $f_*\alpha$	:	différentielle de l'application f ;
- $\Xi \cdot f$	:	dérivation de f le long du champ de vecteurs Ξ ;
- $\Xi \lrcorner \alpha$	:	produit intérieur de la forme α par le champ de vecteurs Ξ ;
- Ξ_x	:	évaluation au point x du champ de vecteurs Ξ ;
- exp	:	application exponentielle ;
- $\mathrm{Ad}_\cdot$	:	action adjointe d'un groupe de Lie ;
- $\mathrm{Ad}^\flat_\cdot$	:	action coadjointe d'un groupe de Lie ;
- X^*	:	champ de vecteurs fondamental associé au vecteur X d'une algèbre de Lie ;
- Ξ_f	:	champ de vecteurs hamiltonien associé à une application f ;
- $\nabla_\Xi(s)$	:	évaluation de la connexion sur un fibré vectoriel ;
- $V \oplus W$	:	somme directe des deux sous-espaces vectoriels V et W.

Introduction

De longue date, les liens qu'ont tissés entre elles les mathématiques et la physique ont été profonds et fertiles. Aujourd'hui encore, il est de nombreux exemples où des préoccupations provenant de la physique poussent certains champs des mathématiques à se développer et à devenir des domaines actifs de recherche. C'est le cas, par exemple, de la quantification géométrique, qui sera le point de départ de ce travail. Le programme de la quantification géométrique est né du besoin en physique, de passer de la description classique d'un système, à sa représentation quantique. On sait, en effet, que les propriétés de la physique à des échelles suffisamment petites diffèrent de celles de notre monde quotidien. Ainsi, le principe d'incertitude de Heisenberg stipule que la position et l'impulsion d'une particule ne peuvent être déterminées simultanément avec une erreur arbitrairement petite :

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ceci nécessite de ne plus considérer les observables comme des fonctions lisses sur l'espace des phases, mais bien comme des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert dont les éléments correspondent aux états quantiques du système.

La quantification géométrique, telle qu'initiée par Kostant [9] et Souriau [1], a pour objectif de décrire une règle de quantification rigoureuse. Elle prend comme point de départ une variété symplectique – une variété munie d'une $2-$forme fermée et non-dégénérée – et y associe une représentation sur un espace de Hilbert de l'algèbre des fonctions lisses sur la variété. La procédure commence par la construction d'une préquantification de la variété symplectique. Cependant, l'espace de Hilbert ainsi produit est trop grand pour reproduire les résultats habituels de la mécanique quantique, et il est nécessaire d'introduire une condition de polarisation. L'espace sous-tendant la représentation sera alors construit à partir d'un ensemble d'applications satisfaisant à une équation différentielle, appelé espace de Planck. Bien que relativement générale, cette construction est particulièrement intéressante lorsqu'on considère les symétries de la variété symplectique, données par l'action d'un groupe de Lie préservant la forme symplectique. Dans ce cas, sous certaines conditions, on peut voir la variété symplectique comme un recouvrement d'une orbite coadjointe de ce groupe de Lie – qui est, de manière générale, toujours une variété symplectique.

Par ailleurs, la méthode des orbites de Kirillov [10] permet de construire, à partir d'une orbite coadjointe, une représentation unitaire du groupe de Lie. L'objectif de ce travail est de montrer qu'il existe une bijection linéaire entre l'espace sous-tendant cette représentation et l'espace de Planck produit par la quantification à la Kostant-Souriau de l'orbite coadjointe. La méthode de Kirillov étant purement algébrique, cela permet de construire algébriquement des solutions des équations différentielles correspondant à la condition de polarisation. Nous appliquerons ensuite cette correspondance au cas des orbites coadjointes massives du groupe de Poincaré en dimension $1 + 1$. Ces orbites correspondent au système physique d'une particule relativiste libre massive et sans spin. Nous étudierons comment l'équation de Klein-Gordon peut s'interpréter dans le contexte de la quantification des orbites coadjointe, et comment la correspondance

Kirillov-Kostant-Souriau permet d'en produire des solutions.

Synopsis

Le premier chapitre de ce travail sera destiné à introduire les notions et les conventions de géométrie différentielle nécessaires pour notre propos. En particulier, la géométrie symplectique y sera brièvement présentée, ainsi que les fibrés principaux et vectoriels. Nous approfondirons également le cas d'un fibré en droites complexes, lequel sera crucial en quantification géométrique. Le deuxième chapitre s'attellera à poser les bases de la quantification géométrique indispensables pour la suite, et à relier l'approche de Kostant à celle de Souriau, que nous adopterons par la suite. Dans le chapitre 3, nous commencerons par décrire la méthode des orbites de Kirillov. Nous montrerons ensuite l'équivalence annoncée entre l'approche de Kostant-Souriau et celle de Kirillov. Le dernier chapitre visera à appliquer la construction du chapitre 3 au cas particulier du groupe de Poincaré en dimension $1 + 1$. Après quelques généralités sur ce groupe et sur ces orbites coadjointes, nous procéderons à la quantification de ces dernières selon l'approche de Kostant-Souriau. Nous appliquerons ensuite la méthode des orbites de Kirillov, et décrirons la bijection relier les deux approches. Finalement, nous interpréterons ces résultats en termes physiques, avec l'intention de comprendre comment l'équation de Klein-Gordon apparaît dans ce contexte.

Chapitre 1

Géométrie différentielle

Ce chapitre est destiné à introduire les définitions, conventions et théorèmes de géométrie différentielle nécessaires pour la suite. Après quelques notions sur les distributions, nous donnerons quelques résultats sur les groupes de Lie et leurs actions sur une variété. Dans la section suivante, nous introduisons brièvement la géométrie symplectique, ainsi que les orbites coadjointes vues en tant que variétés symplectiques, concept qui sera central dans les chapitres 3 et 4. Finalement, nous terminerons par présenter quelques généralités sur les fibrés, et étudierons plus particulièrement les fibrés en droites complexes hermitiens munis d'une connexion compatible. Les principales références qui ont servi de support à la rédaction de ce chapitre sont [1], [2], [3] et [4].

1.1 Distributions

Dans ce travail, nous entendrons par variété une variété différentielle et Hausdorff.

Définition 1.1.1. Soit M une variété. Une *distribution* P de dimension r sur M est une règle qui fait correspondre à tout point $x \in M$ un sous-espace vectoriel P_x de dimension r de l'espace tangent T_xM. Une distribution est *lisse* si, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et r champs de vecteurs lisses qui engendrent P_y pour tout $y \in U$. On dit qu'un champ de vecteurs $\Xi \in \Gamma^\infty(M)$ appartient à P si pour $x \in M$, $\Xi_x \in P_x$. On note $V_P(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M qui appartiennent à P. Finalement, P est dite *involutive* si pour tout $\Xi, \Upsilon \in V_P(M)$, $[\Xi, \Upsilon] \in V_P(M)$.

Définition 1.1.2. Une *variété intégrale* d'une distribution lisse P de dimension r sur une variété M est une paire (N, f), où N est une sous-variété de M et $f : N \to M$ une immersion injective, telle que, pour tout $y \in N$:

$$f_{*_y}(T_yN) \quad = \quad P_{f(y)}.$$

Une variété intégrale est dite *maximale* s'il n'existe pas d'autre variété intégrale qui la contienne.

Théorème 1.1.3 (Fröbenius)**.** *Soit P une distribution lisse et involutive de dimension r sur une variété M. Alors par tout $x \in M$, il passe une unique variété intégrale maximale $N(x)$ de P. De plus, toute variété intégrale par x est une sous-variété ouverte de $N(x)$.*

1.2 Actions d'un groupe de Lie

Définition 1.2.1. Une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est dite *transitive* si elle n'a qu'une seule orbite. Elle est dite *libre* si pour tout $x \in M$ et $g \in G$, $g \cdot x = x$ implique que g est le neutre de G.

Définition 1.2.2. Soit M une variété et G un groupe de Lie agissant transitivement sur M. On appelle M un *espace $G-$homogène.*

Définition 1.2.3. Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Il existe une action à gauche de G sur $\mathfrak{g}$, appelée *action adjointe* donnée par :

$$\mathrm{Ad} \;:\; G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \;;\; (g, X) \mapsto \mathrm{Ad}_g(X) := \frac{d}{dt}\Big|_0 g \exp(tX) g^{-1}.$$

On a la formule, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) \quad = \quad [X, Y].$$

Définition 1.2.4. Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Il existe une action à gauche de G sur $\mathfrak{g}^*$, appelée *action coadjointe* donnée par :

$$\mathrm{Ad}^\flat \;:\; G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \;;\; (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi) := \Big[\mathfrak{g} \to \mathbb{R} \;;\; X \mapsto \Big\langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \Big\rangle\Big].$$

Soit $M \times G \to M$; $(x, g) \mapsto x \cdot g$ une action à droite d'un groupe de Lie G sur une variété P, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

Définition 1.2.5. Soit G un groupe de Lie agissant à droite sur une variété M, l'action étant notée $M \times G \to M$; $(x, g) \mapsto x \cdot g$. Le *champ de vecteurs fondamental* associé à $X \in \mathfrak{g}$ pour l'action à droite de G sur M est le champ de vecteur lisse X^* sur M défini, pour $x \in M$, par :

$$X^*_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(x \cdot \exp(tX)\Big). \tag{1.1}$$

Dans le cas d'une action à gauche, notée $G \times M \to M$; $(g, x) \mapsto g \cdot x$, le *champ de vecteurs fondamental* est définit, pour $x \in M$, par [1] :

$$X^*_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(\exp(-tX) \cdot x\Big). \tag{1.2}$$

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.6. *Soient G un groupe de Lie agissant (à gauche ou à droite) sur une variété M et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. L'application qui associe à chaque élément de l'algèbre de Lie le champ de vecteurs fondamental correspondant sur M :*

$$\mathfrak{g} \to \Gamma^\infty(TM) \;;\; X \mapsto X^*$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Si l'action est transitive – c'est-à-dire si M est un espace $G-$homogène –, cet homomorphisme est surjectif.

Définition 1.2.7. Soient M et N deux variétés, G un groupe de Lie agissant à droite sur M et sur N :

$$\begin{aligned} M \times G \to M \quad &; \quad (x, g) \mapsto x \cdot g, \\ N \times G \to N \quad &; \quad (y, g) \mapsto y \cdot g. \end{aligned}$$

Une application $f \;:\; M \to N$ est dite *$G-$équivariante* si pour tout $x \in M$, $g \in G$:

$$f(x \cdot g) \quad = \quad f(x) \cdot g.$$

1. Le signe qui diffère dans les définitions (1.1) et (1.2) est nécessaire pour que la proposition 1.2.6 soit valable dans les deux cas.

Dans le cas où G agit à gauche sur N, l'action étant notée $(g, y) \mapsto g \cdot y$, la condition d'équivariance devient :

$$f(x \cdot g) \quad = \quad g^{-1} \cdot f(x).$$

Finalement, si G agit à gauche sur M et sur N, les actions étant notées :

$$G \times M \to M \quad ; \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$
$$G \times N \to N \quad ; \quad (g, y) \mapsto g \cdot y,$$

la condition d'équivariance devient :

$$f(g \cdot x) \quad = \quad g \cdot f(x).$$

Théorème 1.2.8. *Soient G un groupe de Lie et K un sous-groupe de G fermé dans G. Alors, il existe une unique structure de variété sur le sous-groupe K qui le munit d'une structure de groupe de Lie telle que l'injection canonique $K \hookrightarrow G$ soit un homomorphisme de groupes de Lie.*

Théorème 1.2.9. *Soit K un sous-groupe de Lie fermé d'un groupe de Lie connexe G. Il existe une unique structure de variété de dimension $\dim(G) - \dim(H)$ sur $G/K := \{gK\}_{g \in G}$ telle que :*

(i) la projection canonique $\pi : G \to G/K$; $g \mapsto gK$ soit lisse ;

(ii) pour tout $gK \in G/K$, il existe un voisinage ouvert U de gK dans G/K et une application lisse $s : U \to G$ telle que $(\pi \circ s)(g'K) = g'K$ pour tout $g'K \in G/K$.

En outre, l'action naturelle de G sur G/K est lisse et transitive, et l'espace G/H est $G-$homogène.

Théorème 1.2.10. *Soient M une variété $G-$homogène et $x \in M$. Désignons le stabilisateur de x par*

$$K =: G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Alors K est fermé et l'application bien définie

$$G/H \to M \; ; \; gH \mapsto g \cdot x$$

est un difféomorphisme $G-$équivariant d'espaces $G-$homogènes.

Proposition 1.2.11. *Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $U \subset G$ un voisinage du neutre de G. Alors, G est généré par U, c'est-à-dire que, pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\{g_i\}_{i=1,\ldots,n} \subset U$ tels que*

$$g \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} g_i.$$

Proposition 1.2.12. *Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage ouvert $U \subset G$ du neutre de G tel que*

$$\exp|_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to U$$

est un difféomorphisme.

Théorème 1.2.13 (Baker-Campbell-Hausdorff)**.** *Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{g}$ un voisinage ouvert de 0 tel que, $\exp|_{\mathfrak{U}}$ soit un difféomorphisme sur son image $U := \exp(\mathfrak{U})$. Alors, pour tout $X, Y \in \mathfrak{U}$, il existe $Z \in \mathfrak{g}$ tel que*

$$\exp(Z) \quad = \quad \exp(X)\exp(Y).$$

1.3 Géométrie symplectique

La géométrie symplectique est un domaine central en physique mathématique. En effet, ce formalisme est bien adapté pour exprimer la mécanique hamiltonienne, et il sert de point de départ à la Quantification Géométrique telle que nous la verrons dans le chapitre suivant. Cette section est évidemment très loin d'être complète, mais n'a pour objectif que d'introduire les notions nécessaires dans les chapitres suivants.

Définition 1.3.1. Une *variété symplectique* est une paire (M, ω), où M est une variété, et ω une $2-$forme fermée et non-dégénérée, c'est-à-dire que $d\omega = 0$ et, pour tout $x \in M$, $X \in T_xM$:

$$\omega_x(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_xM \quad \Rightarrow \quad X = 0.$$

La $2-$forme ω est appelée *forme symplectique* ou *structure symplectique* de M. Le caractère non-dégénéré de ω implique qu'une variété symplectique est toujours de dimension paire.

Pour une variété symplectique (M, ω), puisque la forme ω est non-dégénérée, elle permet de construire, pour tout $x \in M$, un isomorphisme linéaire entre T_xM et T_x^*M :

$$T_xM \to T_x^*M \; ; \; X \mapsto \omega(X, \cdot).$$

Ceci permet de définir la notion suivante :

Définition 1.3.2. Soient (M, ω) une variété symplectique et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Le *champ de vecteurs hamiltonien* de f est l'unique champ de vecteurs Ξ_f sur M tel que, pour tout $x \in M$:

$$\omega_x(\Xi_x, \cdot) \quad = \quad -df.$$

Notons qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est toujours constante le long des courbes intégrales de son champ de vecteurs hamiltonien.

Définition 1.3.3. Le *crochet de Poisson* sur une variété symplectique (M, ω) est l'application définie par :

$$\{\cdot, \cdot\} \; : \; \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) \; ; \; (f, g) \mapsto \{f, g\} := \Xi_f \cdot g.$$

C'est une application bilinéaire, antisymétrique et satisfaisant l'identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \quad = \quad 0.$$

Ceci fait de $\mathcal{C}^\infty(M)$ une algèbre de Lie et l'application

$$\mathcal{C}^\infty(M) \to \Gamma^\infty(M) \; ; \; f \mapsto \Xi_f$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Notons au passage la formule $\{f, g\} = \omega(\Xi_f, \Xi_g)$ pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dans la suite, nous serons intéressés par les transformations d'une variété qui respectent sa structure symplectique, en particulier celles induites par l'action d'un groupe de Lie. Il s'agit du pendant symplectique de la notion de symétrie en physique.

Définition 1.3.4. Une *transformation canonique*, aussi appelée *symplectomorphisme*, d'une variété symplectique (M, ω) est un difféomorphisme $\Phi : M \to M$ qui préserve ω, c'est-à-dire tel que

$$\Phi^*\omega \quad = \quad \omega.$$

Si G est un groupe de Lie agissant sur M, l'action $\tau : G \times M \to M; (g, x) \mapsto \tau_g(x)$ est dite *symplectique* si, pour tout $g \in G$, $\tau_g(\cdot)$ est un symplectomorphisme. Dans ce cas, on appelle G un *groupe dynamique* de (M, ω).

L'exemple suivant sera central dans la suite de ce travail. Nous donnons ici les étapes de sa construction mais sans les détailler (voir par exemple [5]).

Exemple 1.3.5 (*Orbite coadjointe*)**.** Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$. Nous avons vu que G agit sur $\mathfrak{g}^*$ via l'action coadjointe. Considérons l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ de ξ_0 dans $\mathfrak{g}^*$:

$$\mathcal{O} \quad := \quad \left\{ \mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0) \mid g \in G \right\}$$

et le stabilisateur K de ξ_0 :

$$K \quad := \quad \left\{ k \in G \mid \mathrm{Ad}_k^\flat(\xi_0) = \xi_0 \right\}.$$

K est fermé dans G et G/K est donc une variété (théorème 1.2.9). On a la bijection bien définie suivante

$$\Phi \ : \ G/K \to \mathcal{O} \ ; \ gK \mapsto \mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0)$$

et on définit une structure de variété sur $\mathcal{O}$ de façon à ce que Φ soit un difféomorphisme. $\mathcal{O}$ est alors un espace $G-$homogène, et on définit une $2-$forme $\omega^{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$ en termes des champs de vecteurs fondamentaux :

$$\omega^{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0)} \left(X^*_{\mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0)}, Y^*_{\mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0)} \right) \quad := \quad -\left\langle \mathrm{Ad}_g^\flat(\xi_0), [X,Y] \right\rangle.$$

On peut vérifier que cette forme est bien définie, et qu'elle est symplectique sur $\mathcal{O}$. De plus, G agit sur $\mathcal{O}$ par symplectomorphismes et constitue donc un groupe dynamique de $\mathcal{O}$. On appelle $\omega^{\mathcal{O}}$ la forme de Kirillov-Kostant-Souriau (ou forme de KKS).

Définition 1.3.6. Une sous-variété N d'une variété symplectique (M, ω) est dite *isotrope* si ω s'annule sur l'espace tangent à N, c'est-à-dire si pour tout $y \in N$, $X, Y \in T_yN$:

$$\omega_y(X,Y) \quad = \quad 0.$$

N est dite *lagrangienne* si $\dim(N) = \frac{1}{2}\dim(M)$. De la même manière, pour $x \in M$, un sous-espace vectoriel V de T_xM est dit *isotrope* si ω_x s'annule sur V, et *lagrangien* s'iol est isotrope et si $\dim(V) = \frac{1}{2}\dim(M)$.

Définition 1.3.7. Une *variété présymplectique* est une paire (M, ω), où M est une variété et ω une $2-$forme sur M fermée et telle que

$$\ker(\omega_x) \quad := \quad \{X \in T_xM \mid \omega_x(X,Y) = 0, \ \ \forall Y \in T_xM\} \qquad (x \in M)$$

a une dimension constante sur M. On a alors la distribution lisse P sur M définie pour $x \in M$ par :

$$P_x \quad := \quad \ker(\omega_x)$$

appelée *feuilletage caractéristique* de ω.

1.4 Théorie des fibrés

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1. Un *fibré* est la donnée d'un tuple (P, M, π, F), où P, M et F sont des variétés appelées respectivement *espace total*, *base* et *fibre typique* et $\pi : E \to M$ est une surjection lisse, tel que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ de x et un difféomorphisme

$$\phi \ : \ U \times F \to \pi^{-1}(U),$$

appelé *trivialisation locale*, tel que $(\pi \circ \phi)(y, f) = y$ pour tout $(y, f) \in U \times F$.

Définition 1.4.2. Soit (P, M, π, F) un fibré. Une *section* (globale) lisse de ce fibré est une application lisse $s : M \to P$ telle que, pour tout $x \in M$, $(\pi \circ s)(x) = x$. L'ensemble des sections lisses de P est noté $\Gamma^\infty(P)$.

Nous utiliserons principalement deux types particuliers de fibrés : les fibrés principaux et les fibrés vectoriel. Les premiers sont des fibrés dont la fibre est un groupe de Lie qui agit à droite et librement sur l'espace total en respectant les fibres, et agit transitivement sur celles-ci.

Définition 1.4.3. Soient M une variété et G un groupe de Lie. Un *fibré principal* au-dessus de M de groupe G – ou *fibré $G-$principal* – consiste en une variété P, une application surjective lisse appelée *projection*

$$\pi \ : \ P \to M \ ; \ \xi \mapsto \pi(\xi)$$

et une action à droite libre de G sur P

$$P \times G \ ; \ (\xi, g) \mapsto \xi \cdot g$$

telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) pour tout $x \in M$ et $\xi \in \pi^{-1}(x)$, $\pi^{-1}(x) = \{\xi \cdot g \mid g \in G\}$ (cet ensemble est appelé *fibre* de P au-dessus de x et est noté P_x) ;

(ii) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ de x et un difféomorphisme

$$\phi \ : \ U \times G \to \pi^{-1}(U),$$

appelé *trivialisation locale*, tel que pour tout $(y, g) \in U \times G$, $(\pi \circ \phi)(y, g) = y$ et $\phi(y, gg') = \phi(y, g) \cdot g'$ pour tout $g' \in G$.

On notera un fibré principal par $\pi : P \xrightarrow{G} M$, $\pi : P \to M$ ou simplement P.

Exemple 1.4.4. Soient M une variété et G un groupe de Lie. Muni de la projection naturelle $\pi : M \times G \to M$, $M \times G$ est un fibré $G-$principal appelé *fibré trivial.*

Définition 1.4.5. Soient $\pi : P \xrightarrow{G} M$ et $\pi' : P' \xrightarrow{G'} M'$ deux fibrés principaux. Un *morphisme* de fibrés principaux entre P et P' consiste en une application lisse $f : P \to P'$ et un homomorphisme $f_G : G \to G'$ tels que, pour tout $\xi \in P$ et $g \in G$:

$$f(\xi \cdot g) \quad = \quad f(\xi) \cdot f_G(g).$$

En particulier, l'image par f d'une fibre de P est contenue dans une unique fibre de P', et f définit ainsi une application lisse $f_M : M \to M'$ telle que $\pi' \circ f = f_M \circ \pi$. On dit que f est un *isomorphisme* de fibrés principaux si, en outre, f et f_M sont des difféomorphismes et f_G est un isomorphisme.

