Symbole der mathematischen Logik und ihre Bedeutung

Aussagen

Eine mathematische Aussage ist immer entweder *wahr* oder *falsch*, “ein Drittes wird nicht gegeben” (*lat.* tertium non datur). Dies gilt auch für Aussagen, bei denen (noch) nicht bekannt ist, ob sie wahr sind oder falsch. Zum Beispiel ist die Goldbachsche Vermutung, dass sich jede gerade Zahl grösser 2 als Summe von zwei Primzahlen schreiben lässt, eine solche mathematische Aussage, von der noch nicht bekannt ist, ob sie wahr oder falsch ist, trotzdem ist sie entweder wahr oder falch. Man könnte durchaus auch den Standpunkt vertreten, dass eine mathematische Aussage erst dann wahr, bzw. falsch ist, wenn sie bewiesen, bzw. widerlegt ist. Diesen Standpunkt werden wir aber nicht weiter verfolgen. Die mathematische Aussage, dass es irrationale Zahlen r und s gibt, so dass r^s rational ist, ist mit Hilfe des *tertium non datur* leicht zu beweisen: Die reelle Zahl $t = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist entweder rational oder irrational. Wenn t rational ist, sind wir fertig, und falls t irrational ist, so ist $t^{\sqrt{2}} = 2$, also rational. Dieser Beweis benutzt wesentlich, dass jede mathematische Aussage entweder wahr oder falsch ist, denn wir wissen nicht, ob t rational oder irrational ist, wir nehmen aber an, dass die Aussage “t ist rational” entweder wahr oder falsch ist, d.h. dass t entweder rational oder irrational ist.

Das logische “nicht”

Ist A eine Aussage, so ist $\neg A$ (sprich: nicht A) auch eine Aussage. $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und $\neg A$ ist falsch, wenn A wahr ist. Oder etwas kürzer: $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Das logische “und”

Sind A und B zwei (nicht notwendig verschiedene) Aussagen, so ist $A \wedge B$ (sprich: A und B) auch eine Aussage. $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A wie auch B wahr ist.

Das logische “oder”

Sind A und B zwei (nicht notwendig verschiedene) Aussagen, so ist $A \vee B$ (sprich: A oder B) auch eine Aussage. $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn sowohl A wie auch B

falsch ist. Insbesondere ist $A \vee B$ auch dann wahr, wenn sowohl A wie auch B wahr ist. Das logische "oder" unterscheidet sich also vom umgangssprachlichen "oder", bei dem meist "entweder oder" gemeint ist. Es ist leicht einzusehen, dass $A \vee B$ genau dann wahr ist, wenn $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ wahr ist, d.h. wir können "$\vee$" durch "$\neg$" und "$\wedge$" ausdrücken. Analog können wir auch "$\wedge$" durch "$\neg$" und "$\vee$" ausdrücken.

Das logische "wenn dann"

Sind A und B zwei (nicht notwendig verschiedene) Aussagen, so ist $A \to B$ (sprich: wenn A dann B; oder auch: A impliziert B) auch eine Aussage. $A \to B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr ist und B falsch ist. Z.B. ist die Aussage "wenn es regnet, dann wird die Strasse nass" nur dann falsch, wenn es regnet, die Strasse aber trocken bleibt.

Das logische "genau dann wenn"

Sind A und B zwei (nicht notwendig verschiedene) Aussagen, so ist $A \leftrightarrow B$ (sprich: A genau dann wenn B; oder auch: A dann und nur dann wenn B) auch eine Aussage. Der Wahrheitswert von $A \leftrightarrow B$ ist derselbe wie der von $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Der Quantor "es existiert"

Ist $\varphi(x)$ eine Aussage in der die Variable x vorkommt, z.B. die Aussage "x ist eine Primzahl und $x^2 < 10$", so ist $\exists x\big(\varphi(x)\big)$ (sprich: es existiert ein x, so dass $\varphi(x)$ gilt) auch eine Aussage. $\exists x\big(\varphi(x)\big)$ ist genau dann wahr, wenn es (mindestens) ein x gibt, so dass die Aussage $\varphi(x)$ wahr ist. In der Mathematik heisst "es gibt ein..." immer "es gibt mindestens ein...".

Der Quantor "für alle"

Ist $\varphi(x)$ eine Aussage in der die Variable x vorkommt, so ist $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ (sprich: für alle x gilt $\varphi(x)$) auch eine Aussage. $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ ist genau dann wahr, wenn wir kein x finden, so dass $\varphi(x)$ falsch ist, d.h. $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ ist dasselbe wie $\neg\exists x\neg\big(\varphi(x)\big)$. Insbesondere ist $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ auch dann wahr, wenn es gar keine x gibt: Ist $\varphi(x)$ z.B. die Aussage "wenn x ein Einhorn ist, dann lebt x im Wald", so ist, falls es wirklich keine Einhörner gibt, die Aussage $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ wahr. Nebenbei, die Aussage $\forall x\big(\varphi(x)\big)$ ist natürlich auch dann wahr, wenn es Einhörner gibt und alle Einhörner im Wald leben.