Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 11: Der Dualraum und duale Abbildungen

---

51. Sei $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei das lineare Funktional f im Dualraum von $\mathbb{R}^2$ definiert wie folgt:

$$f(e_1) = 1,\ f(e_2) = -2$$

(a) Bestimme $f\big((2,-5)\big)$.

(b) Bestimme die Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ für die gilt: $f(x) = 0$.

(c) Sei $W = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f\big((x_1, x_2)\big)\Big\}$. Zeige, dass W ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und beschreibe W geometrisch.

52. Seien V und W zwei reelle Vektorräume und sei $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ und $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \{w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*\}$ je ein Paar dualer Basen in V und V^* bzw. W und W^*. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix von φ bzgl. den Basen in V und W.

(a) Bestimme die Matrix der zu φ dualen Abbildung φ^* bzgl. den dualen Basen in V^* und W^*.

(b) Bestimme $\varphi^*(3w_1^* - w_2^* + w_3^* - 2w_4^*)(-v_1 + 4v_2 + v_3)$.

53. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n > 0$ und sei $f \in V^*$ ein nicht identisch verschwindendes lineares Funktional.

Zeige, dass die Vektoren x aus V für die gilt $f(x) = 0$ einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum von V bilden.

54. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und seien $f_1, \dots f_n \in V^*$ lineare Funktionale.

(a) Ist $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Basis von V^*, so gibt es eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ des Raums V, so dass deren duale Basis gerade die Basis $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist.
Hinweis: Identifiziere mit Hilfe der Abbildung aus Satz 4.5.2 die Vektoren aus V mit den Vektoren aus V^{**}.

(b) Zeige, dass die linearen Funktionale $f_1, \dots, f_n$ genau dann linear abhängig sind, wenn es einen Vektor $x \neq 0$ in V gibt, in dem alle Funktionale f_i $(1 \leq i \leq n)$ den Wert Null annehmen.

55. Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper und sei $\varphi : V \to W$ ein Isomorphismus von V nach W.

(a) Zeige, dass die zu φ duale Abbildung $\varphi^* : W^* \to V^*$ ein Isomorphismus ist von W^* nach V^*.

(b) Zeige, dass die Beziehung $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ gilt.

Bemerkung: Diese Aufgabe lässt sich auch basisfrei lösen.