Définition 1.4.6. Un fibré $G-$principal $\pi : P \to M$ est *trivial* s'il existe un isomorphisme de fibrés principaux entre P et le fibré trivial $M \times G$. Notons que tout fibré principal au-dessus de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est trivial.

Le second type particulier de fibré que nous utiliserons ici correspond au cas où la fibre est un espace vectoriel réel ou complexe.

Définition 1.4.7. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, V un espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension r et M une variété. Un *fibré vectoriel* réel (respectivement complexe) de rang r et de fibre typique V au-dessus de M consiste en une variété L et une application surjective lisse appelée *projection*

$$p \ : \ L \to M \ ; \ \xi \mapsto p(\xi)$$

telles que :

(i) pour tout $x \in M$, la fibre $L_x := p^{-1}(x)$ au-dessus de x est un espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension r ;

(ii) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ de x et un difféomorphisme

$$\phi : U \times V \to p^{-1}(U)$$

tel que $(p \circ \phi)(y, v) = y$ pour tout $(y, v) \in U \times V$ et $\phi(x, \cdot) : V \to L_x$ est une application $\mathbb{R}-$linéaire (respectivement $\mathbb{C}-$linéaire).

On notera un fibré vectoriel $p : L \xrightarrow{V} M$, $p : L \to M$ ou simplement L.

Définition 1.4.8. Soient $p : L \xrightarrow{V} M$ et $p' : L' \xrightarrow{V'} M'$ deux fibrés vectoriels réels (respectivement complexes). Un *morphisme de fibrés vectoriels* réels (respectivement complexes) entre L et L' est une application lisse $f : L \to L'$ telle que :

(i) $p = p' \circ f$;

(ii) pour tout $x \in M$, $f|_{L_x}$ est une application $\mathbb{R}-$linéaire (respectivement $\mathbb{C}-$linéaire).

En outre, f est appelé un *isomorphisme* de fibrés vectoriels si, dans la définition ci-dessus, f est un difféomorphisme et $f|_{L_x}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1.4.2 Connexions sur un fibré principal

Soit $\pi : P \to M$ un fibré G-principal. L'espace tangent en un point $\xi \in P$ possède un sous-espace particulier – appelé *espace tangent vertical* et noté V_ξ – constitué des vecteurs tangents qui sont annulés par π_{*_ξ}. Ces vecteurs sont dits tangents à la fibre de P. Cependant, il n'existe pas de choix naturel pour un sous-espace orthogonal à l'espace tangent vertical.

Définition 1.4.9. Une *connexion* sur P est le choix, en chaque point $\xi \in P$ d'un sous-espace $U_\xi \subset T_\xi P$ tel que, pour tout $\xi \in P$:

(i) $T_\xi P = V_\xi \oplus U_\xi$;

(ii) $U_{\xi \cdot g} = (R_g)_* U_\xi$ pour tout $g \in G$;

(iii) $\xi \mapsto U_\xi$ est une distribution lisse sur P.

En chaque point $\xi \in P$, U_ξ est appelé *espace tangent horizontal.*

Notons que la deuxième condition de la définition est une condition d'invariance sous l'action de G. La notion de connexion permettra de définir le relèvement horizontal d'un vecteur, qui nous sera utile plus tard.

Définition 1.4.10. Une $1-$*forme de connexion* sur P est une 1-forme $\varpi \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que :

- $\varpi_\xi(X^*_\xi) = X \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \xi \in P,$
- $\Big(R^*_g \varpi\Big)_\xi (\Xi) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Big(\varpi_\xi(\Xi)\Big) \qquad \forall \xi \in P,\ g \in G,\ \Xi \in T_\xi P\ ,$

où X^* est le champ de vecteurs fondamental[2] associé à X et à l'action de G sur P.

2. Voir (1.1).

Désormais, nous appellerons connexion une $1-$forme de connexion. Dans le cas particulier où P est un fibré $U(1)-$ principal, cas qui nous intéressera dans la suite, les $1-$formes de connexion sont à valeurs dans $\mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbb{R}$, mais nous les identifierons avec les $1-$formes à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la première condition de la définition 1.4.10 s'écrit :

$$\varpi_\xi(i^*_\xi) \quad = \quad 1,$$

avec $i^*_\xi = \frac{d}{dt}\big|_0 \xi \cdot e^{it}$. Du fait que l'action adjointe de $U(1)$ est réduite à l'identité, la seconde condition se simplifie en conséquence.

Proposition 1.4.11. *Soient ϖ une $1-$forme de connexion sur P, $x \in M$, $\xi \in P$ tel que $\pi(\xi) = x$ et $\Xi \in T_x M$. Alors, il existe un unique vecteur $\bar{\Xi} \in T_\xi P$ tel que :*

(i) $\pi_{*_\xi}(\bar{\Xi}) = \Xi$ *;*

(ii) $\varpi_\xi(\bar{\Xi}) = 0$.

Ce vecteur est appelé relèvement horizontal de Ξ pour ϖ. De la même manière, pour un champ $\Xi \in \Gamma^\infty(M)$ de vecteurs tangent à M, on peut considérer son relèvement horizontal pour ϖ, défini comme l'unique champ $\bar{\Xi}$ de vecteurs tangents à P tel que, pour tout $\xi \in P$, $\bar{\Xi}_\xi$ est le relèvement horizontal de $\Xi_{\pi(\xi)}$ pour ϖ.

1.4.3 Fibré associé à un fibré principal

Soient $\pi : P \to M$ un fibré G-principal et F une variété sur laquelle G agit à gauche :

$$\tau \ : \ G \times F \to F \ ; \ (g, f) \mapsto \tau_g(f).$$

Il est possible de construire un fibré au-dessus de M de fibres F comme suit. On définit une classe d'équivalence $\sim$ sur le produit $P \times F$ comme suit :

$$\Big(\xi, f\Big) \quad \sim \quad \Big(\xi \cdot g, \tau_{g^{-1}}(f)\Big),$$

pour $\xi \in P$, $f \in F$ et $g \in G$. On peut ensuite considérer l'ensemble des classes d'équivalence :

$$E := P \times_\tau F \quad := \quad P \times F / \sim .$$

On a une projection naturelle sur M :

$$\Pi \ : \ E \to M \ ; \ [\xi, f] \mapsto \Pi\Big([\xi, f]\Big) := \pi(\xi).$$

Étant donnée une trivialisation locale $\Phi^P_i \ : \ U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ de P, on construit une trivialisation locale de E comme suit :

$$\Phi^E_i \ : \ U_i \times F \to \Pi^{-1}(U_i) \ ; \ (x, f) \mapsto \Big[\Phi^P_i(x, e), f\Big], \tag{1.3}$$

où e est le neutre de G.

Définition 1.4.12. Le fibré $(P \times_\tau F, M, \Pi, F)$ est appelé *fibré associé* à P.

Signalons que la définition de la trivialisation locale de E montre que, dans le cas où le fibré principal est trivial, son fibré associé l'est aussi.
Par la suite, nous nous intéresserons aux sections de ce fibré associé, et nous allons maintenant voir qu'il existe une bijection entre celles-ci et les fonctions $G-$équivariantes sur P à valeurs dans F. Soit $\hat{s} : P \to F$ une fonction $G-$équivariante, c'est-à-dire telle que, pour tout $\xi \in P$ et $g \in G$

$$\hat{s}(\xi \cdot g) = \tau_{g^{-1}}\left(\hat{s}(\xi)\right).$$

On peut alors définir une section de E par :

$$s\Big(\pi(\xi)\Big) \quad = \quad \Big[\xi\,,\,\hat{s}(\xi)\Big] \quad \forall \xi \in P.$$

Celle-ci est bien définie puisque, si $\xi, \xi' \in P$ sont tels que $\pi(\xi') = \pi(\xi)$, alors il existe $g \in G$ tel que $\xi' = \xi \cdot g$, et, en utilisant la $G-$équivariance de $\hat{s}$:

$$\begin{aligned} s\Big(\pi(\xi')\Big) &= \Big[\xi'\,,\,\hat{s}(\xi')\Big] = \Big[\xi \cdot g\,,\,\hat{s}(\xi \cdot g)\Big] \\ &= \Big[\xi\,,\,\tau_g\left(\hat{s}(\xi \cdot g)\right)\Big] = \Big[\xi\,,\,\tau_g \tau_{g^{-1}}\left(\hat{s}(\xi)\right)\Big] = s\Big(\pi(\xi)\Big). \end{aligned}$$

Inversément, ce même raisonnement montre que, étant donnée une section $s : M \to E$, on peut définir une fonction $G-$équivariante $\hat{s} : P \to V$ par

$$s(\pi(\xi)) \quad = \quad \Big[\xi\,,\,\hat{s}(\xi)\Big].$$

Un cas particulier important de la construction précédente est lorsqu'on considère un espace vectoriel V, ainsi qu'une représentation linéaire de G sur V

$$\chi \;:\; G \to \mathrm{GL}(V)\;;\; g \mapsto \chi(g) := [v \mapsto \chi(g)v]\,.$$

De la même manière que ci-dessus, on considère le fibré associé

$$E := P \times_\chi V$$

qui est alors un fibré vectoriel appelé *fibré vectoriel associé* à P.

1.4.4 Fibrés en droites complexes hermitiens

Nous verrons que la quantification géométrique s'exprime en terme de fibrés vectoriels complexes de rang 1 – appelés fibrés en droites complexes – munis de certaines structures supplémentaires que nous allons introduire dans cette section. Bien que ce thème soit extrêmement large et fertile, nous nous limiterons à introduire les notions indispensables pour notre propos – notions qui seront motivées dans le chapitre suivant. Un traitement des fibrés en droites complexes peut être trouvé dans [4].

Définition 1.4.13. On appelle *fibré en droites complexes* $p : L \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang 1. Pour tout $x \in M$, L_x est donc un espace vectoriel complexe de dimension 1.

Définition 1.4.14. Une *structure hermitienne* sur un fibré en droites complexes $L \to M$ est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un produit scalaire hermitien sur L_x :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;:\; L_x \times L_x \to \mathbb{C}$$

tel que l'application $L \to \mathbb{C}; \xi \mapsto \langle \xi, \xi \rangle$ est lisse. Un fibré en droites complexes muni d'une structure hermitienne est dit *hermitien*.

Définition 1.4.15. Une *connexion* sur un fibré en droites complexes $L \to M$ est la donnée d'une application $\mathbb{C}-$bilinéaire

$$\nabla \;:\; \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(L) \to \Gamma^\infty(L)\;;\; (\Xi, s) \mapsto \nabla_\Xi(s)$$

telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, $\Xi \in \Gamma^\infty(TM)$ et $s \in \Gamma^\infty(L)$:

(i) $\nabla_{f\Xi}(s) = f\nabla_\Xi(s)\,;$

(ii) $\nabla_\Xi(fs) = (\Xi \cdot f)\, s + f\nabla_\Xi(s)$.

De plus, ∇ est dite *compatible* avec une structure hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur L si, pour tout $\Xi \in \Gamma^\infty(TM)$ et $s, s' \in \Gamma^\infty(L)$:

$$\Xi \cdot \langle s, s' \rangle \quad = \quad \langle \nabla_\Xi(s), s' \rangle + \langle s, \nabla_\Xi(s') \rangle .$$

Précisons que, désormais, nous ne considérerons que des connexions compatibles, à moins de le spécifier explicitement, et que nous omettrons donc parfois ce qualificatif, en le tenant pour implicite.

Notons également qu'étant donnée une connexion ∇ non nécessairement compatible sur un fibré en droites complexes $L \to M$, pour toute $1-$forme complexe α sur M, on peut définir une nouvelle connexion $\nabla + \alpha$ (non nécessairement compatible) définie, pour $\Xi \in \Gamma^\infty(TM)$ et $s \in \Gamma^\infty(L)$, par :

$$(\nabla + \alpha)_\Xi(s) \quad = \quad \nabla_\Xi(s) + (\Xi \lrcorner \alpha)s.$$

Si ∇ est compatible et si α est purement imaginaire, alors $\nabla + \alpha$ est encore compatible.

Définition 1.4.16. Soit $L \to M$ un fibré en droites complexes hermitien muni d'une connexion ∇. La *courbure* de ∇ est l'application

$$R^\nabla \;:\; \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(L) \to \Gamma^\infty(L) \;;\; (\Xi, \Upsilon, s) \mapsto R^\nabla(\Xi, \Upsilon)(s)$$

où

$$R^\nabla(\Xi, \Upsilon)(s) \quad := \quad \nabla_\Xi\left(\nabla_\Upsilon(s)\right) - \nabla_\Upsilon(\nabla_\Xi(s)) - \nabla_{[\Xi,\Upsilon]}(s).$$

Afin de rendre ces deux notions plus explicites, considérons un fibré en droites complexes hermitien $p : L \to M$ muni d'une connexion compatible ∇ ainsi qu'une trivialisation locale $\phi : U \times \mathbb{C} \to p^{-1}(U)$ (pour U un ouvert de M) de L. Dans cette trivialisation, la restriction à U d'une section lisse $s : M \to L$ est représentée par une application lisse $\psi : U \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in U$:

$$s|_U(x) \quad = \quad \phi(x, \psi(x)).$$

La connexion ∇ est représentée par une $1-$forme réelle α sur M telle que, pour tout $\Xi \in \Gamma^\infty(TM)$ et toute section $s \in \Gamma^\infty(L)$, si $f, f' \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ sont les applications lisses qui représentent respectivement s et $\nabla_\Xi(s)$ dans la trivialisation [3] :

$$f' \quad = \quad \Xi \lrcorner df + i(\Xi \lrcorner \alpha)f. \tag{1.4}$$

On note ceci formellement par $\nabla_\Xi = \Xi \lrcorner d + i\,\Xi \lrcorner \alpha$. Soient $\Xi, \Upsilon \in \Gamma^\infty(TM)$, notons par f''

3. Signalons que le caractère réel de α de même que l'apparition du facteur i sont dus au fait que ∇ est compatible avec la structure hermitienne de L.

l'application lisse qui représente $R^{\nabla}(\Xi,\Upsilon)(s)$. On calcule :

$$\begin{aligned}
f'' &= (\Xi \lrcorner d + i\,\Xi \lrcorner \alpha)\,(\Upsilon \lrcorner d + i\,\Upsilon \lrcorner \alpha)\,f \\
&\quad -(\Upsilon \lrcorner d + i\,\Upsilon \lrcorner \alpha)\,(\Xi \lrcorner d + i\,\Xi \lrcorner \alpha)\,f \\
&\quad -([\Xi,\Upsilon] \lrcorner d + i\,[\Xi,\Upsilon] \lrcorner \alpha)\,f \\
&= (\Xi \lrcorner d + i\,\Xi \lrcorner \alpha)\,(\Upsilon \cdot f + i(\Upsilon \lrcorner \alpha)f) \\
&\quad -(\Upsilon \lrcorner d + i\,\Upsilon \lrcorner \alpha)\,(\Xi \cdot f + i(\Xi \lrcorner \alpha)f) \\
&\quad -([\Xi,\Upsilon] \lrcorner d + i\,[\Xi,\Upsilon] \lrcorner \alpha)\,f \\
&= \Xi \cdot (\Upsilon \cdot f) + if\,\Xi \cdot (\Upsilon \lrcorner \alpha) + i(\Upsilon \lrcorner \alpha)(\Xi \cdot f) \\
&\quad +i(\Xi \lrcorner \alpha)(\Upsilon \cdot f) - (\Xi \lrcorner \alpha)(\Upsilon \lrcorner \alpha)f \\
&\quad +(\text{symetrique}) \\
&\quad -[\Xi,\Upsilon] \cdot f + if\,([\Xi,\Upsilon] \lrcorner \alpha) \\
&= if\,(\Xi \cdot (\Upsilon \lrcorner \alpha) - \Upsilon \cdot (\Xi \lrcorner \alpha) - [\Xi,\Upsilon] \lrcorner \alpha) \\
&= if\,d\alpha(\Xi,\Upsilon).
\end{aligned}$$

La courbure de ∇ est donc représentée dans cette trivialisation par une $2-$forme réelle ω sur U. De manière plus générale, on peut montrer que cette $2-$forme ne dépend pas de la trivialisation. On a donc

$$R^{\nabla}(\Xi,\Upsilon)(s) \quad = \quad i\,\omega(\Xi,\Upsilon)s$$

pour une certaine $\omega \in \Omega^2(M)$ et nous identifierons dorénavant R^{∇} et ω. Remarquons en outre que, si $\beta \in \Omega^1(M)$, la courbure de $\nabla + \beta$ est égale à $\omega + d\beta$.

Chapitre 2

Quantification géométrique à la Kostant-Souriau

En physique, la question de savoir comment passer de la description classique d'un système à sa représentation quantique est un sujet délicat. On prendra ici comme hypothèse que le système classique est décrit par ses états, donnés par une variété symplectique (M, ω), et par ses observables, correspondant aux fonctions lisses $\mathcal{C}^{\infty}(M)$. La question est de déterminer une *règle de quantification*, c'est-à-dire de construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ – l'ensemble des états quantiques du système –, et d'associer à chaque observable classique f un opérateur $\hat{f}$ sur cet espace de Hilbert. De plus, cette correspondance doit satisfaire les conditions suivantes :

(Q1) $\hat{1} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$,

(Q2) $f \mapsto \hat{f}$ est $\mathbb{R}-$linéaire,

(Q3) $\hat{f}$ est un opérateur hermitien sur $\mathcal{H}$,

(Q4) $[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\, \widehat{\{f, g\}}$, [1]

(Q5) Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un système complet d'observables [2], alors $\{\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n\}$ est un ensemble complet d'opérateurs.

Il s'agit donc de construire une représentation sur un espace de Hilbert de l'algèbre des fonctions lisses sur M. La condition (Q5) est liée à une condition d'irréductibilité de la représentation mais nous ne nous en préoccuperons pas explicitement dans ce travail. Ici, $\hbar$ désigne la constante de Planck, et sera prise égale à 1 désormais. Le programme de la quantification géométrique se fait en deux temps : la construction d'une préquantification de (M, ω), puis l'introduction d'une polarisation sur M. Cette deuxième étape est nécessaire du fait que l'espace de Hilbert construit par la préquantification s'avère trop grand pour reproduire les résultats habituels de la mécanique quantique. Cependant, l'introduction d'une polarisation entraîne de nombreuses difficultés, que nous nous contenterons d'évoquer. Rappelons que ce chapitre a pour but d'introduire les notions de quantification géométrique nécessaires pour la suite. Le traitement de ce sujet est donc très loin d'être complet, son objectif étant de constituer une première approche vers la quantification géométrique, de façon à contextualiser et motiver la construction du chapitre suivant ainsi que son application dans le dernier chapitre. On pourra trouver des traitements plus complets de la quantification géométrique dans les références suivantes, sur lesquelles se base principalement ce chapitre : [1], [6], [7] et [8].

1. Dans le cas où on imposerait plutôt $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\, \widehat{\{f, g\}}$, il suffirait de prendre $f \mapsto -\hat{f}$.
2. Au sens où toute fonction dont le crochet de poisson avec tous les f_i est nul, est constante.

2.1 Introduction à la préquantification

L'objectif de la préquantification est de construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et d'associer à chaque fonction lisse sur M un opérateur sur $\mathcal{H}$. Nous verrons cependant qu'il sera nécessaire de "réduire" cet espace afin de reproduire les résultats de la Mécanique Quantique. Ce paragraphe, largement inspiré de [6], tend à motiver la construction plus rigoureuse et plus formelle de ceux qui suivront.
Si on pose $n = \frac{1}{2}\dim(M)$, la forme symplectique ω permet de définir une forme volume naturelle sur M par :

$$\epsilon \;=\; \overbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}^{n}.$$

On peut alors considérer l'ensemble des fonctions de carré intégrable pour cette mesure, $L^2(M)$, qui forme un espace de Hilbert, avec le produit scalaire hermitien suivant, pour $\psi, \psi' \in L^2(M)$:

$$\langle \psi, \psi' \rangle \;=\; \int_M \bar{\psi}\psi' \,\epsilon. \tag{2.1}$$

Nous avons vu qu'à toute fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on pouvait associer un champ de vecteurs tangents Ξ_f sur M. Il est naturel d'associer à f l'opérateur de dérivation par rapport à Ξ_f :

$$\hat{f} \;:\; L^2(M) \to L^2(M) \;;\; \psi \mapsto -i\,\Xi_f \cdot \psi.$$

De par les propriétés de $f \mapsto \Xi_f$, les conditions (Q2-4) sont bien respectées. Par contre, ce n'est pas le cas pour Q1 puisque les constantes sont envoyées sur l'opérateur nul. Si on modifie l'action de $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\psi) \;=\; -i\,\Xi_f \cdot \psi + f\psi,$$

on récupère la condition Q1, mais on perd Q4 puisqu'on a, pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(()\,M)$:

$$[\hat{f}, \hat{g}] \;=\; -i\left(-iX_{\{f,g\}} + 2\{f,g\}\right)$$

Supposons que la forme ω soit exacte, et prenons une $1-$forme θ sur M telle que $\omega = d\theta$. On a alors, pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
\Xi_f \cdot (\Xi_g \lrcorner\, \theta) - \Xi_g \cdot (\Xi_f \lrcorner\, \theta) &= d\theta(\Xi_f, \Xi_g) + [\Xi_f, \Xi_g] \lrcorner\, \theta \\
&= \omega(\Xi_f, \Xi_g) + \Xi_{\{f,g\}} \lrcorner\, \theta \\
&= \{f,g\} + \Xi_{\{f,g\}} \lrcorner\, \theta.
\end{aligned}$$

Ceci suggère de modifier encore une fois la définition de $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\psi) \;=\; -i\,(\Xi_f \cdot \psi - i(\Xi_f \lrcorner\, \theta)\psi) + f\psi,$$

on calcule finalement que

$$[\hat{f}, \hat{g}] \;=\; -i\,\widehat{\{f,g\}}.$$

Cependant, cette construction ne fonctionne que quand ω est exacte. C'est pourquoi il est nécessaire de passer par la notion de fibré en droites complexes : les fonctions sur M sont remplacées par des sections du fibré, et la $1-$forme potentielle par une connexion – définie globalement – dont la courbure est la forme symplectique. Par ailleurs, ce raisonnement fait apparaître une subtilité additionnelle puisqu'on a du faire un choix précis en sélectionnant le potentiel θ. Pour toute fonction lisse F sur M, on aurait pu choisir le potentiel $\theta + dF$, ce qui aurait donné un autre opérateur. Ceci impose de considérer une relation d'équivalence entre fibrés en droites complexes, qui permet de passer d'une représentation à l'autre. Finalement, la nécessité de généraliser la formule (2.1) afin de pouvoir construire un espace de Hilbert demande qu'on introduise une structure hermitienne sur le fibré en droites complexes.

