

# LINEARE ALGEBRA I

WS 00/01

Übungsblatt 8: Zwischentest

---

*Bemerkung:* Jedes Resultat muss begründet werden! D.h. die Resultate alleine, ohne Beweis oder Begründung, werden nicht bewertet.

---

36. Berechne  $\text{sgn}(\pi)$ , wobei  $\pi \in S_8$  folgendermassen definiert ist:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= 8, \pi(2) = 6, \pi(3) = 4, \pi(4) = 7, \\ \pi(5) &= 5, \pi(6) = 1, \pi(7) = 3, \pi(8) = 2.\end{aligned}$$

37. Sei  $G = \{a, b, c, d\}$  die abelsche Gruppe mit folgender Gruppentafel:

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$b$	$a$	$d$	$c$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$d$	$c$	$b$	$a$
$d$	$c$	$d$	$a$	$b$

- (a) Ist  $G$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_4$  oder zu  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ?
- (b) Gib einen Isomorphismus an.
- (c) Wieviele solche Isomorphismen gibt es?

38. Seien  $U, W \subseteq \mathbb{R}^5$  mit

$$U = \left\{ (x_1, \dots, x_5) : x_1 = \sum_{i=1}^5 x_i \right\}$$

und

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_5) : x_1 = \sum_{i=1}^5 x_i \text{ und } x_2 = -\sum_{i=1}^5 x_i \right\}.$$

- (a) Gib eine Basis des reellen Vektorraums  $U$  an.
- (b) Gib eine Basis des reellen Vektorraums  $W$  an.
- (c) Gib eine Basis des Quotientenraums  $\mathbb{R}^5/W$  an.

39. Sei  $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  die Menge aller unendlichen periodischen reellen Folgen, also:

$$W = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N}^* \forall i \in \mathbb{N} (x_i = x_{i+k})\}.$$

(a) Zeige, dass  $W$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ist.

(b) Für  $k \in \mathbb{N}^*$  sei  $U_k$  der Unterraum von  $W$  für den gilt:

$$U_k = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N} (x_i = x_{i+k})\}.$$

Bestimme die Dimension des Unterraums  $U_k$  und gib eine Basis an.

40. Sei  $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \dots, p_i, \dots\}$  die Menge aller Primzahlen, wobei  $p_i < p_{i+1}$  (für  $i \in \mathbb{N}$ ). Für jede unendliche 0-1-Folge  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sei die Menge  $M(x)$  wie folgt definiert:

$$M(x) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = \prod_{i=0}^k p_i^{x_i} \right\}.$$

(a) Bestimme die 4 kleinsten Elemente der Menge  $M((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots))$ .

(b) Zeige: Sind  $x$  und  $y$  zwei verschiedene unendliche 0-1-Folgen, so ist die Menge  $M(x) \cap M(y)$  endlich.

(G) Gib 5 linear unabhängige Vektoren des Quotientenraums  $\ell_{\infty}/c_0$  an.