

LINEARE ALGEBRA I

WS 00/01

Übungsblatt 6: Lineare Unabhängigkeit und Dimension von Vektorräumen

26. (a) Zeige, dass die drei Vektoren $(2, 1), (5, 3), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ im reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 linear abhängig sind.
(b) Zeige, dass die Vektoren $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, -1), (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ im reellen Vektorraum \mathbb{R}^3 linear abhängig sind.
27. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei V die Menge aller reellen n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, welche die Bedingung $x_1 + \dots + x_n = 0$ erfüllen. Zeige, dass V ein reeller Vektorraum ist und bestimme seine Dimension.
28. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei V_1 der Vektorraum \mathbb{C}^n über \mathbb{C} und V_2 der Vektorraum \mathbb{C}^n über \mathbb{R} . Bestimme die Dimensionen der Vektorräume V_1 und V_2 .
29. Sei V der Vektorraum \mathbb{Z}_5^4 über \mathbb{Z}_5 und sei

$$M = \{(1, 1, 1, 1), (3, 2, 3, 3), (1, 0, 0, 0), (1, 3, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$$

eine Menge von 5 Vektoren aus \mathbb{Z}_5^4 . Bestimme alle maximalen Teilmengen von linear unabhängigen Vektoren aus der Menge M .

30. Sei V der Vektorraum \mathbb{R} über \mathbb{Q} . Finde in V eine unendliche Menge von linear unabhängigen Vektoren.
Hinweis: Betrachte die Menge $\{\log p : p \text{ prim}\}$.

(E) Sei V die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = f(x+1)).$$

Für $f_1, f_2 \in V$ sei

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x),$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ sei

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Zeige, dass V ein reeller Vektorraum ist und finde in V eine unendliche Menge von linear unabhängigen Vektoren.