2.2 Préquantification à la Kostant

Nous allons procéder à la généralisation des idées précédentes, en utilisant le formalisme des fibrés en droites complexes utilisé par Kostant [9]. Nous verrons dans la section suivante qu'une description équivalente existe en terme de fibré $U(1)-$principal, plus semblable à l'approche de Souriau [1].

2.2.1 Espace de Hilbert et opérateurs

Définition 2.2.1. Une variété symplectique (M,ω) est dite *quantifiable* lorsqu'il existe un fibré en droites complexes hermitien $L \to M$ et une connexion ∇ sur L de courbure ω et compatible avec la structure hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ sur L. On appelle le triple $(L,\nabla,\langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ un *fibré préquantique.*

À partir de la structure hermitienne de L, on définit un produit scalaire hermitien sur l'espace $\mathcal{H}_0 := \Gamma_c^\infty(L)$ des sections lisses de L à support compact par

$$\langle s,s'\rangle \quad := \quad \int_M \langle s,s'\rangle_L \ \epsilon, \qquad \text{pour } s,s' \in \mathcal{H}_0,$$

où $\epsilon = \overbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}^{n}$. On donne ainsi à $\mathcal{H}_0$ une structure d'espace préhilbertien. Il devient un espace normé pour la norme L^2 qui dérive du produit scalaire hermitien :

$$||s|| \quad := \quad \left(\int_M \langle s,s\rangle_L \ \epsilon\right)^{1/2}, \qquad \text{pour } s \in \mathcal{H}_0.$$

On considère ensuite l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ donné par le complété de $\mathcal{H}_0$. À chaque observable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on associe l'opérateur $\hat{f} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ défini, pour une section $s : M \to L \in \mathcal{H}_0$, par

$$\hat{f}(s) \quad = \quad -i\, \nabla_{\Xi_f} s + f\, s,$$

où Ξ_f est le champ de vecteurs hamiltonien associé à f. Notons que $\hat{f}(s)$ est bien une section lisse à support compacte. Dans le cas où le fibré est trivial et où la forme symplectique est exacte, l'expression (1.4) de la connexion dans une trivialisation locale montre qu'on obtient bien les formules proposées dans la section 2.1. Les deux lemmes suivants assurent que les conditions recherchées d'une règle de quantification sont vérifiées.

Lemme 2.2.2. *L'application de préquantification $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathrm{End}(\mathcal{H}_0)$; $f \mapsto \hat{f}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie :*

$$[\hat{f}\,,\,\hat{g}](s) \quad = \quad -i\,\widehat{\{f,g\}}(s)$$

pour tout $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $s \in \mathcal{H}_0$.

Lemme 2.2.3. *L'opérateur $\hat{f} \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_0)$ associé à l'observable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est symétrique :*

$$\left\langle \hat{f}(s), s' \right\rangle \quad = \quad \left\langle s, \hat{f}(s') \right\rangle.$$

On étend ensuite $\hat{f}$ à un opérateur sur $\mathcal{H}$ tout entier par continuité. Cependant, nous ne préoccuperons pas ici des difficultés relatives à la détermination des propriétés sur tout $\mathcal{H}$ des opérateurs $\hat{f}$.

Exemple 2.2.4. Considérons la variété $N = \mathbb{R}^n$ et son fibré cotangent $M = T^*N = \mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées $(q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$. On peut définir sur M une forme symplectique canonique donnée par [3]

$$\omega \quad = \quad dp_i \wedge dq^i.$$

3. On utilise ici la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés.

Cette forme est exacte puisqu'elle possède le potentiel

$$\theta \;=\; p_i dq^i.$$

Un choix naturel pour un fibré en droites complexes au-dessus de M est simplement le fibré trivial $L := M \times \mathbb{C}$. On le munit de la structure hermitienne induite de $\mathbb{C}$ et de la connexion

$$\nabla \;=\; d - i\theta.$$

La courbure de ∇ est bien donnée par la forme symplectique. Les sections lisses correspondent aux fonctions lisses complexes sur M. Pour un vecteur tangent $\Xi = \delta q^i \partial_{q^i} + \delta p_i \partial_{p_i}$, on a $\Xi \lrcorner \omega = \delta p_i dq^i - \delta q^i dp_i$. Dès lors, on peut déterminer les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux observables q^i et p_i :

$$\Xi_{q^i} = -\partial_{p_i}, \qquad \Xi_{p^i} = \partial_{q_i},$$

et les opérateurs associés sont :

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= -i(-\partial_{p_i} - ip_j\,(-\partial_{p_i}) \lrcorner\, dq^j) + q_i \\ &= i\partial_{p_i} + q_i \\ \hat{p}_i &= -i(\partial_{q_i} - ip_j\,\partial_{q_i} \lrcorner\, dq^j) + p_i \\ &= -i\partial_{q_i}. \end{aligned}$$

Ceci ne correspond pas aux opérateurs assignés par la quantification canonique. Ceci est du au fait que les sections dépendent à la fois des coordonnées p_i et q^i. Il sera donc nécessaire de restreindre le nombre de coordonnées dont elles dépendent. Si on choisit par exemple de ne prendre que les fonctions des q^i, on retrouve alors les résultats de la quantification canonique.

2.2.2 Condition de quantification

Il est bien connu en physique que certains systèmes ne peuvent être quantifiés que sous certaines conditions. Par exemple, le spin d'une particule relativiste libre ne peut prendre que des valeurs demi-entières. Dans le contexte de la quantification géométrique, ceci s'explique par le fait qu'on ne peut pas toujours construire un fibré préquantique au-dessus d'une variété symplectique (M, ω). Il faut pour cela que la forme symplectique satisfasse une condition d'intégralité.

Proposition 2.2.5. *Il existe un fibré en droites complexes hermitien $L \to M$ et une connexion compatible ∇ sur L de courbure ω si et seulement si la classe d'équivalence de $\frac{\omega}{2\pi}$ dans $H^2_{DR}(M)$ est dans l'image de l'application*

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^2_{DR}(M).$$

Dans le cas où M est simplement connexe, cette condition d'intégalité est équivalente à ce que l'intégrale de ω sur toute surface orientée et fermée de M est un multiple entier de 2π. Observons que la condition de quantification n'est pas invariante si on multiplie la forme symplectique par un nombre réel quelconque, et que la normalisation de celle-ci est donc importante en général.

2.2.3 Préquantifications équivalentes

Nous avons vu dans la section 2.1 que l'opérateur $\hat{f}$ était dépendant du choix du potentiel symplectique. Dans le contexte d'un fibré en droites complexes, le phénomène apparaît du fait que la connexion sur le fibré en droites complexes n'est pas déterminée de manière unique par sa courbure. En effet, nous avons constaté que, si ∇ est une connexion compatible sur un fibré en droites complexes hermitien L, et si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\nabla + df$ définit encore une connexion compatible sur L et sa courbure est égale à celle de ∇. De plus, il peut exister d'autres préquantifications équivalentes d'une variété symplectique au sens suivant :

Définition 2.2.6. Deux préquantifications $(L, \nabla, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ et $(L', \nabla', \langle\cdot,\cdot\rangle_{L'})$ d'une variété symplectique (M, ω) sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels entre L et L' qui respecte la structure hermitienne et si les courbures de ∇ et ∇' sont égales.

Proposition 2.2.7. *L'ensemble des classes d'équivalence des fibrés préquantiques de (M, ω) est paramétré par le groupe $H^1(M, U(1))$ ou, de manière équivalente, par l'ensemble des caractères unitaires du groupe d'homotopie de M.*

En particulier, il est intéressant de noter que le nombre de quantifications non-équivalentes d'une variété symplectique quantifiable ne dépend que de la variété, et non de sa forme symplectique.

Définition 2.2.8. On dit qu'une variété symplectique quantifiable M est *monoquantifiable* si toutes ses préquantifications sont équivalentes.

On a alors le corollaire immédiat de la proposition précédente :

Corollaire 2.2.9. *Toute variété quantifiable simplement connexe est monoquantifiable.*

2.3 Préquantification à la Souriau

Comme nous l'avons annoncé plus haut, il est possible de reformuler la préquantification que nous venons de décrire en terme de fibrés $U(1)-$principaux munis d'une $1-$forme de connexion. Ce formalisme se rapproche d'avantage de celui de Souriau [1], et c'est celui que nous adopterons dans le chapitre suivant.

Soit (M, ω) une variété symplectique. Le point est qu'il existe une bijection entre l'ensemble des fibrés en droites complexes hermitiens au-dessus de M et les fibrés $U(1)-$principaux. Celle-ci est détaillée dans [4], nous en suggérons ici l'idée. Soit $\pi : Y \to M$ un fibré $U(1)-$principal. On a la représentation naturelle de $U(1)$ sur $\mathbb{C}$ donnée par la multiplication. Nous pouvons donc considérer le fibré vectoriel $L := Y \times_{U(1)} \mathbb{C}$ associé à Y et à cette représentation. C'est un fibré en droites complexes au-dessus de M, et on le munit de la structure hermitienne induite de celle de $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\langle [x,z],[x',z'] \rangle \quad := \quad \bar{z}z'z'' \qquad \forall x, x' \in Y \text{ et } z, z' \in \mathbb{C} \text{ tels que } \pi(x) = \pi(x'),$$

avec $z'' \in U(1)$ l'unique élément tel que $x' = x \cdot z''$. Inversément, si L est un fibré vectoriel en droites complexes muni d'une structure hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on peut considérer l'ensemble

$$Y \quad := \quad \{x \in L \mid \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Ceci forme bien un fibré $U(1)-$principal, l'action de $U(1)$ étant induite de la multiplication scalaire pour la structure d'espace vectoriel des fibres de L. Nous ne présenterons pas l'argument ici, mais [4] montre également qu'il y a une correspondance entre les fibrés en droites complexes hermitiens munis d'une connexion compatible, et les fibrés $U(1)-$principaux munis d'une $1-$formes de connexion. La courbure de la $1-$forme de connexion sur Y est le pull-back à Y par la projection de la courbure de la connexion ∇ sur L.

Dans ce formalisme, la préquantification s'exprime donc ainsi.

Définition 2.3.1. Soit (M, ω) une variété symplectique. Une *préquantification* d'une variété symplectique (M, ω) est la donnée d'un fibré $U(1)-$principal $\pi : Y \to M$ et d'une $1-$forme de connexion ϖ sur Y dont la courbure $d\varpi$ est égale à $\pi^*\omega$. On note une préquantification (Y, ϖ).

Définition 2.3.2. Deux préquantifications (Y, ϖ) et (Y', ϖ') d'une variété symplectique (M, ω) sont dite *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : Y \to Y'$ tel que $\phi^*\varpi' = \varpi$. Remarquons que cette condition implique la $U(1)-$équivariance de ϕ.

Pour ce qui est de l'espace de Hilbert considéré pour la préquantification, nous avons vu qu'il existe une bijection entre les fonctions lisses $U(1)-$équivariantes sur un fibré $U(1)-$principal et les sections lisses du fibré en droites complexes associé. Considérons donc l'ensemble des fonctions $U(1)-$équivariantes sur Y à support compact :

$$\mathcal{H}_0 \quad := \quad \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty (Y, \mathbb{C})^{U(1)} \mid \mathrm{supp}(\varphi) \text{ est compact} \right\}.$$

Soient $\varphi, \varphi' \in \mathcal{H}_0$, la condition d'équivariance implique que, pour tout $\xi \in Y$, $z \in U(1)$:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(\xi \cdot z)} \varphi'(\xi \cdot z) &= \overline{z^{-1}\varphi(\xi)} z^{-1} \varphi'(\xi) \\ &= \overline{\varphi(\xi)} \varphi'(\xi). \end{aligned}$$

Ceci montre que cette formule induit une application bien définie sur M dont le support est également compact. On peut alors définir :

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle \quad := \quad \int_M \overline{\varphi(\xi)} \varphi'(\xi) \, \epsilon,$$

ce qui, comme précédemment, fait de $\mathcal{H}_0$ un espace préhilbertien. En utilisant explicitement la bijection entre les fonctions $U(1)-$équivariantes et les sections lisses du fibré associé, on peut vérifier que cette structure préhilbertienne correspond à celle que nous avions définie dans la section précédente. De la même manière que dans cette section, on définit finalement un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ comme le complété de $\mathcal{H}_0$. Soit maintenant une observable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on lui associe l'opérateur $\hat{f}$ sur $\mathcal{H}_0$ défini, pour $\varphi \in \mathcal{H}_0$, par :

$$\hat{f}(\varphi) \quad = \quad -i\overline{\Xi}_f \cdot \varphi + f\varphi,$$

où $\overline{\Xi}_f$ est le relèvement à Y horizontal pour ϖ du champ de vecteurs hamiltonien Ξ_f de f. On vérifie à nouveau que cette définition correspond bien à la définition précédente des opérateurs sur les sections du fibré associé.

2.4 Quantification

Nous avons vu, dans l'exemple 2.2.4, que la préquantification ne restituait pas les résultats, habituels en physique, de la quantification canonique. Pour y remédier, il est nécessaire de restreindre l'espace de Hilbert produit par la préquantification. Pour ce faire, l'idée est de réduire le nombre de coordonnées dont dépendent les sections considérées. Ainsi, dans le cas de l'exemple 2.2.4, considérer seulement les fonctions qui ne dépendent que des coordonnées q^i permet de retrouver les résultats de la quantification canonique.

Cette étape de la quantification géométrique fait apparaître de nombreuses difficultés, et il n'existe pas encore, à l'heure actuelle, de procédure complètement générale. Dans ce travail, nous nous limiterons à introduire les notions qui seront utiles pour notre propos, en nous souciant essentiellement d'évoquer les problèmes que rencontrerait une approche purement naïve.

La réduction du nombre de coordonnées se fait à l'aide du concept de polarisation.

Définition 2.4.1. Une *polarisation réelle* d'une variété symplectique (M, ω) est une distribution lisse $P \subset TM$ telle que

(i) P est involutive, c'est-à-dire que si $\Xi, \Upsilon \in V_P(M)$, alors $[\Xi, \Upsilon] \in V_P(M)$;

(ii) $\forall x \in M$, P_m est un sous-espace Lagrangien de T_mM ;

La condition d'involution assure qu'il existe des variétés intégrales de P (théorème 1.1.3). La raison du qualificatif "réel" dans la définition est qu'elle est trop restrictive en général. Par exemple, la sphère n'admet pas de polarisation réelle puisqu'il n'existe pas de champ de vecteur tangent qui ne s'annule nulle part. C'est pourquoi on considère en général une distribution – satisfaisant des conditions semblables – dans le complexifié de l'espace tangent, $TM^{\mathbb{C}} = TM \oplus iTM$. Dans ce travail, nous nous tiendrons toutefois au cas particulier d'une polarisation réelle. Afin de diminuer le nombre de coordonnées dont dépend une section, introduisons la notion suivante :

Définition 2.4.2. Soient (M, ω) une variété symplectique, $(L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ une préquantification de (M, ω) et P une polarisation réelle de (M, ω). Une section $s \in \Gamma^\infty(L)$ est *polarisée* pour P si, pour tout $\Xi \in V_P(M)$:

$$\nabla_\Xi s \quad = \quad 0.$$

On note $\Gamma^\infty_P(L)$ l'ensemble des sections lisses à support compact polarisées pour P, et on l'appelle *espace de Planck*[4].

Il est tentant de vouloir, comme pour la préquantification, construire un espace de Hilbert à partir de l'espace de Planck. Cependant, plusieurs problèmes se posent. Le premier est le fait que, puisque les sections de cet espace sont constantes sur les variétés intégrales de la polarisation P, elles ne sont pas L^2-intégrables si les variétés intégrales de P ne sont pas compactes. Ensuite, l'opérateur $\hat{f}$ associé à l'observable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ne laisse pas en général l'espace de Planck invariant. Ceci demande de modifier le schéma de quantification, mais quant à nous, nous circonscrirons le cadre de ce travail à l'espace de Planck.

Avant de poursuivre, il nous reste à décrire la quantification dans le formalisme de Souriau.

Définition 2.4.3. Soient (M, ω) une variété symplectique, (Y, ϖ) une préquantification de (M, ω) et P une polarisation réelle de (M, ω). Une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)^{U(1)}$ est dite *polarisée* pour P si, pour tout $\Xi \in V_P(M)$:

$$\overline{\Xi} \cdot \varphi \quad = \quad 0,$$

où $\overline{\Xi}$ est le relèvement à Y horizontal pour ϖ du champ de vecteurs tangents Ξ.

4. L'appellation est due à Souriau.

Chapitre 3

Quantification des orbites coadjointes : de Kirillov à Kostant-Souriau

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, une orbite coadjointe d'un groupe de Lie est une variété symplectique. Inversément, on doit à Kostant et Souriau la découverte que, sous certaines conditions, une variété symplectique est un recouvrement d'une orbite coadjointe. Il semble donc légitime d'étudier plus en profondeur leur quantification, et c'est l'objectif de ce chapitre. Nous commencerons par décrire la méthode des orbites de Kirillov [10], [5], qui tente d'associer une représentation unitaire du groupe de Lie à chacune de ses orbites coadjointes. Ensuite, nous appliquerons le programme de quantification à la Kostant-Souriau aux orbites coadjointes, pour finalement décrire une équivalence entre ces deux approches. La méthode de Kirillov étant purement algébrique, contrairement à celle de Kostant-Souriau qui nécessite la résolution d'équations différentielles, un intérêt de cette correspondance est de pouvoir construire algébriquement des solution à ces équations différentielles.

3.1 Méthode des orbites de Kirillov

L'objectif de la méthode des orbites de Kirillov est d'associer une représentation unitaire d'un groupe de Lie G à chacune de ses orbites coadjointes. Dans le cas des groupes nilpotents, Kirillov a montré que cette technique construit des représentations irréductibles, et que toutes les représentations irréductibles du groupe s'obtiennent de cette manière. Par la suite, la méthode a été étendue à des groupes plus généraux.

3.1.1 Représentation induite

Soient G un groupe de Lie, B un sous-groupe de Lie fermé de G, et (ρ, V) une représentation de dimension finie de B. Puisque B est fermé dans G, G/B est une variété, et on a la fibration $B-$principale

$$\pi \ : \ G \to G/B \ ; \ g \mapsto gB.$$

On considère le fibré vectoriel associé :

$$p \ : \ E_\rho \to G/B,$$

où $E_\rho := G \times_\rho V$. Nous savons qu'il y a une bijection

$$\Gamma^\infty(E_\rho) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(G,V)^B \ ; \ \varphi \mapsto \hat{\varphi} \tag{3.1}$$

entre l'ensemble des sections lisses de E_ρ et l'ensemble des fonctions lisses $\hat{\varphi} : G \to V$ satisfaisant à la propriété de $B-$équivariance

$$\hat{\varphi}(gb) \quad = \quad \rho(b)^{-1}\hat{\varphi}(g), \qquad \forall g \in G, \forall b \in B.$$

À partir des translations à gauche, on construit une action à droite de G sur $\mathcal{C}^\infty(G,V)$, définie pour $g \in G$ par :

$$L^*_{g^{-1}} \;:\; \mathcal{C}^\infty(G,V) \to \mathcal{C}^\infty(G,V) \;;\; f \mapsto L^*_{g^{-1}}f := \left[g' \mapsto f(g^{-1}g')\right]. \tag{3.2}$$

Lemme 3.1.1. *La formule (3.2) laisse invariant le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(G,V)^B$ et induit donc une action*

$$L^*_{g^{-1}} \;:\; \mathcal{C}^\infty(G,V)^B \to \mathcal{C}^\infty(G,V)^B \;;\; f \mapsto L^*_{g^{-1}}f := \left[g' \mapsto f(g^{-1}g')\right]. \tag{3.3}$$

Démonstration. Puisque les translations à gauche et à droite par G commutent, on vérifie que, si $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(G,V)^B$, $g_0, g \in G$ et $b \in B$, on a :

$$\begin{aligned}\left(L^*_{g^{-1}}\hat{\varphi}\right)(g_0 b) \quad &= \quad \hat{\varphi}\left(g^{-1}g_0 b\right) = \rho(b)^{-1}\,\hat{\varphi}\left(g^{-1}g_0\right) \\ &= \quad \rho(b)^{-1}\left(L^*_{g^{-1}}\hat{\varphi}\right)(g_0).\end{aligned}$$

□

Définition 3.1.2. La formule (3.3) et l'isomorphisme (3.1) définissent une représentation de G sur $\mathcal{C}^\infty(G,V)^B$ appelée *représentation induite* de B à G et notée $\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$.

Supposons maintenant que V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, et que ρ est une représentation unitaire de B sur V, c'est-à-dire que $\forall u, v \in V$, $\forall b \in B$:

$$\langle \rho(b)u, \rho(b)v\rangle_V \quad = \quad \langle u, v\rangle_V$$

Supposons également qu'il existe sur $N := G/B$ une forme volume $G-$invariante dy. Soit $\mathcal{H}_0$, l'ensemble des sections lisses φ de E_ρ à support compact. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_0$ on a alors :

$$\int_N \langle \varphi(y), \varphi(y)\rangle_V \; dy < \infty.$$

Proposition 3.1.3. *$\mathcal{H}_0$ forme un espace préhilbertien si on le munit de la structure suivante :*

$$\langle \varphi, \psi\rangle \quad = \quad \int_N \langle \varphi(y), \psi(y)\rangle_V \; dy, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0, \tag{3.4}$$

et ce produit scalaire hermitien est invariant sous l'action de G correspondant à la représentation $\mathrm{Ind}_K^G(\rho)$*. Si on note $\mathcal{H}$ le complété de $\mathcal{H}_0$, la représentation* $\mathrm{Ind}_K^G(\rho)$ *de G sur $\mathcal{H}_0$ induit une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Le fait que (3.4) définit bien un produit scalaire hermitien découle immédiatement du fait que $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ en est un, et de la linéarité de l'intégrale. Notons ensuite qu'on peut exprimer le produit scalaire hermitien en terme des fonctions $B-$équivariantes correspondant aux éléments de $\mathcal{H}_0$. En effet, si $\phi, \psi \in \mathcal{H}_0$ et si $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(G,V)^B$ sont leurs images respectives par l'isomorphisme (3.1), on a, pour tout $g \in G$:

$$\langle \varphi(gB), \psi(gB)\rangle_V \quad = \quad \left\langle \hat{\varphi}(g), \hat{\psi}(g)\right\rangle_V.$$

En effet, si $g' \in G$ est tel que $gB = g'B$, il existe $b \in B$ tel que $g' = gb$ et on calcule

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\varphi}(g'), \hat{\psi}(g') \right\rangle_V &= \left\langle \hat{\varphi}(gb), \hat{\psi}(gb) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \rho(b)^{-1}\hat{\varphi}(g), \rho(b)^{-1}\hat{\psi}(gb) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \hat{\varphi}(g), \hat{\psi}(g) \right\rangle_V ,\end{aligned}$$

où on a utilisé le caractère unitaire de ρ. On a dès lors, pour $g_0 \in G$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Ind}_K^G(\rho)(g_0)\varphi, \mathrm{Ind}_K^G(\rho)(g_0)\psi \right\rangle &= \int_N \left\langle \left(\mathrm{Ind}_K^G(\rho)(g_0)\varphi\right)(gB), \left(\mathrm{Ind}_K^G(\rho)(g_0)\psi\right)(gB) \right\rangle_V dy \\ &= \int_N \left\langle \hat{\varphi}(g_0^{-1}g), \hat{\psi}(g_0^{-1}g) \right\rangle_V dy \\ &= \int_N \left\langle \varphi(g_0^{-1}gB), \psi(g_0^{-1}gB) \right\rangle_V dy \\ &= \int_N \langle \varphi(gB), \psi(gB) \rangle_V \, dy \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle ,\end{aligned}$$

où on a utilisé, pour obtenir l'avant-dernière ligne, la $G-$invariance de la mesure dy. La représentation $\mathrm{Ind}_K^G(\rho)$ de G sur $\mathcal{H}_0$ induit donc bien une représentation unitaire sur le complété de $\mathcal{H}_0$. □

Définition 3.1.4. La représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$ donnée par la proposition précédente s'appelle *représentation induite unitaire* de B à G.

3.1.2 Orbite coadjointe

Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$. Notons l'orbite coadjointe de ξ_0 par $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}^\flat_G(\xi_0)$, K le stabilisateur de ξ_0 dans G par rapport à l'action coadjointe :

$$K := \{k \in G \mid \mathrm{Ad}_k(\xi_0) = \xi_0\} ,$$

et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie.

Lemme 3.1.5. *$\mathfrak{k}$ est caractérisée par ξ_0 comme suit :*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle \xi_0, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\} .$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &:= \left\{X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tX)}(\xi_0) = 0\right\} \\ &= \left\{X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \frac{d}{dt}\Big|_0 \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tX)}(\xi_0), Y \right\rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\right\} \\ &= \left\{X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \left\langle \xi_0, \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(-tX)}(Y) \right\rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\right\} \\ &= \left\{X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \langle \xi_0, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\right\} .\end{aligned}$$

□

Remarquons également que la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ est paire puisque telle est celle de $\mathcal{O}$, en tant que variété symplectique. Nous allons maintenant voir qu'on peut associer, sous certaines conditions, une représentation unitaire de G à $\mathcal{O}$.

Définition 3.1.6. Une *polarisation affiliée* à ξ_0 est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telle que :

(i) $\mathfrak{b}$ est stable sous Ad_K ;

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{b}$, $\langle \xi_0, [X, Y] \rangle = 0$;

(iii) $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

Indiquons que la propriété (iii) implique que $\mathfrak{b}$ est maximale pour la propriété (i), c'est-à-dire que si $\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ satisfaisant (i) et telle que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$, alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. En effet, la propriété (i) implique que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \geq \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. Nous verrons par la suite que cette définition de polarisation est liée à la notion précédente de polarisation réelle. Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation affiliée à ξ_0, on a alors que l'application

$$v_{\xi_0} \ : \ \mathfrak{b} \to \mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbb{R} \ : \ X \mapsto i \ \langle \xi_0, X \rangle$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie à cause de la propriété (i) d'une polarisation affiliée à ξ_0.

Hypothèse 3.1.7. Supposons que sont vérifiées les trois conditions suivantes :

(i) le sous-groupe B de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{b}$ est fermé dans G ;

(ii) l'homomorphisme (3.1.2) s'étend en un caractère unitaire de G, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme
$$\chi \ : \ B \to U(1),$$
tel que $\chi_{*_e} = v_{\xi_0}$. On a la représentation évidente associée, également notée χ, donnée par
$$\chi : B \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; (b, z) \mapsto \chi(b) z;$$

(iii) il existe une mesure $G-$invariante sur G/B.

Définition 3.1.8. Sous les hypothèses précédentes, la représentation induite unitaire $\mathrm{IndU}_B^G(\chi)$ s'appelle *représentation de Kirillov* associée à l'orbite $\mathcal{O}$ et au caractère χ.

3.2 De Kirillov à Kostant-Souriau

Le but de la dernière section de ce chapitre est de mettre en évidence une correspondance entre la méthode des orbites de Kirillov et la quantification de Kostant-Souriau. Intuitivement, l'idée qui sous-tend cette correspondance est la suivante. Dans le formalisme de Kostant-Souriau, on réduit l'espace des sections considérées en ne prenant que celles qui satisfont une équation différentielle – la condition de polarisation – , c'est-à-dire qui sont constantes sur les sous-variétés intégrales correspondant à la polarisation. Ces sections sont donc bien définies sur la variété quotient par ces sous-variétés intégrales – pour autant que ce quotient soit une variété. Nous allons voir que la méthode des orbites de Kirillov construit directement les sections sur cet espace quotient, ce qui permet d'obtenir des solutions de l'équation différentielle de la condition de polarisation. Nous commencerons par préquantifier les orbites coadjointes selon le formalisme de Kostant-Souriau, puis nous décrirons la correspondance annoncée.

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$, e le neutre de G et $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$. Notons l'orbite coadjointe de ξ_0 par $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}_G^\flat(\xi_0)$. Soit K le stabilisateur de ξ_0 dans G par rapport à l'action coadjointe :

$$K \ \ := \ \ \{k \in G \mid \mathrm{Ad}_k(\xi_0) = \xi_0\} \, ,$$

et soit $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie dans $\mathfrak{g}$. Rappellons que K est fermé dans G et qu'en tant qu'espace $G-$homogène, l'orbite $\mathcal{O}$ est difféomorphe à G/K, et on a la fibration $K-$principale suivante :

$$\Pi \ : \ G \to \mathcal{O} \simeq G/K \ ; \ g \mapsto \Pi(g) := \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0).$$

De plus, $\mathcal{O}$ est naturellement munie de la forme symplectique de KKS $\omega^{\mathcal{O}}$ donnée, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathcal{O}$, par la formule suivante :

$$\omega^{\mathcal{O}}_\xi(X^*_\xi, Y^*_\xi) \quad = \quad -\langle \xi, [X, Y] \rangle \, ,$$

où X^* et Y^* sont les champs de vecteurs fondamentaux associés respectivement à X et Y. Cette forme symplectique est invariante sous l'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}$.

3.2.1 Préquantification des orbites coadjointes

La construction suivante permet d'obtenir une préquantification de $\mathcal{O}$ selon le formalisme de Souriau. Pour rappel, il s'agit donc de construire un fibré $U(1)-$principal au-dessus de $\mathcal{O}$, muni d'une $1-$forme de connexion dont la courbure est le relèvement de la forme symplectique $\omega^{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$.

Lemme 3.2.1. *L'application*

$$v_{\xi_0} \ : \ \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbb{R} \ : \ X \mapsto i \ \langle \xi_0, X \rangle \tag{3.5}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. Puisque le crochet de Lie sur $\mathfrak{u}(1)$ est nul, nous devons vérifier que, pour tout $X, Y \in \mathfrak{k}$, $\langle \xi_0, [X, Y] \rangle = 0$. Ceci découle directement du lemme 3.1.5. ☐

Hypothèse 3.2.2. Dans la suite, nous supposerons que

(i) K est connexe ;

(ii) l'homomorphisme (3.5) s'exponentie en un caractère unitaire de K, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme

$$\chi \ : \ K \to U(1)$$

tel que $\chi_{*_e} = v_{\xi_0}$;

(iii) v_{ξ_0} est non-trivial, et, par linéarité de ξ_0, il existe donc $X_0 \in \mathfrak{k}$ tel que $\langle \xi_0, X_0 \rangle = 1$.

Notons que l'hypothèse 3.2.2(iii) implique que χ est surjectif. χ induit une action évidente – que nous noterons également par χ – de K sur $U(1)$ par

$$\chi \ : \ K \times U(1) \to U(1) \ : \ (k, z) \mapsto \chi(k)z.$$

On peut donc considérer le fibré $Y := G \times_\chi U(1)$ associé à la fibration $K-$principale $G \xrightarrow{\Pi} \mathcal{O}$ et à l'action χ de K sur $U(1)$.

Lemme 3.2.3. *Le fibré associé Y est naturellement un fibré $U(1)-$principal au-dessus de $\mathcal{O}$:*

$$\pi \ : \ Y \to \mathcal{O} \ ; \ [g, z] \mapsto \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0).$$

Démonstration. On a l'action à droite de $U(1)$ sur K donnée par

$$Y \times U(1) \to Y \;;\; ([g,z], z_0) \mapsto [g,z].z_0 := [g, zz_0].$$

Cette action est bien définie puisque, si $[g,z] \in Y$, $k \in K$ et $z_0 \in U(1)$:

$$\begin{aligned} [gk, \chi(k)^{-1}z].z_0 &= [gk, \chi(k)^{-1}zz_0] \\ &= [g, zz_0] = [g,z].z_0. \end{aligned}$$

Elle laisse les fibres invariantes puisque $\pi\left([g,z].z_0\right) = \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0) = \pi\left([g,z]\right)$ pour tout $[g,z] \in Y$ et $z_0 \in U(1)$. Il est évident que l'action est libre puisque $zz_0 = z \Rightarrow z_0 = 1\ \forall z, z_0 \in U(1)$ et on vérifie qu'elle est également transitive. En effet, si $[g,z],[g',z'] \in Y$ sont tels que $\pi([g,z]) = \pi([g',z'])$, il existe $k \in K$ tel que $g' = gk$, ce qui entraine que :

$$\begin{aligned} [g', z'] &= [gk, z'] = [g, \chi(k)z'] \\ &= [g, z\,(z^{-1}\chi(k)z')] = [g,z].(z^{-1}\chi(k)z'). \end{aligned}$$

Finalement, si $\Phi^G_i : U_i \times K \to \pi^{-1}(U_i)$ est une trivialisation locale de $G \to \mathcal{O}$, la trivialisation locale Φ^Y_i de Y donnée par (1.3) est trivialement compatible avec l'action à droite puisque, pour tout $x \in \mathcal{O}, z, z_0 \in U(1)$:

$$\Phi^Y_i(x, zz_0) = \left[\Phi^G_i(x,e), zz_0\right] = \left[\Phi^G_i(x,e), z\right].z_0 = \Phi^Y_i(x,z).z_0.$$

Y est donc bien un fibré $U(1)-$principal au-dessus de $\mathcal{O}$. □

Lemme 3.2.4. *Il existe une* $1-$*forme de connexion* ϖ *sur* Y *dont la courbure est le relèvement à* Y *de* $\omega^{\mathcal{O}}$.

Démonstration. Commençons tout d'abord par remarquer que G agit à gauche sur Y par la formule suivante :

$$g_0.[g,z] := [g_0 g, z],$$

pour tout $g_0 \in G$ et $[g,z] \in Y$. Cette action est transitive. En effet, si $[g,z],[g',z'] \in Y$, par la surjectivité de χ, il existe $k \in K$ tel que $z' = \chi(k)z$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \left(g(g'k)^{-1}\right).[g',z'] &= [gk^{-1}g'^{-1}g', \chi(k)z] \\ &= [gk^{-1}k, z] = [g,z]. \end{aligned}$$

Y forme donc un espace $G-$homogène, et la proposition 1.2.6 implique que tout vecteur tangent à Y s'écrit comme un élément d'un champ de vecteurs fondamental pour cette action de G. Nous pouvons donc utiliser ceux-ci pour définir une $1-$forme ϖ sur Y par la formule suivante :

$$\varpi_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}\right) := -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X\right\rangle \tag{3.6}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}, [g,z] \in Y$ ($X^*_{[g,z]} = \frac{d}{dt}\big|_0 \exp(-tX).[g,z]$ désigne le champ de vecteurs fondamental sur Y associé à X).

1. ϖ *est une* $1-$*forme bien définie sur* Y.
   Nous devons tout d'abord vérifier que ϖ est bien définie, c'est-à-dire que, si $X, Z \in \mathfrak{g}$ sont tels que $X^*_{[g,z]} = Z^*_{[g,z]}$ pour un certain $[g,z] \in Y$, alors

$$-\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X\right\rangle = -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), Z\right\rangle.$$

Puisque l'application $X \mapsto X^*$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie (proposition 1.2.6), il suffit de vérifier que, si $X^*_{[g,z]} = 0$, $\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X \right\rangle = 0$. Or, on a :

$$\begin{aligned} X^*_{[g,z]} &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(-tX).[g,z] = \frac{d}{dt}\Big|_0 [\exp(-tX)g, z] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[g\, g^{-1}\exp(-tX)g, z\right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[g \exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right), z\right]. \end{aligned}$$

Ceci s'annule seulement si $\exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right) \in K$, c'est-à-dire seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{k}$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[g \exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right), z\right] &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[g, \chi\left(\exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right)\right) z\right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[g, \exp\left(-it\left\langle \xi_0, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right\rangle\right) z\right]. \end{aligned}$$

Dès lors, $X^*_{[g,z]} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{k} \cap \ker(\xi_0)$ et donc seulement si $\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X \right\rangle = 0$. Par $\mathbb{R}-$linéarité de $\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)$, ϖ est $\mathbb{R}-$linéaire et est donc bien une $1-$forme sur Y.

2. *ϖ est une $1-$forme de connexion sur Y.*
Tout d'abord, on a, pour tout $z_0 \in U(1)$, $[g,z] \in Y$ et $X \in \mathfrak{g}$:

$$\left(R^*_{z_0}\varpi\right)_{[g,z]}(X^*_{[g,z]}) = \varpi_{[g,zz_0]}\left(R_{z_0 *_{[g,z]}}(X^*_{[g,z]})\right).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} R_{z_0 *_{[g,z]}}(X^*_{[g,z]}) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 R_{z_0}\left(\exp(-tX).[g,z]\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 [\exp(-tX)g, zz_0] = X^*_{[g,zz_0]}. \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations, on montre bien la seconde propriété d'une $1-$forme de connexion :

$$\begin{aligned} \left(R^*_{z_0}\varpi\right)_{[g,z]}(X^*_{[g,z]}) &= \varpi_{[g,zz_0]}\left(X^*_{[g,zz_0]}\right) \\ &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X \right\rangle = \varpi_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}\right). \end{aligned}$$

Pour la première propriété, notons que, par l'hypothèse 3.2.2(iii), il existe $X_0 \in \mathfrak{k}$ tel que $< \xi_0, X_0 >= 1$. Si on note $i^*_{[g,z]} = \frac{d}{dt}\big|_0 [g,z].e^{it}$ pour $[g,z] \in Y$, on a alors :

$$\begin{aligned} i^*_{[g,z]} &= \frac{d}{dt}\Big|_0 [g, e^{it}z] = \frac{d}{dt}\Big|_0 [g, e^{it<\xi_0,X_0>}z] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 [g, \chi\left(\exp(tX_0)\right) z] = \frac{d}{dt}\Big|_0 [g\exp(tX_0), z] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 [g\exp(tX_0)g^{-1}\, g, z] = \frac{d}{dt}\Big|_0 \left[\exp\left(t\mathrm{Ad}_g(X_0)\right) g, z\right] \\ &= \left(-\mathrm{Ad}_g(X_0)\right)^*_{[g,z]}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varpi_{[g,z]}\left(i^*_{[g,z]}\right) &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), -\mathrm{Ad}_g(X_0) \right\rangle \\ &= \langle \xi_0, X_0 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Ceci termine de montrer que ϖ est une $1-$forme de connexion sur Y.

3. *La courbure de ϖ est le relèvement à Y de $\omega^{\mathcal{O}}$.*
   Pour $[g,z] \in Y$ et $X, Z \in \mathfrak{g}$, on calcule que la courbure de la connexion ϖ vaut :

$$\begin{aligned} d\varpi_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}, Z^*_{[g,z]}\right) &= X^*_{[g,z]}\left[\varpi_{[g,z]}(Z^*_{[g,z]})\right] - Z^*_{[g,z]}\left[\varpi_{[g,z]}(X^*_{[g,z]})\right] \\ &\quad - \varpi_{[g,z]}\left(\left[X^*_{[g,z]}, Z^*_{[g,z]}\right]\right). \end{aligned}$$

   Or, on a :

$$\begin{aligned} X^*_{[g,z]}\left[\varpi_{[g,z]}(Z^*_{[g,z]})\right] &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \varpi_{\exp(-tX).[g,z]}\left(Z^*_{\exp(-tX).[g,z]}\right) \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_0 \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)g}(\xi_0), Z\right\rangle \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_0 \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Z)\right\rangle \\ &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Z)\right\rangle \\ &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Z]\right\rangle, \end{aligned}$$

   où on a utilisé la linéarité de $\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)$. Par le même calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} Z^*_{[g,z]}\left[\varpi_{[g,z]}(X^*_{[g,z]})\right] &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [Z,X]\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Z]\right\rangle. \end{aligned}$$

   Puisque l'application $X \mapsto X^*$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie (proposition 1.2.6), on a :

$$\begin{aligned} \varpi_{[g,z]}\left(\left[X^*_{[g,z]}, Z^*_{[g,z]}\right]\right) &= \varpi_{[g,z]}\left([X,Z]^*_{[g,z]}\right) \\ &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Z]\right\rangle. \end{aligned}$$

   En combinant le tout, on trouve finalement :

$$d\varpi_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}, Z^*_{[g,z]}\right) = -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Z]\right\rangle.$$

   Pour ce qui est du relèvement à Y de la forme $\omega^{\mathcal{O}}$, on a, pour $X, Z \in \mathfrak{g}$ et $[g,z] \in Y$:

$$\begin{aligned} \left(\pi^*\omega^{\mathcal{O}}\right)_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}, Z^*_{[g,z]}\right) &= \omega^{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\left(\pi_{*[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}\right), \pi_{*[g,z]}\left(Z^*_{[g,z]}\right)\right) \\ &= \omega^{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \pi\left(\exp(-tX).[g,z]\right), \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi\left(\exp(-tZ).[g,z]\right)\right) \\ &= \omega^{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)}\left(\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)\right), \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tZ)}\left(\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)\right)\right) \\ &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Y]\right\rangle, \end{aligned}$$

   où la dernière ligne découle de la définition de $\omega^{\mathcal{O}}$ en fonction des champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathcal{O}$. Ceci montre bien que

$$d\varpi = \pi^*\omega^{\mathcal{O}},$$

   ce qui termine la démonstration.

□

Le lemmes précédents impliquent directement la proposition suivante :

Proposition 3.2.5. *(Y, ϖ) est une préquantification de $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$.*

3.2.2 Polarisations réelles

Maintenant que nous savons comment préquantifier une orbite coadjointe, nous allons relier le concept de polarisation du formalisme de Kirillov avec celui de Kostant-Souriau.
Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation affiliée à ξ_0, et notons B le sous-groupe de Lie de G connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{b}$.
Commençons par remarquer que

Lemme 3.2.6. *$\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{b}$ et donc $K \subset B$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{k}$ tel que $X \notin \mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{b}$ est Ad_K-invariante, on a, pour tout $Z \in \mathfrak{b}$:

$$\begin{gathered} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Z) \in \mathfrak{b} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Z) \in \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad [X, Z] \in \mathfrak{b}. \end{gathered}$$

Nous pouvons donc considérer $\mathfrak{b}' := \mathfrak{b} + \mathbb{R}\mathfrak{k}$ qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$. Or, on a également, pour tout $Z \in \mathfrak{b}$:

$$\begin{aligned} \langle \xi_0, [X, Y] \rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left\langle \xi_0, \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)}(\xi_0), Y \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \langle \xi_0, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Par le caractère maximal de $\mathfrak{b}$ pour cette propriété, on doit avoir $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, ce qui contredit l'hypothèse $X \notin \mathfrak{b}$, et donc, $\mathfrak{k}$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{b}$. ☐

Par définition d'une polarisation, l'homomorphisme (3.5) s'étend à $\mathfrak{b}$ en un homomorphisme d'algèbres de Lie, que nous noterons encore v_{ξ_0} :

$$v_{\xi_0} \;:\; \mathfrak{b} \to \mathfrak{u}(1) \;;\; X \mapsto \langle \xi_0, X \rangle .$$

Conformément aux hypothèses de la sous-section 3.1.2, nous supposons : [1]

Hypothèse 3.2.7. (i) B est fermé dans G ;

(ii) $\chi : K \to U(1)$ s'étend en un caractère unitaire $\eta \;:\; B \to U(1)$ tel que $\eta_{*_e} = v_{\xi_0}$.

Notons $Q := G/B$ la variété quotient. Puisque $K \subset B$, la fibration $B-$principale

$$p \;:\; \mathcal{O} \to Q \;;\; \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0) \mapsto gB$$

est bien définie. En effet, si $k \in K$, $g \in G$:

$$p\left(\mathrm{Ad}^\flat_{gk}(\xi_0)\right) = gkB = gB = p\left(\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)\right).$$

Considérons la distribution $\mathfrak{L}$ de $T\mathcal{O}$ donnée par les vecteurs tangents aux fibres de cette fibration.

1. Nous ne supposons pas l'existence d'une mesure $G-$invariante sur G/B car nous ne nous préoccuperons ici que de la correspondance entre espaces, et n'étudierons pas les représentations.

Lemme 3.2.8. *La distribution $\mathfrak{L}$ est donnée en un point $\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)$ de $\mathcal{O}$ ($g \in G$) par*

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)} = \left\{ X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)} \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \textit{ tel que } \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b} \right\},$$

où $X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)} = \frac{d}{dt}\big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)}(\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0))$ est le champ de vecteurs fondamental sur $\mathcal{O}$ associé à $X \in \mathfrak{g}$. De plus, $\mathfrak{L}$ est une polarisation réelle de $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$. Le relèvement $\bar{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$ à Y horizontal pour ϖ est la distribution involutive donnée en un point $[g,z] \in Y$ par

$$\bar{\mathfrak{L}}_{[g,z]} = \left\{ X^*_{[g,z]} \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \textit{ tel que } \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0) \right\},$$

où $X^*_{[g,z]} = \frac{d}{dt}\big|_0 \exp(-tX).[g,z]$ est le champ de vecteurs fondamental sur Y associé à $X \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $g \in G$. Puisque $\mathcal{O}$ est un espace $G-$homogène, un vecteur tangent à $\mathcal{O}$ au point $\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)$ est donné par $X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$ pour un certain $X \in \mathfrak{g}$. Si $X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$, on a, par définition de $\mathfrak{L}$:

$$\begin{aligned}
0 &= p_{*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}}\left(X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 p\left(\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)g}(\xi_0)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(-tX)\, gB \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 g\, g^{-1}\exp(-tX)\, gB \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 g\, \exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right) B
\end{aligned}$$

Ceci est vérifié si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b}$ et on a ainsi la première partie de la thèse. Soient maintenant $X, Z \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b}$ et $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(Z) \in \mathfrak{b}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\left(X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}, Z^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\right) &= \left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), [X,Z]\right\rangle \\
&= \left\langle \xi_0, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}([X,Z])\right\rangle \\
&= \left\langle \xi_0, \left[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X), \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(Z)\right]\right\rangle = 0
\end{aligned}$$

par définition d'une polarisation affiliée à ξ_0. $\mathfrak{L}$ est donc bien isotrope pour $\omega^{\mathcal{O}}$. Elle est de plus Lagrangienne car sa codimension est $\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O})$, en raison de la propriété (3.1.6)(iii) d'une polarisation affiliée, du fait qu'un champ de vecteurs fondamental ne s'annule que s'il correspond à un élément de $\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{k})$ et du fait que $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{b}$. $\mathfrak{L}$ est également involutive car

$$\left[X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}, Z^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}\right] = [X,Z]^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$$

qui est bien dans $\mathfrak{L}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$ puisque $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}([X,Z]) = [\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X), \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(Z)]$ et que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie.

Considérons maintenant le relèvement $\bar{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$ à Y horizontal pour ϖ. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a que $X^*_{[g,z]} \in \bar{\mathfrak{L}}_{[g,z]}$ si et seulement si $\varpi_{[g,z]}(X^*_{[g,z]}) = 0$ et $\pi_{*_{[g,z]}}(X^*_{[g,z]}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\varpi_{[g,z]}\left(X^*_{[g,z]}\right) &= -\left\langle \mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0), X\right\rangle \\
&= -\left\langle \xi_0, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Ceci est nul si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \ker(\xi_0)$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\pi_{*[g,z]}(X^*_{[g,z]}) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi\left(\exp(-tX).[g,z]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-tX)}\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0) \\
&= X^*_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)},
\end{aligned}$$

qui est dans $\mathfrak{L}_{\mathrm{Ad}^\flat_g(\xi_0)}$ si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b}$. Dès lors, $X^*_{[g,z]} \in \bar{\mathfrak{L}}_{[g,z]}$ si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$. Si $X, Z \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$, $[X,Z] \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ car $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie et $\langle \xi_0, [X,Y] \rangle = 0$. Le même raisonnement que pour $\mathfrak{L}$ montre alors que $\bar{\mathfrak{L}}$ est involutive. □

Si on note également $\eta : B \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $(b,z) \mapsto \eta(b)z$ la représentation de B sur $\mathbb{C}$, nous avons vu que l'espace sous-tendant la représentation de Kirillov associée à $\mathcal{O}$ et au caractère η est un sous-espace de l'ensemble des sections lisses du fibré en droites complexes

$$\pi^E \ : \ (E_\eta := G \times_\eta \mathbb{C}) \to Q.$$

D'un autre côté, nous pouvons continuer le formalisme de Kostant-Souriau et considérer les sections polarisées associées à la préquantification de $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$ construite ci-dessus. Il s'agit d'un sous-ensemble des sections du fibré en droites complexes

$$\pi^L \ : \ \Big(L := Y \times_{U(1)} \mathbb{C}\Big) \to \mathcal{O}.$$

Nous allons maintenant construire un morphisme entre ces deux espaces de sections.

Lemme 3.2.9. *Le fibré associé*

$$\pi^{(1)} \ : \ \Big(\tilde{Y} := G \times_\eta U(1)\Big) \to Q$$

est naturellement un fibré $U(1)-$principal au-dessus de $\mathcal{O}$.

Démonstration. La démonstration est la même que pour le lemme 3.2.3. □

On peut donc considérer le fibré en droites complexes hermitien

$$\pi^{(2)} \ : \ \Big(\tilde{L} := (G \times_\eta U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C}\Big) \to Q \ ; \ [[g_0, z_0], z] \mapsto g_0 B.$$

Lemme 3.2.10. *L'application*

$$t \ : \ (G \times_\eta U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C} \to G \times_\eta \mathbb{C} \ : \ [[g_0, z_0], z] \mapsto [g_0, z_0 z]$$

est un isomorphisme de fibrés en droites complexes au-dessus de Q.

$$\begin{tikzcd}
(G \times_\eta U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C} \arrow[rr, "\sim", "t"'] \arrow[dr, "\pi^E"'] & & G \times_\eta \mathbb{C} \arrow[dl, "\pi^{(2)}"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il faut tout d'abord voir que t est bien définie. Si $[[g_0, z_0], z] \in \tilde{L}$, $b \in B$ et $z' \in U(1)$, on a :

$$[[g_0, z_0], z] \quad = \quad [[g_0 b, \eta(b)^{-1} z_0].z', z'^{-1} z]$$

et on vérifie bien que

$$\begin{aligned} t\Big([[g_0 b, \eta(b)^{-1} z_0].z', z'^{-1} z]\Big) &= [g_0 b, \eta(b)^{-1} z_0 z' z'^{-1} z] \\ &= [g_0, z_0 z] = t\Big([[g_0, z_0], z]\Big). \end{aligned}$$

Ensuite, t respecte la projection des fibrés. En effet, soit $[[g_0, z_0], z] \in \tilde{L}$, on a :

$$\begin{aligned} \Big(\pi^E \circ t\Big) \Big([[g_0, z_0], z] \Big) &= \pi^E \left([g_0, z_0 z]\right) \\ &= g_0 B = \pi^{(2)}\Big([[g_0, z_0], z] \Big). \end{aligned}$$

De plus, si $[[g_0, z_0], z], [[g_0', z_0'], z'] \in \tilde{L}$ sont dans la même fibre, c'est-à-dire que $g_0 B = g_0' B$, il existe $b \in B$ tel que $g_0' = g_0 b$. On a alors, pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} t\Big(\alpha[[g_0, z_0], z] + [[g_0', z_0'], z']\Big) &= t\Big([[g_0, z_0], \alpha z] + [[g_0 b, z_0'], z']\Big) \\ &= t\Big([[g_0, z_0], \alpha z] + [[g_0, \eta(b) z_0'], z']\Big) \\ &= t\Big([[g_0, 1], \alpha z_0 z] + [[g_0, 1], \eta(b) z_0' z']\Big) \\ &= t\Big([[g_0, 1], \alpha z_0 z + \eta(b) z_0' z']\Big) \\ &= [g_0, \alpha z_0 z + \eta(b) z_0' z'] \\ &= [g_0, \alpha z_0 z] + [g_0, \eta(b) z_0' z'] \\ &= [g_0, \alpha z_0 z] + [g_0', z_0' z'] \\ &= t\Big(\alpha[[g_0, z_0] z]\Big) + t\Big([[g_0', z_0'] z']\Big). \end{aligned}$$

On a donc bien la $\mathbb{C}-$linéarité sur les fibres. Il est clair que t est surjective puisque pour tout $[g, z] \in E_\eta$, $t([[g, 1], z]) = [g, z]$. Elle est, en outre, injective. En effet, si $[[g_0, z_0], z], [[g_0', z_0'], z'] \in \tilde{L}$ ont la même image par t, il existe $b \in B$ tel que $g_0' = g_0 b$ et on a alors $z_0 z = \eta(b) z_0' z'$, ce qui implique

$$\begin{aligned} [[g_0', z_0'], z'] &= [[g_0, 1], \eta(b) z_0' z'] = [[g_0, 1], z_0 z] \\ &= [[g_0, z_0], z]. \end{aligned}$$

En prenant une trivialisation de G et en construisant des trivialisations de chaque fibré associé à l'aide de (1.3), on observe que t et son inverse sont des applications lisses, ce qui termine la démonstration. $\square$

Lemme 3.2.11. *L'application*

$$\tilde{p} \ : \ Y \to G \times_\eta U(1) \ ; \ [g, z]_Y \mapsto [g, z]_{\tilde{Y}}$$

est un morphisme surjectif de fibrés $U(1)-$principaux[2].

2. Pour éviter toute confusion, nous désignons ici les relations d'équivalence associées à chaque classe par les indices Y et $\tilde{Y}$: $[g, z]_Y = [gk, \chi(k)^{-1} z]_Y$ pour tout $k \in K$ et $[g, z]_{\tilde{Y}} = [gb, \eta(b)^{-1} z]_{\tilde{Y}}$ pour tout $b \in B$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi"'] & G \times_\eta U(1) \arrow[d, "\pi^{(1)}"] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "p"] & Q \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'application $\tilde{p}$ est bien définie puisque

$$\begin{aligned} \tilde{p}\Big([gk, \chi(k)^{-1}z]_Y\Big) &= [gk, \chi(k)^{-1}z]_{\tilde{Y}} = [gk, \eta(k)^{-1}z]_{\tilde{Y}} \\ &= [g, z]_{\tilde{Y}} = \tilde{p}\Big([g, z]_Y\Big). \end{aligned}$$

Ensuite, si $[g, z] \in Y$ et $z_0 \in U(1)$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{p}\Big([g, z]_Y.z_0\Big) &= [g, zz_0]_{\tilde{Y}} = [g, z]_{\tilde{Y}}.z_0 \\ &= \tilde{p}\Big([g, z]_Y\Big).z_0. \end{aligned}$$

À nouveau, en utilisant des trivialisations locales, on vérifie immédiatement que l'application est lisse. La surjectivité de $\tilde{p}$ est évidente, ce qui termine la démonstration. □

L'application $\tilde{p}$ induit une application linéaire

$$\tilde{p}^\star \ : \ \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right) \to \mathcal{C}^\infty\left(Y, \mathbb{C}\right) \ ; \ \hat{\varphi} \mapsto \hat{\varphi} \circ \tilde{p}.$$

Lemme 3.2.12. *L'application $\tilde{p}^\star$ respecte la $U(1)-$équivariance, et on a donc*

$$\tilde{p}^\star \ : \ \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)} \to \mathcal{C}^\infty\left(Y, \mathbb{C}\right)^{U(1)}.$$

Démonstration. Soit $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)}$. Pour tout $[g, z]_Y \in Y$ et $z_0 \in U(1)$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{p}^\star(\hat{\varphi})\left([g, z]_Y.z_0\right) &= \hat{\varphi}\left(\tilde{p}([g, zz_0]_Y)\right) \\ &= \hat{\varphi}\left([g, zz_0]_{\tilde{Y}}\right) = \hat{\varphi}\left([g, z]_{\tilde{Y}}.z_0\right) \\ &= z_0^{-1}\,\hat{\varphi}\left([g, z]_{\tilde{Y}}\right) \\ &= z_0^{-1}\,\tilde{p}^\star(\hat{\varphi})\left([g, z]_Y\right). \end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\tilde{p}^\star(\hat{\varphi}) \in \mathcal{C}^\infty\left(Y, \mathbb{C}\right)^{U(1)}$. □

Puisqu'il y a une bijection entre l'ensemble des applications lisses $U(1)-$équivariantes sur un fibré $U(1)-$principal et l'ensemble des sections lisses du fibré en droites complexes associé, l'application linéaire $\tilde{p}^\star$ induit une application linéaire, encore notée $\tilde{p}^\star$

$$\tilde{p}^\star \ : \ \Gamma^\infty\left(\left(G \times_\eta U(1)\right) \times_{U(1)} \mathbb{C}\right) \to \Gamma^\infty\left(Y \times_{U(1)} \mathbb{C}\right).$$

Par l'isomorphisme (3.2.2), on a un isomorphisme entre sections

$$t^\star \ : \ \Gamma^\infty\left(E_\eta\right) \to \Gamma^\infty\left(\left(G \times_\eta U(1)\right) \times_{U(1)} \mathbb{C}\right) \ ; \ s \mapsto s \circ t$$

à l'aide duquel on construit finalement une application linéaire

$$F := \tilde{p}^\star \circ t^\star \ : \ \Gamma^\infty\left(E_\eta\right) \to \Gamma^\infty\left(Y \times_{U(1)} \mathbb{C}\right).$$

Proposition 3.2.13. *L'application F est une bijection linéaire de $\Gamma^{\infty}(E_\eta)$ dans l'espace de Planck.*

Démonstration. Rappelons qu'une section $s : \mathcal{O} \to Y \times_{U(1)} \mathbb{C}$ est dans l'espace de Planck si elle est polarisée pour $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire si pour tout champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$ lisse et polarisé $\Xi \in V_{\mathfrak{L}}(\mathcal{O})$, on a :

$$\nabla_{\Xi} s \quad = \quad 0.$$

Si on désigne par $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(Y, \mathbb{C})^{U(1)}$ la fonction $U(1)-$équivariante correspondant à s, la condition de polarisation s'exprime comme

$$\bar{\Xi} \cdot \varphi \quad = \quad 0,$$

où $\bar{\Xi}$ est le champ de vecteurs tangents sur Y donné par le relèvement de Ξ horizontal pour ϖ. Ceci est équivalent à ce que, pour tout $[g,z]_Y \in Y$, $\Xi \in \mathfrak{L}_{\pi([g,z])}$:

$$\varphi_{*_{[g,z]}}\left(\bar{\Xi}\right) \quad = \quad 0.$$

1. *L'image de F est incluse dans l'espace de Planck.*
   Soit une section $S \in \Gamma^{\infty}(E_\eta)$ et $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{\infty}(G \times_\eta U(1), \mathbb{C})^{U(1)}$ la fonction $U(1)-$équivariante correspondant à la section $t^{\star}(S)$. Notons $\varphi := \tilde{p}^{\star}(\hat{\varphi})$, nous devons vérifier que la section correspondant à cette fonction $U(1)-$équivariante est dans l'espace de Planck, c'est-à-dire que (3.2.2) est vérifiée. Puisque l'application $\tilde{p}$ est un morphisme de fibré $U(1)-$principaux (lemme 3.2.11), on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} & \\ Y \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi"'] & & G \times_\eta U(1) \arrow[ul, "\hat{\varphi}"'] \arrow[d, "\pi^{(1)}"] \\ \mathcal{O} \arrow[rr, "p"] & & Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C} & \\ TY \arrow[ur, "\varphi_*"] \arrow[rr, "\tilde{p}_*"] \arrow[d, "\pi_*"'] & & T(G \times_\eta U(1)) \arrow[ul, "\hat{\varphi}_*"'] \arrow[d, "\pi^{(1)}_*"] \\ T\mathcal{O} \arrow[rr, "p_*"] & & TQ \end{tikzcd}$$

   Soient $[g,z]_Y \in Y$ et $\bar{\Xi}$ le relèvement horizontal à Y d'un vecteur $\Xi \in \mathfrak{L}_{\pi([g,z])}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right) &= \left(\tilde{p}^{\star}(\hat{\varphi})\right)_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right) \\ &= \left(\hat{\varphi} \circ \tilde{p}\right)_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right) \\ &= \hat{\varphi}_{*_{[g,z]_{\tilde{Y}}}}\left(\tilde{p}_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right)\right). \end{aligned}$$

   Or, on sait aussi que

$$p_{*_{\mathrm{Ad}^{\flat}_g(\xi_0)}}\left(\pi_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right)\right) = 0$$

   par définition du relevé horizontal et parce que la distribution $\mathfrak{L}$ est tangente aux fibres de $p : \mathcal{O} \to Q$. Puisque les diagrammes précédents commutent, cela implique que

$$\pi^{(1)}_{*_{[g,z]_{\tilde{Y}}}}\left(\tilde{p}_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right)\right) = 0$$

   et donc $\tilde{p}_{*_{[g,z]_Y}}\left(\bar{\Xi}\right) \in \ker\left(\pi^{(1)}_{*_{[g,z]_{\tilde{Y}}}}\right)$, qui est constitué des vecteurs tangents à la fibre en cercle de $\tilde{Y}$. $\tilde{p}$ étant un morphisme de fibrés $U(1)-$principaux, il respecte les fibres en cercles de Y et $\tilde{Y}$. Puisque $\bar{\Xi}$ est le relevé horizontal d'un vecteur non nul sur $\mathcal{O}$, il n'est pas tangent à la fibre en cercle de Y, et, au vu des considérations précédentes, $\tilde{p}_{*[g,z]_Y}\left(\tilde{\Xi}\right) = 0$ [3], ce qui implique finalement que :

$$\varphi_{*[g,z]_Y}\left(\tilde{\Xi}\right) \quad = \quad 0.$$

2. *F est injective.*
Soient deux sections $S_1, S_2 \in \Gamma^\infty(E_\eta)$ telles que $F(S_1) = F(S_2)$. Notons

$$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)}$$

les fonctions $U(1)-$équivariantes correspondant aux sections $t^\star(S_1)$ et $t^\star(S_2)$ respectivement. Par hypothèse, on a, pour tout $[g,z]_Y \in Y$:

$$\varphi_1\left(\tilde{p}\left([g,z]_Y\right)\right) \quad = \quad \varphi_2\left(\tilde{p}\left([g,z]_Y\right)\right).$$

Puisque $\tilde{p}$ est surjective, $\varphi_1 = \varphi_2$ et, puisque $t^\star$ est un isomorphisme, $S_1 = S_2$.

3. *F est surjective.*
Soit s une section de l'espace de Planck, et notons $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})^{U(1)}$ la fonction équivariante correspondante. Définissons $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)}$ par :

$$\hat{\varphi}\left([g,z]_{\tilde{Y}}\right) \quad := \quad \varphi\left([g,z]_Y\right), \qquad \forall [g,z]_{\tilde{Y}} \in \tilde{Y},$$

où $[g,z]_Y \in Y$ est tel que $\tilde{p}([g,z]_Y) = [g,z]_{\tilde{Y}}$. Il faut donc montrer que $\hat{\varphi}$ est bien définie car, si $b \in B$, on a $[gb, \eta(b)^{-1}z]_{\tilde{Y}} = [g,z]_{\tilde{Y}}$, mais il n'est pas vrai en général que $[gb, \eta(b)^{-1}z]_Y = [g,z]_Y$. Pour cela, nous avons besoin du lemme 3.2.14 que nous démontrerons ultérieurement dans un souci de clarté. Puisque φ est la fonction $U(1)-$équivariante correspondant à une section de l'espace de Planck, le lemme 3.2.14 implique que :

$$\varphi\left([gb, \eta(b)^{-1}z]_Y\right) \quad = \quad \eta(b)^{-1}\,\varphi\left([g, \eta(b)^{-1}z]_Y\right).$$

En utilisant la $U(1)-$équivariance de φ, on obtient finalement :

$$\varphi\left([gb, \eta(b)^{-1}z]_Y\right) \quad = \quad \eta(b)\eta(b)^{-1}\,\varphi\left([g,z]_Y\right) = \varphi\left([g,z]_Y\right),$$

ce qui montre que $\hat{\varphi}$ est bien définie. On a évidemment $\varphi = \tilde{p}^\star(\hat{\varphi})$. Puisque $t^\star$ est un isomorphisme, il existe une section $S \in \Gamma^\infty(E_\eta)$ telle que $t^\star(S)$ soit la section correspondant à la fonction $\hat{\varphi}$, et on a bien que $F(S) = s$.

$\square$

Lemme 3.2.14. *Soit $s \in \Gamma^\infty(Y \times_\chi \mathbb{C})$ dans l'espace de Planck, et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})^{U(1)}$ la fonction $U(1)-$équivariante correspondante. Alors, pour tout*[4] *$[g,z] \in Y$ et $b \in B$:*

$$\varphi\left([gb, z]\right) \quad = \quad \eta(b)^{-1}\varphi\left([g,z]\right).$$

Démonstration. Soient $[g,z] \in Y$ et $b \in B$.
L'idée est de construire une courbe de $[g,z]$ à $[gb,z]$ et d'étudier la variation de φ le long de cette courbe. Si les vecteurs tangents à la courbe sont dans la polarisation, φ sera constante puisqu'elle satisfait la condition de Planck. Cependant, puisque $\eta(b)$ n'est pas nécessairement égal à 1, ces vecteurs tangents ne sont pas en général des vecteurs de la polarisation, ce qui va

3. Précisons qu'on peut également obtenir ce résultat par un calcul explicite en remarquant que $\tilde{p}_{*[g,z]_Y}\left(X^*_{[g,z]}\right) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$, c'est-à-dire si et seulement si $X^*_{[g,z]}$ est le relevé horizontal d'un vecteur de $\mathfrak{L}$.

4. Nous omettons l'indice Y car nous n'utiliserons pas la classe d'équivalence $[.,.]_{\tilde{Y}}$ dans cette démonstration et il n'y a donc pas de risque de confusion.

demander un peu de travail.

Avant toute chose, introduisons les ensembles suivants, qui permettront de décomposer b en facteurs s'exprimant comme des exponentielle et suffisamment petits. Puisque B est fermé dans G, c'est un sous-groupe de Lie (théorème 1.2.8). Soit $\mathfrak{U}'$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{b}$ tel que $\exp|'_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U}' \to U' := \exp(\mathfrak{U}')$ soit un difféomorphisme (théorème 1.2.12). Soient $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$ une boule ouverte de centre 0 et $U := \exp(\mathfrak{U})$. $\exp|_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to U$ est encore un difféomorphisme. Par l'hypothèse 3.2.2(iii), il existe $X_0 \in \mathfrak{k}$ tel que $\langle \xi_0, X_0 \rangle = 1$. Il existe en outre $l \in \mathbb{R}^*$ tel que $-lX_0, lX_0 \in \mathfrak{U}$. Posons ensuite

$$\mathfrak{V} \quad := \quad \{X \in \mathfrak{U} \mid -l < \langle \xi_0, X \rangle < l\}$$

qui est un voisinage ouvert de 0 contenu dans $\mathfrak{U}$. Il est en effet ouvert comme intersection d'un ouvert avec la préimage d'un ouvert par une application continue. $V := \exp(\mathfrak{V})$ est un voisinage ouvert du neutre de B et il engendre donc B (théorème 1.2.11). Le reste de la démonstration se fait en trois cas, chacun utilisant le précédent.

1. Supposons que $b = \exp(X)$ pour $X \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$.
   On a :
   $$\begin{aligned} [gb, z] &= g\exp(X)g^{-1}.[g,z] \\ &= \exp\left(\mathrm{Ad}_g(X)\right).[g,z]. \end{aligned}$$
   Considérons la courbe dans Y donnée par :
   $$\gamma \ : \ [0,1] \to Y \ ; \ t \mapsto \exp\left(t\mathrm{Ad}_g(X)\right).[g,z].$$
   Elle est telle que $\gamma(0) = [g,z]$ et $\gamma(1) = [gb,z]$. Les vecteurs tangents à γ sont donnés, pour $t \in [0,1]$, par :
   $$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_0 \exp\left((t+s)\mathrm{Ad}_g(X)\right).[g,z] &= \frac{d}{ds}\Big|_0 \exp\left(s\mathrm{Ad}_g(X)\right).\left[\exp\left(t\mathrm{Ad}_g(X)\right)g, z\right] \\ &= -\left(\mathrm{Ad}_g(X)\right)^*_{[\exp(t\mathrm{Ad}_g(X))g,z]}. \end{aligned}$$
   Ces vecteurs sont dans $\bar{\mathfrak{L}}$. En effet, on a :
   $$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{g^{-1}\exp(-t\mathrm{Ad}_g(X))}\mathrm{Ad}_g(X) &= \mathrm{Ad}_{\exp\left(-t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{Ad}_g(X)\right)}(X) \\ &= \mathrm{Ad}_{\exp(-tX)}(X) = X. \end{aligned}$$
   Puisque $X \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$, la proposition 3.2.8 implique que les vecteurs tangents à γ sont dans $\bar{\mathfrak{L}}$. Dès lors, puisque φ satisfait à la condition de Planck, on a :
   $$\frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi\left(\gamma(t)\right) = \varphi_{*_{\gamma(t)}}\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma(t)\right) = 0$$
   et φ est donc constante le long de la courbe γ. En particulier :
   $$\varphi([g,z]) \quad = \quad \varphi([gb,z]).$$

2. Supposons que $b = \exp(X)$ pour $X \in \mathfrak{V} \subset \mathfrak{b}$.
   Posons $a := \langle \xi_0, X \rangle$, ce qui donne $\eta(b) = e^{ia}$. Posons également
   $$\begin{aligned} X_0' &:= aX_0, \\ X' &:= X - X_0'. \end{aligned}$$

Par construction de $\mathfrak{V}$, on a $-l < a < l$ et donc $-X_0, X_0' \in \mathfrak{U}$ puisque $\mathfrak{U}$ est convexe et $-lX_0, lX_0 \in \mathfrak{U}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \xi_0, X' \rangle &= \langle \xi_0, X \rangle - \langle \xi_0, X_0' \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $X' \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$. Notons ensuite que $\mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ est un idéal de $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire que, pour tout $Z \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ et $W \in \mathfrak{b}$, $[W, Z] \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$. En effet, $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie et

$$\langle \xi_0, [W, Z] \rangle = 0$$

puisque $\mathfrak{b}$ est une polarisation affiliée à ξ_0. Puisque $X, X_0' \in \mathfrak{U}$ et que $\exp|_{\mathfrak{U}}$ est un difféomorphisme sur son image, on peut appliquer le théorème de Campbell-Baker-Hausdorff, et il existe un $Z \in \mathfrak{b}$ tel que

$$\exp(Z) = \exp(X' + X_0') \exp(-X_0')$$

donné, puisque $[X' + X_0', -X_0'] = -[X', X_0']$, par

$$\begin{aligned} Z &= X' + X_0' - X_0' - \frac{1}{2}[X', X_0'] \\ &\quad + \frac{1}{12}[X' + X_0', -[X', X_0']] + \frac{1}{12}[-X_0', -[X_0', X']] + \dots, \end{aligned}$$

où la suite de la formule ne contient que des crochets imbriqués de $[X_0', X'] \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$. Le fait que $\mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ soit un idéal de $\mathfrak{b}$ implique que tous ces crochets de la formule précédente sont des éléments de $\mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ et donc $Z \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ comme combinaison linéaire d'éléments du sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$. Finalement, en combinant tout ceci, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi([g \exp(X), z]) &= \varphi([g \exp(X' + aX_0), z]) \\ &= \varphi([g \exp(Z) \exp(X_0'), z]) \\ &= \varphi([g \exp(Z), \chi(\exp(X_0'))z]) \\ &= \varphi\left(\left[g \exp(Z), e^{ia} z\right]\right) \\ &= e^{-ia} \varphi([g \exp(Z), z]) \\ &= \eta(b)^{-1} \varphi([g \exp(Z), z]), \end{aligned}$$

où on a utilisé la $U(1)-$équivariance de φ. En utilisant le fait que $Z \in \mathfrak{b} \cap \ker(\xi_0)$ et la première partie de la preuve, on trouve finalement :

$$\varphi([g \exp(X), z]) = \eta(b)^{-1} \varphi([g, z]).$$

3. Dans le cas général, nous avons vu que V engendre B et il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\{X_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{b}$ tels que

$$b = \prod_{i=1}^{n} \exp(X_i). \tag{3.7}$$

Par induction sur n, la deuxième partie de la preuve implique que

$$\varphi([gb, z]) = \left(\prod_{i=1}^{n} \eta(\exp(X_i))^{-1} \right) \varphi([g, z]).$$

Puisque η est un homomorphisme de groupes de Lie, l'équation (3.7) implique que :

$$\prod_{i=1}^{n} \eta\left(\exp(X_i)\right)^{-1} \quad = \quad \eta\left(b\right)^{-1},$$

ce qui donne en définitive

$$\varphi\left([gb, z]\right) \quad = \quad \eta\left(b\right)^{-1} \varphi\left([g, z]\right).$$

$\square$

Ceci termine de montrer la correspondance entre la quantification des orbites coadjointe que nous avons construite suivant le formalisme de Kostant-Souriau, et la méthode des orbites de Kirillov, du moins en ce qui concerne les espaces considérés. En particulier, la méthode de Kirillov étant purement algébrique, cette équivalence permet de construire des solutions aux équations différentielles correspondant à la condition de polarisation. C'est ce que nous allons illustrer dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Application : groupe de Poincaré en dimension $1+1$

Ce chapitre est destiné à appliquer la construction précédente dans le cas particulier du groupe de Poincaré $SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ en dimension $1+1$. D'un point de vue physique, ce groupe correspond au groupe de symétries d'un système constitué d'une particule relativiste massive et sans spin. La quantification canonique permet de quantifier ce système en considérant les fonctions d'ondes ψ qui satisfont l'équation de Klein-Gordon :

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2\right)\psi \quad = \quad 0.$$

Nous verrons que l'espace des mouvements de ce système correspond à une orbite coadjointe du groupe de Poincaré. Il semble donc intéressant de voir comment l'équation de Klein-Gordon apparaît dans le cadre de la quantification d'une orbite coadjointe que nous avons décrite précédemment. De plus, en utilisant la correspondance entre les approches de Kostant-Souriau et de Kirillov, il sera possible de construire des solutions de l'équation de Klein-Gordon à partir de cette dernière. Signalons cependant que, comme précédemment, nous ne nous intéresserons ici qu'à l'espace sous-tendant la représentation que construit la quantification géométrique, et pas aux opérateurs associés. Indiquons également que plusieurs calculs ont été fait à l'aide de Mathematica©, dont les détails ne sont alors pas donnés ici.

4.1 Groupe de Poincaré

Commençons par quelques rappels, ainsi que la spécification des notations que nous utiliserons dans ce chapitre. L'espace de Minkowski en 2 dimensions est l'espace vectoriel $\mathbb{M}^2 := \mathbb{R}^2 = \rangle\, e_0, e_1 \langle$ muni de la métrique η de signature $(1,-1)$:

$$\eta(e_0, e_0) = 1 = -\eta(e_1, e_1). \tag{4.1}$$

Le groupe $SO(1,1)$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}$ et on a la représentation $R : SO(1,1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$R(a) := \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}, \qquad \forall a \in SO(1,1) \simeq \mathbb{R}.$$

Notons $\rho : \left(\mathrm{Lie}(SO(1,1)) =: \mathfrak{so}(1,1)\right) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ la différentielle de cette représentation en 0. Si on définit $H \in \mathfrak{so}(1,1)$ par

$$\rho(H) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a alors $\mathfrak{so}(1,1) \simeq \mathbb{R}H$. Le groupe de Poincaré est donné par le produit semi-direct de $SO(1,1)$ par $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire par l'ensemble

$$G := SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2 \quad = \quad \Big\{(a,\vec{v}) \mid a \in SO(1,1), \vec{v} \in \mathbb{R}^2\Big\}$$

muni de l'opération de groupe suivante :

$$(a,\vec{v}) \cdot (b,\vec{w}) \quad = \quad (a+b, \vec{v} + R(a)\vec{w})\,.$$

L'inverse d'un élément $(a,\vec{v}) \in G$ est donné par :

$$(a,\vec{v})^{-1} \quad = \quad \Big(-a, -R(-a)\vec{v}\Big).$$

L'algèbre de Lie de G est $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ et l'application exponentielle s'écrit :

$$\exp\,:\,\mathfrak{g} \to G\,;\,(\underline{a},\underline{\vec{v}}) \mapsto \exp\left(\underline{a},\underline{\vec{v}}\right) = \begin{cases} \Big(\underline{a}, \frac{R(\underline{a})-\mathbb{1}}{\rho(\underline{a})}\,\underline{\vec{v}}\Big) & \underline{a} \neq 0, \\ (0,\vec{v}) & \underline{a} = 0. \end{cases}$$

On peut utiliser cette expression pour calculer le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$, ce qui donne, pour $(\underline{a},\underline{\vec{v}})\,,(\underline{b},\underline{\vec{w}}) \in \mathfrak{g}$:

$$[(\underline{a},\underline{\vec{v}})\,,(\underline{b},\underline{\vec{w}})] \quad = \quad (0, \rho(\underline{a})\underline{\vec{w}} - \rho(\underline{b})\underline{\vec{v}})\,.$$

Soit $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0) \neq 0$. Définissons les éléments de $\mathfrak{g}$ suivants :

$$\begin{aligned} H &:= \Big(1,\vec{0}\Big)\,, \\ E &:= \Big(0, \vec{w}_0 + \rho(H)\vec{w}_0\Big), \\ Z &:= (0,\vec{w}_0)\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ces trois vecteurs forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et on a les crochets suivants :

$$\begin{aligned} [H,E] &= E, \\ [H,Z] &= E - Z, \\ [E,Z] &= 0. \end{aligned}$$

À partir de cette base de $\mathfrak{g}$, nous pouvons définir des coordonnées sur G qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 4.1.1. *Soient $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0) \neq 0$, et $H,E,Z \in \mathfrak{g}$ comme dans (4.2). L'application*

$$\Phi_G\,:\,\mathbb{R}^3 \to G\,;\,(x,y,t) \mapsto \exp\left(xH\right)\,\exp\left(yE\right)\,\exp\left(tZ\right)$$

est un difféomorphisme global dont l'inverse est donné par :

$$\Phi_G^{-1}\,:\,G \to \mathbb{R}^3\,;\,(a,\vec{v}) \mapsto \Big(g\,,\,-\frac{1}{\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)}\,\eta\Big(\vec{v}, R(g)\rho(H)\vec{w}_0\Big)\,,\,\frac{v^0 - v^1}{w_0^0 - w_0^1}\,e^g\Big),$$

où, pour un vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, a^i désigne la $i-$ème composante de $\vec{a}$.

Démonstration. Φ_G^{-1} est bien définie car $\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0) \neq 0$, ce qui implique en particulier que $w_0^0 \neq w_0^1$. On calcule explicitement que Φ_G et Φ_G^{-1} sont bien inverses l'une de l'autre, et il est clair que ce sont des applications lisses. ☐

4.2 Quantification des orbites coadjointes massives de G

4.2.1 Action coadjointe de G

L'action adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'écrit, pour tout $(a, \vec{v}) \in G$ et $(\underline{a}, \underline{\vec{v}}) \in \mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}_{(a,\vec{v})}\left(\underline{a}, \underline{\vec{v}}\right) \;=\; \Big(\underline{a}, -\rho(\underline{a})\vec{v} + R(a)\underline{\vec{v}}\Big).$$

Soit ${}^\flat H \in \mathfrak{g}^*$ l'élément du dual de $\mathfrak{g}$ défini par :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^\flat H, H \right\rangle &:= 1, \\ \left\langle {}^\flat H, (\underline{0}, \underline{\vec{v}}) \right\rangle &:= 0 \qquad \forall\, (\underline{0}, \underline{\vec{v}}) \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

On définit ensuite l'homomorphisme :

$$^\flat \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{g}^* \;;\; \vec{v} \mapsto {}^\flat\vec{v},$$

avec ${}^\flat v(H) := 0$ et ${}^\flat v\,(0, \underline{\vec{w}}) := \eta(\vec{v}, \vec{w})$ pour tout $(0, \underline{\vec{w}}) \in \mathfrak{g}$. On a alors la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathfrak{g}^* \;=\; \mathbb{R}\,{}^\flat H \oplus {}^\flat(\mathbb{R}^2).$$

Avec ces notations, l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^\star$ s'écrit, pour tout $(a, \vec{v}) \in G$ et $\lambda{}^\flat H \oplus {}^\flat\vec{w} \in \mathfrak{g}^\star$:

$$\mathrm{Ad}^\flat_{(a,\vec{v})}\Big(\lambda{}^\flat H \oplus {}^\flat\vec{w}\Big) \;=\; \Big(\lambda + \eta(R(a)\vec{w}, \rho(H)\vec{v})\Big){}^\flat H \oplus {}^\flat\Big(R(a)\vec{w}\Big).$$

On remarque que, si $\lambda{}^\flat H \oplus {}^\flat\vec{w}, \lambda'{}^\flat H \oplus {}^\flat\vec{w}' \in \mathfrak{g}^*$ sont dans la même orbite, alors $\eta(\vec{w}, \vec{w}) = \eta(\vec{w}', \vec{w}')$. La quantité[1] $m := \sqrt{\eta(\vec{w}_0, \vec{w}_0)} \in \mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+$ est donc constante tout le long de l'orbite, et nous l'appellerons *masse* de l'orbite. On a les trois types d'orbites suivants :

1. Orbites ponctuelles, données par les points $\mathbb{R}\,{}^\flat H$;
2. Orbites de masse nulle, correspondant aux quatre demi-plans des points :
$$^\flat(e_0 + e_1), \qquad ^\flat(e_0 - e_1), \qquad ^\flat(-e_0 + e_1), \qquad ^\flat(-e_0 - e_1).$$
3. Orbites massives, constituées des cylindres hyperboliques paramétrés par les points suivants :
$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^*\,{}^\flat(e_0), &\qquad \mathbb{R}_+^*\,{}^\flat(e_1), \\ \mathbb{R}_+^*\,{}^\flat(-e_0), &\qquad \mathbb{R}_+^*\,{}^\flat(-e_1). \end{aligned}$$

Nous allons étudier les orbites massive de masse réelle. Fixons un élément $\xi_0 = \lambda_0{}^\flat H \oplus {}^\flat\vec{w}_0 \in \mathfrak{g}^\star$ avec $m^2 = \eta(\vec{w}_0, \vec{w}_0) \neq 0$. Conformément aux notations précédentes, définissons $H, E, Z \in \mathfrak{g}$ comme dans (4.2). Le stabilisateur K de ξ_0 correspond au sous-groupe de Lie de G

$$K \;=\; (0, \mathbb{R}\vec{w}_0)\,.$$

Son algèbre de Lie est donnée par

$$\mathfrak{k} \;=\; \mathbb{R}\,Z,$$

et l'application exponentielle induit un difféomorphisme de $\mathfrak{k}$ sur K : $\exp(tZ) = (0, t\vec{w}_0)$. Dans la suite, nous considérerons les coordonnées sur G données par la proposition 4.1.1. Elles induisent un difféomorphisme global entre la variété quotient G/K et $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi_{G/K} \;:\; \mathbb{R}^2 \to G/K \;;\; (x, y) \mapsto (\pi_G \circ \Phi_G)(x, y, 0) = \exp(xH)\exp(yE)\,K.$$

1. Nous prenons la convention de $\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$ si $a < 0$.

On munit $\mathcal{O}$ de la structure de variété d'espace $G-$homogène de G/K, et on obtient les coordonnées suivantes sur l'orbite :

$$\Phi_{\mathcal{O}} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{O}\,;\,(x,y) \mapsto \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)\exp(yE)}\xi_0 = (\lambda_0 + m^2 y)^\flat H \oplus {}^\flat(R(x)\vec{w}_0). \tag{4.3}$$

Le fibré $\pi^{\mathcal{O}} : G \to \mathcal{O}$ est trivial, une trivialisation étant donnée par

$$\phi^G_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \times K \to G\,;\,\Big((x,y), \exp(tZ)\Big) \mapsto \Phi_G(x,y,t). \tag{4.4}$$

Proposition 4.2.1. *Dans les coordonnées (4.3), l'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}$ s'écrit*

$$\mathrm{Ad}^\flat_{(a,v)}\,(x,y) \quad = \quad \left(x+a\,,\,y+\frac{1}{m^2}\,\eta\Big(R(a+x)\vec{w}_0, \rho(H)\vec{v}\Big)\right).$$

et la forme symplectique de KKS sur $\mathcal{O}$ prend la forme[2]

$$\omega^{\mathcal{O}} = -m^2\,dx \wedge dy. \tag{4.5}$$

Démonstration. L'expression de l'action coadjointe s'obtient par un calcul explicite. Pour déterminer la forme de KKS, il faut exprimer les vecteurs tangents canoniques en termes de champs de vecteurs fondamentaux. Soient ∂_x et ∂_y les vecteurs tangents à $\mathbb{R}^2$ correspondant aux directions x et y respectivement. On calcule :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{O}*(x,y)}(\partial_x) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi_{\mathcal{O}}(x+t,y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp((x+t)H)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(yE)}(\xi_0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tH)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH+yE)}(\xi_0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tH)}\Phi_{\mathcal{O}}(x,y) \\
&= (-H)^*_{\Phi_{\mathcal{O}}(x,y)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{O}*(x,y)}(\partial_y) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi_{\mathcal{O}}(x,y+t) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tE)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(yE)}(\xi_0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(tE)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(-xH)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)}\mathrm{Ad}^\flat_{\exp(yE)}(\xi_0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{Ad}^\flat_{\exp\left(t\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}(E)\right)}\Phi_{\mathcal{O}}(x,y) \\
&= \Big(-\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}(E)\Big)^*_{\Phi_{\mathcal{O}}(x,y)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la définition de la forme de KKS :

$$\begin{aligned}
(\Phi^*_{\mathcal{O}}\omega^{\mathcal{O}})_{(x,y)}(\partial_x,\partial_y) &= \omega^{\mathcal{O}}_{\Phi_{\mathcal{O}}(x,y)}\Big(\Phi_{\mathcal{O}*(x,y)}(\partial_x), \Phi_{\mathcal{O}*(x,y)}(\partial_y)\Big) \\
&= -\Big\langle \Phi_{\mathcal{O}}(x,y), [-H, -\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}(E)]\Big\rangle \\
&= -m^2,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est le résultat d'un calcul explicite. On a donc bien

$$\omega^{\mathcal{O}} := \Phi^*_{\mathcal{O}}\omega^{\mathcal{O}} = -m^2\,dx \wedge dy.$$

□

2. Par abus de langage, nous notons $\Phi^*_{\mathcal{O}}\omega^{\mathcal{O}}$ également $\omega^{\mathcal{O}}$.

4.2.2 Quantification à la Kostant-Souriau de $\mathcal{O}$

Pour quantifier l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ selon la procédure de Kostant-Souriau, nous devons construire un fibré $U(1)-$principal au-dessus de $\mathcal{O}$ et une connexion sur ce fibré, dont la courbure est le pull-back de la forme symplectique de KKS. Pour ce faire, nous allons suivre la construction développée dans le chapitre 3.

Fibré $U(1)$-principal $Y^{\mathcal{O}}$

Commençons par noter que le sous-groupe de Lie K est connexe. On a l'isomorphisme

$$v_{\xi_0} \,:\, \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}\,;\, t\,\vec{w}_0 \mapsto i\langle \xi_0, t\,\vec{w}_0\rangle = it\,\eta(\vec{w}_0, \vec{w}_0) = itm^2,$$

qui s'exponentie en un caractère unitaire de K :

$$\chi \,:\, K \to U(1)\,;\, \exp(t\vec{w}_0) \mapsto e^{itm^2}.$$

Ce caractère induit une action transitive de K sur $U(1)$ selon

$$\exp(t\vec{w}_0)\cdot e^{i\theta} = e^{i\theta + itm^2}.$$

Nous pouvons dès lors construire le fibré vectoriel associé $\pi_{\mathcal{O}}^{Y^{\mathcal{O}}} : Y^{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$, avec

$$Y^{\mathcal{O}} := G \times_K U(1) \quad = \quad \Big\{ [(a, \vec{v})\,, z] \mid (a, \vec{v}) \in SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2, z \in U(1) \Big\}.$$

Conformément à la formule (1.3), on obtient une trivialisation globale de ce fibré associé à partir de la trivialisation (4.4) du fibré principal $G \to \mathcal{O}$:

$$\phi_{\mathcal{O}}^{Y^{\mathcal{O}}} \,:\, \mathcal{O} \times U(1) \to Y^{\mathcal{O}}\,;\, \Big((x,y), z\Big) \mapsto \Big[\phi_{\mathcal{O}}^{G}\Big((x,y), \vec{0}\Big), z\Big].$$

Ceci nous donne des coordonnées sur $Y^{\mathcal{O}}$:

$$\Phi_{Y^{\mathcal{O}}} \,:\, \mathbb{R}^2 \times U(1) \to Y^{\mathcal{O}}\,;\, (x,y,z) \mapsto \phi_{\mathcal{O}}^{Y^{\mathcal{O}}}\Big(\Phi_{\mathcal{O}}(x,y), z\Big). \tag{4.6}$$

Explicitement, on obtient :

$$\Phi_{Y^{\mathcal{O}}}(x,y,z) \quad = \quad \Big[\exp(xH)\exp(yE), z\Big].$$

Connexion sur $Y^{\mathcal{O}}$

La formule (3.6) définit une $1-$forme de connexion ϖ sur $Y^{\mathcal{O}}$ en termes des champs de vecteurs fondamentaux correspondant à l'action à gauche sur $Y^{\mathcal{O}}$ donnée par

$$g_0 \cdot [g, z] \quad = \quad [g_0 g, z].$$

Calculons comment la connexion s'exprime dans les coordonnées (4.6) [3] :

$$\varpi_{(x,y,e^{i\theta})}(\Xi) \quad := \quad \varpi_{\Phi_{Y^{\mathcal{O}}}(x,y,e^{i\theta})}\Big((\Phi_{Y^{\mathcal{O}}})_{*_{(x,y,e^{i\theta})}}(\partial v)\Big),$$

où Ξ est un vecteur tangent de $\mathbb{R}^2 \times U(1)$. Pour ce faire, nous devons exprimer un vecteur tangent $(\Phi_Y)_{*(x,y,e^{i\theta})}(\Xi)$ en termes de champs de vecteurs fondamentaux. Si on note par ∂_x , ∂_y et ∂_θ les

3. À nouveau, par abus de langage, nous notons de la même manière ϖ et son pull-back par $\Phi_{Y^{\mathcal{O}}}$.

vecteurs tangents unitaires correspondant respectivement aux directions x, y et θ, on a :

$$\begin{aligned}
(\Phi_{Y\mathcal{O}})_{*_{(x,y,e^{i\theta})}}(\partial_x) &= \frac{d}{dt}|_0 \,\Phi_{Y\mathcal{O}}\left(x+t, y, e^{i\theta}\right) \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \left[\exp\left((t+x)H\right)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \exp(tH)\cdot\left[\exp(xH)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= (-H)^*_{\left[\exp(xH)\exp(yE),e^{i\theta}\right]}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite utiliser la définition (3.6) de ϖ, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\varpi_{(x,y,e^{i\theta})}(\partial_x) &= -\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)\exp(yE)}\xi_0 \ , -H\rangle \\
&= m^2\, y + \lambda_0.
\end{aligned}$$

De la même manière, on calcule :

$$\begin{aligned}
(\Phi_{Y\mathcal{O}})_{*_{(x,y,e^{i\theta})}}(\partial_y) &= \frac{d}{dt}|_0 \,\Phi_{Y\mathcal{O}}\left(x, y+t, e^{i\theta}\right) \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \left[\exp(xH)\exp(tE)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \exp(xH)\exp(tE)\exp(-xH)\cdot\left[\exp(xH)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \exp\Big(-t\Big(-\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}E\Big)\Big)\cdot\left[\exp(xH)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \Big(-\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}E\Big)^*_{\left[\exp(xH)\exp(yE),e^{i\theta}\right]}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varpi_{(x,y,e^{i\theta})}(\partial_y) &= -\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)\exp(yE)}\xi_0 \ , -\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}E\rangle \\
&= m^2.
\end{aligned}$$

Et finalement, on a :

$$\begin{aligned}
(\Phi_{Y\mathcal{O}})_{*_{(x,y,e^{i\theta})}}(\partial_\theta) &= \frac{d}{dt}|_0 \,\Phi_{Y\mathcal{O}}\left(x, y, e^{i(\theta+t)}\right) \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \left[\exp(xH)\exp(yE), e^{it}e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \left[\exp(xH)\exp(yE)\exp\left(\frac{t}{\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)^2}Z\right), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \left[\exp(xH)\exp\left(\frac{t}{\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)^2}Z\right)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \exp(xH)\exp\left(\frac{t}{\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)^2}Z\right)\exp(-xH)\cdot\left[\exp(xH)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \frac{d}{dt}|_0 \exp\Big(-t\Big(-\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}\frac{Z}{\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)^2}\Big)\Big)\cdot\left[\exp(xH)\exp(yE), e^{i\theta}\right] \\
&= \left(-\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}\frac{Z}{m^2}\right)^*_{\left[\exp(xH)\exp(yE),e^{i\theta}\right]}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $e^{it} = \chi\Big(\exp(tZ/\eta(\vec{w}_0,\vec{w}_0)^2)\Big)$ et que $[E,Z]=0$. La connexion s'évalue donc comme suit :

$$\begin{aligned}\varpi_{(x,y,e^{i\theta})}(\partial_\theta) &= -\langle \mathrm{Ad}^\flat_{\exp(xH)\exp(yE)}\xi_0 \ , -\mathrm{Ad}_{\exp(xH)}\frac{Z}{m^2}\rangle \\ &= 1.\end{aligned}$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient :

$$\varpi_{(x,y,e^{i\theta})} = \Big(m^2\, y + \lambda_0\Big)\, dx + m^2\, dy + d\theta.$$

On calcule ensuite facilement que

$$d\varpi = -m^2\, dx \wedge dy.$$

Comme attendu, on retrouve bien le pull-back $\pi_Y^*(\omega^{\mathcal{O}})$ sur $Y^{\mathcal{O}}$ de la forme symplectique de KKS (4.5) sur $\mathcal{O}$.

Polarisation sur $\mathcal{O}$

Considérons la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b} := 0 \oplus \mathbb{R}^2$ de $\mathfrak{g}$. C'est une polarisation réelle affiliée à ξ_0. En effet, pour tout $X, W \in \mathbb{R}^2$, $\langle \xi_0, [X,W]\rangle = \langle \xi_0, 0\rangle = 0$ et $\mathfrak{b}$ est maximale pour cette propriété puisque une sous-algèbre de Lie strictement plus grande que $\mathfrak{b}$ serait $\mathfrak{g}$ tout entière sur laquelle $\langle \xi_0, [\cdot,\cdot]\rangle$ ne s'annule pas identiquement. Soit B le sous-groupe de Lie de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{b}$. Les coordonnées globales sur G montrent que B est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ par $(y,t) \mapsto \exp(yE)\exp(tZ)$ et qu'il est fermé dans G. Soit $Q = SO(1,1)$, par le lemme 4.1.1, on a la décomposition suivante :

$$G = QB.$$

Puisque $K \subset B$, on peut considérer le fibré $B-$principal :

$$\pi_{\mathcal{O}} \,:\, \mathcal{O} \to Q \simeq G/B\,;\, \mathrm{Ad}^\flat_g\xi_0 \mapsto gB.$$

En utilisant les coordonnées $\Phi_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$, la projection s'écrit $\pi_{\mathcal{O}}(x,y) = x$, et la distribution tangente aux fibres est donc générée par le vecteur tangent ∂_y. Soit $\bar{\mathfrak{L}}$ le relèvement de $\mathfrak{L}$ à $Y^{\mathcal{O}}$ horizontal pour ϖ. Puisque

$$\begin{aligned}(\pi_Y)_{*((x,y),z)}\Big(\partial_y - m^2\partial_\theta\Big) &= \partial_y, \\ \varpi_{((x,y),z)}\Big(\partial_y - m^2\partial_\theta\Big) &= m^2 - m^2 = 0,\end{aligned}$$

$\bar{\mathfrak{L}}$ est donnée, en un point $\xi \in Y^{\mathcal{O}}$, par :

$$\Big(\bar{\mathfrak{L}}\Big)_\xi = \mathbb{R}\Big(\partial_y - m^2\partial_\theta\Big).$$

Espace de Planck

L'espace de Planck $\mathcal{H}$ correspondant à la polarisation $\bar{\mathfrak{L}}$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions φ lisses complexes $U(1)-$équivariantes sur $Y^{\mathcal{O}}$ qui sont constantes le long des variétés intégrales de $\bar{\mathfrak{L}}$, c'est-à-dire telles que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi \in \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}) \\ \text{(ii)} & \varphi(x,y,z) = z^{-1}\,\varphi(x,y,1) \\ \text{(iii)} & X\cdot\varphi = 0, \qquad \forall X \in \bar{\mathfrak{L}} \end{cases} \tag{4.7}$$

La condition (ii) implique que :

$$\varphi(x,y,z) \quad = \quad z^{-1}\,\tilde{\varphi}(x,y),$$

avec $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{O},\mathbb{C})$. Soit $\Xi = a\left(\partial_y - m^2\partial_\theta\right) \in \bar{\mathfrak{L}}$, $(a \neq 0)$. La condition (iii) donne :

$$\begin{aligned} 0 &= X \cdot \varphi(x,y,z) \\ &= \frac{d}{dt}|_0\, z^{-1} e^{itam^2}\,\tilde{\varphi}(x,y+ta) \\ &= a\,z^{-1}\,\partial_y\tilde{\varphi}(x,y) + iam^2 z^{-1}\,\tilde{\varphi}(x,y), \\ 0 &= \partial_y\tilde{\varphi}(x,y) + im^2\,\tilde{\varphi}(x,y). \end{aligned}$$

Cette équation différentielle est facilement résolue, et on trouve :

$$\tilde{\varphi}(x,y) \quad = \quad \hat{\varphi}(x)\,e^{-im^2\,y}, \qquad \text{with } \hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{\infty}(Q,\mathbb{C}).$$

L'espace de Planck s'écrit donc comme :

$$\mathcal{H} \quad \simeq \quad \left\{\hat{\varphi}(x)\,z^{-1}\,e^{-im^2\,y} \mid \hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{\infty}(Q,\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^{\infty}(Y,\mathbb{C}).$$

4.2.3 Représentation induite de Kirillov associée à $\mathcal{O}$

Nous allons maintenant construire l'espace considéré pour la représentation de Kirillov associée à l'orbite coadjointe, décrite dans la section 3.1. La polarisation $\mathfrak{b}$ introduite dans les sections précédentes correspond à la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ générée par les éléments E et Z de $\mathfrak{g}$. On a l'homomorphisme d'algèbres de Lie

$$v_{\xi_0} \,:\, \mathfrak{b} \to \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}\,;\, yE + tZ \mapsto i\langle \xi_0, yE + tZ\rangle = i(t+y)m^2.$$

Il s'exponentie clairement en un caractère unitaire η de B par la formule suivante :

$$\eta : B \to U(1)\;;\; \exp(yE)\exp(tZ) \mapsto e^{i(t+y)m^2}.$$

Considérons le fibré vectoriel associé

$$(E_\eta := G \times_\eta \mathbb{C}) \to G/B \simeq Q$$

et sa trivialisation

$$\phi_Q^{E_\eta} \,:\, Q \times \mathbb{C} \to E_\eta\;;\; (x,z) \mapsto [\exp(xH), z].$$

L'ensemble $\mathcal{H}_K$ des sections lisses ψ de E_η est donc isomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}^{\infty}\left(Q,\mathbb{C}\right)$ des fonctions $\hat{\psi}$ complexes lisses sur Q. En effet, tout $\psi \in \mathcal{H}_K$ doit être de la forme

$$\psi : Q \to L_\eta\;;\; x \mapsto [\exp(xH), \hat{\psi}(x)],$$

avec $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{\infty}\left(Q,\mathbb{C}\right)$, ce qui fait que :

$$\mathcal{H}_K \quad \simeq \quad \mathcal{C}^{\infty}\left(Q,\mathbb{C}\right). \tag{4.8}$$

4.2.4 Équivalence entre les méthodes

Soit $\psi \in \mathcal{H}_K$. Nous allons associer à ψ un élément $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C})^{U(1)}$ à l'aide de l'équivalence décrite dans le chapitre 3. Tout d'abord, le fibré $U(1)$-principal $G \times_\eta U(1) \to Q$ admet la trivialisation suivante :

$$\phi_Q^{G\times_\eta U(1)} : Q \times U(1) \to G \times_\eta U(1)\,;\ (x,z) \mapsto [\exp(xH), z]\,.$$

Le fibré en droites complexes associé $L_\eta := (G \times_\eta U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C}$ est également trivial :

$$\phi_Q^{L_\eta} : Q \times \mathbb{C} \to L_\eta\,;\ (x,z) \mapsto [[\exp(xH), 1], z]\,.$$

On a l'isomorphisme entre fibrés en droites complexes qui s'exprime, en coordonnées, comme :

$$t : L_\eta \to E_\eta\ ;\ (x,z) \mapsto (x,z).$$

Ensuite, nous avons le morphisme de fibrés $U(1)-$principaux $\tilde{p} : Y^{\mathcal{O}} \to G \times_\chi U(1) \simeq Q \times U(1)$ donné, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in U(1)$, par :

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x,y,z) &= \tilde{p}\left([\exp(xH)\exp(yE), z]\right)\\ &= [\exp(xH)\exp(yE), z]\\ &= [\exp(xH), \eta(\exp(yE))z]\\ &= (x, \eta(\exp(yE))z)\\ &= \left(x, e^{im^2\,y}\,z\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la section ψ de E_η, associée à une fonction lisse $\hat{\psi}$ par 4.8, définit une section $\tilde{\psi}$ de L_η par $\tilde{\psi} = t^{-1} \circ \psi$:

$$\tilde{\psi} : Q \to L_\eta\ ;\ x \mapsto [[\exp(xH), 1], \hat{\psi}(x)]$$

La fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)}$ associée à cette section est donnée, pour $x \in Q$ et $z \in U(1)$, par :

$$\begin{aligned}[[\exp(xH), 1], \hat{\psi}(x)] &= \tilde{\psi}(x)\\ &= [[\exp(xH), 1], \tilde{\varphi}(x,1)]\\ &= [[\exp(xH), z], z^{-1}\tilde{\varphi}(x,1)]\\ &= [[\exp(xH), z], \tilde{\varphi}(x,z)],\end{aligned}$$

ce qui donne $\tilde{\varphi}(x,z) = z^{-1}\hat{\psi}(x)$. Finalement, en composant avec $\tilde{p}$, on obtient une fonction lisse sur $Y^{\mathcal{O}}$ donnée, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in U(1)$, par :

$$\varphi(x,y,z) = e^{-im^2\,y}\,z^{-1}\,\hat{\psi}(x).$$

Comme attendu, il s'agit bien d'un élément de l'espace de Planck.

À l'inverse, si $\varphi(x,y,z) = e^{-im^2\,y}\,z^{-1}\,\hat{\varphi}(x)$ est dans l'espace de Planck, on vérifie qu'elle induit bien une fonction $\tilde{\varphi}$ lisse complexe sur $G \times_\eta U(1)$. En effet, soient $(x,y,z), (x',y',z') \in Y^{\mathcal{O}}$ tels que $\tilde{p}(x,y,z) = \tilde{p}(x',y',z')$, on doit avoir $x = x'$ et $z' = e^{im^2(y-y')}z$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x',y',z') &= z^{-1}e^{-im^2(y-y')}e^{-im^2y'}\hat{\varphi}(x)\\ &= \varphi(x,y,z).\end{aligned}$$

La fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty\left(G \times_\eta U(1), \mathbb{C}\right)^{U(1)}$ induite est donc $\tilde{\varphi}(x,z) = z^{-1}\hat{\varphi}(x)$. En inversant la construction précédente, on obtient une section lisse de E_η :

$$\psi : Q \to L_\eta\ ;\ x \mapsto [\exp(xH), \hat{\varphi}(x)].$$

4.3 Quantification de la particule libre relativiste

Dans sa description de la quantification géométrique des groupes dynamiques, Souriau [1] montre comment retrouver les équations d'ondes habituelles de la mécanique quantique. L'objectif de cette section est de comprendre comment l'équation de Klein-Gordon apparaît à partir de la quantification des orbites coadjointes du groupe de Poincaré. En utilisant l'équivalence entre le formalisme de Kostant-Souriau et celui de Kirillov, nous pourrons construire des solutions de l'équation de Klein-Gordon à partir de l'espace de Kirillov.

Nous commencerons par montrer comment la dynamique relativiste s'exprime en termes symplectiques. Souriau [1] propose, en effet, de prendre comme point de départ la variété des mouvements d'un système physique, qui forme une variété symplectique. L'idée est ensuite que, comme l'ont montré tout d'abord Kostant et Souriau, une variété symplectique est, sous certaines conditions, une orbite coadjointe. C'est le cas ici, et nous devrons relier la variété des mouvements avec l'orbite coadjointe correspondante. Pour ce qui est de la quantification, nous verrons que, pour retrouver l'équation de Klein-Gordon, il faut choisir une $1-$forme de connexion particulière, et il s'agira donc ensuite de trouver un quantomorphisme entre la quantification obtenue et celle que nous avons construite ci-dessus.

4.3.1 Mécanique relativiste

Nous allons considérer une particule relativiste de masse $m > 0$ sans spin. Classiquement, un état de cette particule est spécifié par un évènement de l'espace-temps relativiste et par son vecteur énergie-impulsion. L'ensemble de tous ces états est appelé *espace d'évolution* et est donné par la $3-$variété

$$V := \mathbb{M}^2 \times H,$$

où $\mathbb{M}^2$ est l'espace de Minkowski de dimension 2, muni de la métrique (4.1), et H est l'hyperboloïde massive d'énergie positive

$$H := \Big\{(E, p) \in \mathbb{M}^2 \,|\, E^2 - p^2 = m^2, E > 0\Big\}.$$

Un élément $\vec{p} \in H$ étant univoquement déterminé par son impulsion $p \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{p} = (\sqrt{p^2 + m^2}, p)$, nous identifierons V avec $\mathbb{R}^3$ selon les coordonnées suivantes :

$$\mathbb{R}^3 \to V \;;\; (t, x, p) \mapsto \Big((t, x), \vec{p}\Big).$$

La dynamique du système est donnée par l'hamiltonien $h(t, x, p) = \sqrt{m^2 + p^2}$ et les équations d'Hamilton correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p} &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}}. \end{aligned}$$

La solution à ce système d'équations différentielles correspondant à la condition initiale (t_0, x_0, p_0) donne la trajectoire suivante dans l'espace d'évolution :

$$\left\{ \left(t \,,\, x_0 + \frac{p_0}{\sqrt{m^2 + p_0^2}}\,(t - t_0)\,,\, p_0 \right) \;|\; t \in \mathbb{R} \right\} \subset V.$$

L'ensemble U de toutes ces trajectoires est appelé l'*espace des mouvements*. Il est donné par la variété quotient

$$U := V/\sim,$$

où $(\vec{x},\vec{p}) \sim (\vec{y},\vec{q})$ si et seulement si ils appartiennent à la même trajectoire, c'est-à-dire si et seulement si $(\vec{y},\vec{q}) = (\vec{x}+\lambda\vec{p},\vec{p})$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Si on fixe $t_0 = 0$, puisque l'ensemble des trajectoires est en bijection avec l'ensemble des conditions initiales $(0,r,q)$, on voit que $U \simeq \mathbb{R}\times H \simeq \mathbb{R}^2$ et on a la projection

$$\pi_U^V \ : \ V \to U \, ; \, (t,x,p) \mapsto (r,q) := \left(x - \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}}\ t\ ,\ p \right).$$

Structure symplectique

Cette dynamique peut être décrite d'un point de vue symplectique. À cet effet, considérons la $2-$forme suivante sur V :

$$\begin{aligned} \omega^V &= dt \wedge dE - dx \wedge dp \\ &= \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}}\, dt \wedge dp - dx \wedge dp. \end{aligned}$$

On vérifie directement que ω^V est fermée et dégénérée : son noyau (unidimensionnel) correspond précisément aux vecteurs tangents à une trajectoire. Ceci donne à V une structure de variété pré-symplectique, et ω^V induit une $2-$forme sur U bien définie :

$$\omega^U \;=\; -\,(dr \wedge dq)$$

telle que

$$\omega^V \;=\; (\pi_U^V)^* \omega^U.$$

On vérifie que ω^U est fermée et non-dégénérée, ce qui donne à U une structure symplectique.

Symétries

Le groupe de Poincaré agit à gauche de manière lisse sur l'espace d'évolution par translations spatio-temporelles et boosts de Lorentz. Notons cette action par $\tau_\cdot^V \ : \ G \times V \to V$; elle est donnée, pour $(a,\vec{v}) \in SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ et $(\vec{x},\vec{p}) \in V$, par :

$$\tau_{(a,\vec{v})}^V(\vec{x},\vec{p}) \;=\; \Big(R(a)\vec{x}+\vec{v}, R(a)\vec{p} \Big).$$

C'est une symétrie du système dynamique dans le sens où l'image d'une trajectoire par une telle transformation est encore une trajectoire. Dès lors, τ^V induit une action lisse du groupe de Poincaré sur l'espace des mouvements :

$$\tau_\cdot^U \ : \ G \times U \to U \ ; \ \Big((a,\vec{v})\ ,\ (r,q) \Big) \mapsto \Big(\pi_U^V \circ \tau_{(a,\vec{v})}^V \Big) \Big(\pi_U^{V\,-1}(r,q) \Big)\,.$$

D'un point de vue symplectique, cela se traduit par le fait que le groupe de Poincaré agit par symplectomorphismes, c'est-à-dire que, pour tout $(a,\vec{v}) \in SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$:

$$(\tau_{(a,\vec{v})}^V)^* \omega^V = \omega^V \quad \text{ et } \quad (\tau_{(a,\vec{v})}^U)^* \omega^U = \omega^U.$$

4.3.2 Fibré quantique

Nous allons maintenant construire un fibré $U(1)-$principal $\pi_U^Y : Y \to U$ muni d'une $1-$forme de connexion dont la courbure est le pull-back sur Y de ω^U. Cependant, afin de pouvoir exprimer nos résultats en fonction des coordonnées spatio-temporelles, nous commencerons par construire un tel fibré au-dessus de V. Dans le diagramme suivant, les projections verticales correspondent aux fibres en cercle, tandis que les projections horizontales correspondent aux trajectoires.

$$\begin{tikzcd}
(W,\varpi^W) \arrow[r, "\pi_Y^W"] \arrow[d, "\pi_V^W"'] & (Y,\varpi^Y) \arrow[d, "\pi_U^Y"] \\
(V,\omega^V) \arrow[r, "\pi_U^V"'] & (U,\omega^U)
\end{tikzcd}$$

Puisque tout fibré principal au-dessus de $\mathbb{R}^n$ est trivial, considérons $W = V \times U(1)$ avec la projection canonique :

$$\pi_V^W \ : \ W \to V \ ; \ (t,x,p,\theta) \mapsto (t,x,p).$$

Pour qu'une $1-$forme sur ce fibré trivial soit une $1-$forme de connexion, elle doit nécessairement être de la forme

$$\varpi^W \quad = \quad (\pi_V^W)^* \varpi^V + d\theta,$$

où ϖ^V est une $1-$forme quelconque sur V. Puisque la courbure de ϖ^W doit être le pull-back de ω^V, on doit avoir

$$d\varpi^V \quad = \quad \omega^V.$$

La $1-$forme ϖ^V n'est donc définie que modulo l'addition de la différentielle d'une fonction sur V. Nous reviendrons sur cette liberté plus tard, et nous choisirons ici la forme suivante :

$$\varpi^V_{(t,x,p)} \quad = \quad -\sqrt{p^2+m^2}\, dt + p\, dx.$$

Un calcul direct montre qu'elle est invariante sous l'action du groupe de Poincaré. De cette façon, si on relève cette action à W comme suit :

$$\tau^W_{\cdot} \ : \ G \times W \to W \ ; \ \Big((a,\vec{v}) \ , \ (t,x,p,\theta) \Big) \mapsto \Big(\tau^V_{(a,\vec{v})}(\vec{x},p), \theta \Big),$$

ϖ^W est alors Poincaré-invariante. On construit ensuite le fibré Y en prenant le quotient de W par le feuilletage caractéristique de ϖ^V, engendré par $\ker(\varpi^W) \cap \ker(d\varpi^W)$. Ce dernier est donné par les trajectoires

$$\left\{ \left(t\, , \, x_0 + \frac{p_0}{\sqrt{m^2+p_0^2}}\,(t-t_0)\, , \, p_0\, , \, \theta_0 + \frac{m^2}{\sqrt{m^2+p_0^2}}\,(t-t_0) \right) \ \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset W.$$

Ceci donne $Y \simeq \mathbb{R}^2 \times U(1)$, et, en prenant $t_0 = 0$, on a la projection

$$\pi_Y^W \ : \ W \to Y \, ; \, (t,x,p,\theta) \mapsto (r,q,\varphi) := \left(x - \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}}\, t \ , \ p \ , \ \theta - \frac{m^2}{\sqrt{m^2+p_0^2}}\, t \right).$$

ϖ^W induit une $1-$forme sur Y donnée par :

$$\varpi^Y_{(r,q,\varphi)} \quad = \quad q\, dr + d\varphi,$$

et dont la courbure est :

$$d\varpi^Y_{(r,q,\varphi)} \quad = \quad dq \wedge dr.$$

En quotientant Y par le feuilletage caractéristique de ϖ^Y, on obtient la variété U et la projection

$$\pi_U^Y \ : \ Y \to U \, ; \, (r,q,\varphi) \mapsto (r,q).$$

Puisque $d\varpi^Y$ correspond bien au pull-back par π_U^Y de la forme symplectique de U, tout ceci fait bien de Y un fibré quantique au-dessus de U.

Applications moments et quantomorphismes

Afin d'utiliser les résultats de la section précédente, il nous reste à construire un quantomorphisme de Y à $Y^{\mathcal{O}}$.

$$\begin{tikzcd}
(Y, \varpi^Y) \arrow[r, "\sim", "f"'] \arrow[d, "\pi_V^W"'] & (Y^{\mathcal{O}}, \varpi) \arrow[d, "\pi_{\mathcal{O}}^{Y^{\mathcal{O}}}"] \\
(U, \omega^U) \arrow[r, "\sim", "\mu^U"'] & (\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})
\end{tikzcd}$$

L'action du groupe de Poincaré sur U va nous permettre d'identifier cet espace avec une orbite coadjointe de G. Définissons pour celà l'application suivante, appelée application moment :

$$\mu^V \ : \ V \to \mathfrak{g}^* \ ; \ (t,x,p) \mapsto \mu(t,x,p) := \Big[Z \mapsto \varpi^V_{(t,x,p)}(Z^*(t,x,p)) \Big] ,$$

où $Z^*(t,x,p) = \frac{d}{ds}|_0 \, \tau^V_{\exp(sZ)}(t,x,p)$ pour $Z \in \mathfrak{g}$. Un calcul explicite donne

$$\mu^V(t,x,p) \ = \ \Big(pt - x\sqrt{m^2+p^2}, (-\sqrt{m^2+p^2}, -p) \Big).$$

Cette application est constante sur les trajectoires, et induit donc une application moment sur U, donnée par :

$$\mu^U(r,q) \ = \ \Big(-r\sqrt{m^2+q^2}, (-\sqrt{m^2+q^2}, -q) \Big).$$

On vérifie que cette application est Poincaré-équivariante :

$$\mu^U\left(\tau_g^U(t,x,p)\right) \ = \ \mathrm{Ad}_g^\flat\Big(\mu^U(t,x,p)\Big),$$

pour tout $g \in G$. Ainsi, elle est à valeurs dans l'orbite coadjointe de $(0, (-m, 0)) \in \mathfrak{g}^*$. En utilisant les coordonnées $\Phi_{\mathcal{O}}$ sur cette orbite, on calcule :

$$\left(\Phi_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \mu^U\right)(r,q) \ = \ \left(\log\left(q + \frac{\sqrt{m^2+q^2}}{m} \right) \ , \ -\frac{r\sqrt{m^2+q^2}}{m^2} \right).$$

On vérifie également que μ^U respecte les formes symplectiques :

$$(\mu^U)^* \omega^{\mathcal{O}} \ = \ d\varpi^U.$$

Tout ceci montre que μ^U est un symplectomorphisme, et qu'on peut donc identifier U avec l'orbite coadjointe de $(0, (-m, 0)) \in \mathfrak{g}^*$ et utiliser les résultats de la section précédente sur la préquantification de cette orbite. Il nous reste à trouver un quantomorphisme de $f : Y \to Y^{\mathcal{O}}$. En utilisant les coordonnées (4.6) sur $Y^{\mathcal{O}}$ et en prenant

$$\begin{aligned}
f(r,q,\varphi) \ &:= \ \Big(\mu^U(r,q) \ , \ f_\phi(r,q,\varphi) \Big) \\
&= \ \left(\log\left(q + \frac{\sqrt{m^2+q^2}}{m} \right) \ , \ -\frac{r\sqrt{m^2+q^2}}{m^2} \ , \ f_\phi(r,q,\varphi) \right),
\end{aligned}$$

on obtient finalement, à partir de la condition $f^* \varpi^{Y^{\mathcal{O}}} = \varpi^Y$:

$$f_\phi(r,q,\varphi) \ = \ \left(q + \sqrt{m^2+q^2} \right) r + \varphi.$$

Rappelons que l'espace de Planck que nous avons construit à partir de $Y^{\mathcal{O}}$ est donné par :

$$\mathcal{H} \;\simeq\; \left\{\hat{\psi}(x)\, z^{-1}\, e^{-i\, m^2\, y} \mid \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{\infty}(Q,\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^{\infty}(Y^{\mathcal{O}},\mathbb{C}).$$

En composant ces fonctions avec f, nous pouvons maintenant les exprimer comme des fonctions sur le fibré quantique Y de U :

$$\mathcal{H} \;\simeq\; \left\{\hat{\psi}(q)\, e^{-i\,\varphi}\, e^{-i\,r\,q} \mid \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^{\infty}(Y,\mathbb{C}).$$

Enfin, nous pouvons encore transporter ces fonctions sur W, ce qui donne :

$$\mathcal{H} \;\simeq\; \left\{\hat{\psi}(p)\, e^{-i\,\theta}\, e^{i\left(\sqrt{p^2+m^2}\,t-p\,x\right)} \mid \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^{\infty}(W,\mathbb{C}).$$

Considérons maintenant les sections lisses du fibré en droites complexes associé à W. Dans notre cas, ce fibré est trivial, et ces sections correspondent donc à des fonctions complexes sur V. Si on se rappelle l'isomorphisme entre sections et fonctions $U(1)-$équivariantes, l'espace $\mathcal{H}$ s'exprime maintenant comme

$$\mathcal{H} \;\simeq\; \left\{\hat{\psi}(p)\, e^{i\left(\sqrt{p^2+m^2}\,t-p\,x\right)} \mid \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^{\infty}(V,\mathbb{C}).$$

On remarque que les fonctions ψ de cet ensemble, définies sur l'espace d'évolution du système, sont solutions de l'équation de Klein-Gordon :

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2\right)\,\psi \;=\; 0.$$

Si le support de $\hat{\psi}$ est compact, on peut intégrer ψ sur l'hyperboloïde de masse, de façon à obtenir une fonction définie sur l'espace-temps de Minkowski, satisfaisant l'équation de Klein-Gordon :

$$\int_H \hat{\psi}(p)\, e^{i\left(\sqrt{p^2+m^2}\,t-p\,x\right)} dH,$$

où dH est une mesure sur l'hyperboloïde de masse.

4.3.3 L'équation de Klein-Gordon

Afin de comprendre, dans notre contexte, comment l'équation de Klein-Gordon apparaît, il est utile d'exprimer la condition de Planck (4.7(iii)) pour des fonctions sur Y. La distribution $\bar{\mathfrak{L}}$ étant engendrée par le champ de vecteurs $\partial_y - m^2\partial_\theta$ de $TY^{\mathcal{O}}$, la distribution $(f^{-1})_*\bar{\mathfrak{L}}$ est engendrée par le champ de vecteurs de TY donné, pour $(r,q,\varphi) \in Y$, par

$$X_{(r,q,\varphi)} \;=\; \partial_r - q\,\partial_\varphi.$$

Une fonction complexe $\tilde{\psi}$ sur W induit une fonction ψ sur Y si elle est constante sur chaque trajectoire, c'est-à-dire si et seulement si $\Xi \cdot \psi = 0$, avec

$$\Xi_{(t,x,p,\theta)} \;=\; \sqrt{m^2+p^2}\;\partial_t + p\;\partial_x + m^2\;\partial_\theta. \tag{4.9}$$

Au vu de la forme de la projection π_Y^W, il est facile de se rendre compte que ψ sera $U(1)-$équivariante si et seulement si $\tilde{\psi}$ l'est. Finalement, puisque $(\pi_Y^W)_*^{-1}(X) = \rangle\Xi, \bar{X}\langle$, avec

$$\bar{X}_{(t,x,p,\theta)} \;=\; \frac{p\,\sqrt{p^2+m^2}}{m^2}\;\partial_t + \frac{p^2+m^2}{m^2}\partial_x,$$

ψ sera dans l'espace de Planck si et seulement si $\bar{X} \cdot \tilde{\psi} = 0$. La condition d'équivariance s'écrit :

$$\partial_\theta \tilde{\psi} \;\; = \;\; -i\,\tilde{\psi},$$

ce qui permet d'écrire, à partir de (4.9) :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sqrt{m^2+p^2}\,\partial_t + p\,\partial_x + i\,m^2\right)\left(\sqrt{m^2+p^2}\,\partial_t + p\,\partial_x - i\,m^2\right)\tilde{\psi} \\ &= \left(\left(\sqrt{m^2+p^2}\,\partial_t + p\,\partial_x\right)^2 + m^4\right)\tilde{\psi} \\ &= \left((m^2+p^2)\,\partial_t^2 + p^2\,\partial_x^2 + 2p\sqrt{m^2+p^2}\,\partial_t\partial_x + m^4\right)\tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser (4.3.3) sous la forme $p\,\partial_t\,\tilde{\psi} = -\sqrt{p^2+m^2}\,\partial_x\,\tilde{\psi}$ pour éliminer le terme croisé et obtenir :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(m^2\,\partial_t^2 - m^2\,\partial_x^2 + m^4\right)\tilde{\psi} \\ &= \left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2\right)\tilde{\psi}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'équation de Klein-Gordon, qui apparaît de la sorte comme une combinaison de l'équation du mouvement et de la condition de Planck.

Remarque

Nous avons choisi plus haut une $1-$forme de connexion bien spécifique sur V (et donc sur W). Cependant, on peut ajouter à cette $1-$forme la différentielle d'une fonction, et répéter le raisonnement :

$$\varpi^{W\prime} \;\; = \;\; \varpi^W + dh,$$

où $h : V \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque. Cette liberté est celle que nous avons rencontrée dans le chapitre 2 et pour laquelle nous avons introduit la notion de préquantifications équivalentes. Si on note par W' le fibré $U(1)-$principal muni de cette connexion, on peut voir que l'application suivante est un quantomorphisme :

$$f^W_{W'} \;:\; W \to W' \;;\; (t,x,p,\theta) \mapsto (t,x,p,\theta - h(t,x,p))$$

Ainsi, au travers de ce quantomorphisme, une fonction de l'espace de Planck $\tilde{\psi}$ sur W donne une fonction ψ' sur W' de la forme :

$$\tilde{\psi}'(t,x,p,\theta) \;\; = \;\; \tilde{\psi}(t,x,p,\theta)\,e^{-i\,h(t,x,p)}.$$

Par exemple, si on prend $h(t,x,p) = \sqrt{m^2+p^2}t - px$, on obtient la $1-$forme potentielle canonique :

$$\varpi^{W'} \;\; = \;\; \left(\frac{p\,t}{\sqrt{m^2+p^2}} - x\right)dp + d\theta,$$

et l'espace de Planck est donné par :

$$\mathcal{H} \;\; \simeq \;\; \left\{\hat{\psi}(p)\,e^{-i\,\theta} \mid \hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\right\} \subset \mathcal{C}^\infty(W',\mathbb{C}).$$

Chapitre 5

Conclusion

Au terme de ce travail, revenons brièvement sur les notions et résultats que nous avons engrangés au long de ses chapitres. La quantification géométrique a pour programme d'associer à une variété symplectique (M, ω) une représentation (d'un sous-ensemble) de l'algèbre de ses fonctions, conformément aux postulats de la mécanique quantique. Nous avons vu que, lorsque ω est exacte, le choix d'un potentiel symplectique permet de définir, pour toute observable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, un opérateur $\hat{f}$ sur l'ensemble des applications complexes lisses à support compact sur M. La généralisation de cette construction au cas où ω n'est pas exacte demande de considérer un fibré L en droites complexes au-dessus de M. L'utilisation d'un fibré et non plus d'un simple produit cartésien permet d'introduire une connexion sur L dont la courbure est la forme symplectique et qui, définie globalement, remplace le potentiel symplectique. Il est alors possible de définir des opérateurs $\hat{f}$ sur les sections lisses à support compact de L. Il faut cependant demander l'existence d'une structure hermitienne sur L afin de pouvoir munir l'ensemble de ces sections d'une structure préhilbertienne, et de construire ensuite un espace de Hilbert.

En mécanique quantique, il est bien connu que certains systèmes ne peuvent être quantifiés que sous certaines conditions. C'est le cas, par exemple, du spin d'une particule qui ne peut prendre que des valeurs demi-entières. Dans le formalisme de la quantification géométrique, cela s'interprète par le fait qu'il n'est pas toujours possible de construire un fibré en droites complexes hermitien au-dessus d'une variété symplectique. Il faut pour cela que ω satisfasse à une condition d'intégralité.

Lorsque ω satisfait à cette condition d'intégralité, elle ne définit cependant pas entièrement la connexion sur le fibré – de la même manière qu'un potentiel n'est pas défini univoquement par sa différentielle. La question de l'équivalence entre fibrés en droites complexes hermitiens munis d'une connexion de même courbure conduit à l'étude de leur classification, laquelle permet de paramétrer toutes les préquantifications non-équivalentes d'une variété symplectique. Souriau [1] montre ainsi que, dans le cas d'un système de plusieurs particules, on obtient deux types de préquantifications, correspondant soit aux fermions, soit aux bosons.

Malheureusement, comme nous l'avons observé dans un exemple simple, la préquantification ainsi construite ne conduit pas aux mêmes résultats que la quantification canonique. Il est nécessaire d'introduire le concept de polarisation (réelle), afin de diminuer le nombre de coordonnées dont dépendent les sections du fibré. On considère alors l'espace de Planck, défini comme l'ensemble des sections lisses à support compact de L polarisées, c'est-à-dire dont la dérivée covariante s'annule le long de la polarisation. La condition de polarisation fait apparaître des difficultés tant pour munir l'espace de Planck d'une structure d'espace de Hilbert que concernant la définition des opérateurs $\hat{f}$, qui, en général, ne laissent pas invariant l'espace de Planck. Cependant, ces difficultés excédant le cadre de ce travail, nous nous sommes limités à l'espace de Planck. Cependant, il sera intéressant d'investiguer comment les résultats suivants pourraient s'exprimer en tenant compte de la procédure complète de la quantification géométrique.

La construction précédente, en termes de fibrés en droites complexes hermitiens munis d'une connexion, correspond au formalisme introduit par Kostant. Cependant, il existe une description équivalente, due à Souriau. Il s'agit alors de construire un fibré $U(1)-$principal Y au-dessus de M muni d'une $1-$forme de connexion dont la dérivée extérieure est le pull-back de la forme symplectique. On définit des opérateurs sur l'ensemble des fonctions $U(1)-$équivariantes sur Y à partir du relevé horizontal des champs de vecteurs hamiltoniens. Dans ce contexte, la condition de polarisation revient à demander que ces applications soient constantes le long du relevé à Y de la polarisation sur M horizontal pour la $1-$forme de connexion.

Un exemple important de variétés symplectiques est donné par les orbites coadjointes d'un groupe de Lie G. Kostant et Souriau ont montré que, sous certaines conditions, une variété symplectique est, inversément, un recouvrement d'une orbite coadjointe, ce qui suggère l'intérêt d'étudier plus avant la quantification de ces orbites. Nous avons montré, dans le chapitre 3, comment quantifier une orbite coadjointe selon la procédure de quantification à la Kostant-Souriau. Par ailleurs, Kirillov a développé sa méthode des orbites qui, à une orbite coadjointe, associe une représentation unitaire de G. Son objectif était de construire ainsi toutes les représentations unitaires irréductibles de G, ce qui est le cas si le groupe est nilpotent ou résoluble, par exemple. Nous avons montré qu'il y avait une équivalence entre l'espace sous-tendant la représentation de Kirillov et l'espace de Planck donné par la quantification à la Kostant-Souriau. La méthode de Kirillov étant purement algébrique, elle permet ainsi de construire algébriquement des solutions de la condition de polarisation.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons appliqué toutes ces considérations à un cas particulier, celui du groupe de Poincaré en dimension $1+1$. Après avoir construit une quantification pour les orbites coadjointes massives, nous avons décrit la correspondance entre les approches de Kirillov et de Kostant-Souriau. Ensuite, nous avons utilisé ces résultats pour quantifier le système physique d'une particule relativiste massive et sans spin. En effet, la variété des mouvements de ce système est naturellement une variété symplectique, et il existe un symplectomorphisme entre cette variété et l'orbite coadjointe massive correspondante. Cependant, notre objectif était de comprendre comment apparaît l'équation de Klein-Gordon en termes de la quantification de l'orbite coadjointe, ce qui demande le choix d'une quantification particulière. Nous avons donc construit le quantomorphisme correspondant à l'équivalence entre les deux quantifications. Nous avons terminé par montrer que l'équation de Klein-Gordon apparaît comme une combinaison de l'équation du mouvement et de la condition de polarisation et nous avons ensuite illustré comment apparaît l'équivalence entre différente préquantifications.

Bibliographie

[1] J.M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod université. Dunod, 1970.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry Set*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, 2009.

[3] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1978.

[4] J.L. Brylinski. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, 2007.

[5] A.A. Kirillov. *Lectures on the Orbit Method*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2004.

[6] N.M.J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, 1997.

[7] J. Śniatycki. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*. Number vol. 30 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1980.

[8] M. Blau. Symplectic geometry and geometric quantization.

[9] R. Dudley, J. Feldman, B. Kostant, R. Langlands, E. Stein, and Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. In *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, volume 170 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 87–208. Springer Berlin / Heidelberg, 1970.

[10] A.A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent lie groups. *Russian Mathematical Surveys*, 17(4) :53, 1962.

Chapitre 6

Erratum

- On demande que l'espace de Hilbert soit *séparé*.
- Théorème 1.2.9 : pas besoin que G soit connexe.
- B doit être la composante connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ dans la construction de Kirillov, car c'est ce dont on a besoin dans la suite.
- Dans la proposition 3.1.3, on doit montrer la surjectivité pour avoir l'unitarité.
- Dans la définition 3.1.2, la représentation est définie sur $\Gamma^\infty(E_\rho)$.