

ASPECTOS COMBINATORIOS DEL ARREGLO DE SHI

POR

EDGAR FELIPE RINCÓN

UNA TESIS

PRESENTADA AL DEPARTAMENTO

DE MATEMÁTICAS

COMO PARTE DE LOS REQUISITOS

PARA EL GRADO DE

MATEMÁTICO

DIRECTOR: FEDERICO ARDILA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

BOGOTÁ, COLOMBIA

ENERO, 2006

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Arreglos de hiperplanos	3
2.2. El orden parcial de intersecciones	5
2.3. El polinomio característico	7
3. El polinomio característico y el número de regiones	11
3.1. El método de campos finitos	11
3.2. El teorema de Zaslavsky	18
4. El arreglo Shi	24
4.1. Definición y propiedades básicas	24
4.2. Prueba biyectiva para el número de regiones	28
4.2.1. Funciones de parqueo	28
4.2.2. El etiquetamiento de las regiones	30
5. El etiquetamiento de las caras	37
5.1. El orden parcial de caras	37
5.2. El etiquetamiento	40
5.3. Algunas propiedades del etiquetamiento	43
6. Conclusiones y perspectivas	52
Bibliografía	53

Capítulo 1

Introducción

La teoría de arreglos de hiperplanos debe sus orígenes a antiguos problemas como el siguiente: ¿Cuál es el máximo número de pedazos en los que es posible dividir un queso usando n cortes rectos? Sin embargo, sólo desde la segunda mitad del siglo XX empezó a surgir como una teoría general. Por esta época se desarrollaron varios resultados, como el teorema de Zaslavsky, que le dieron importancia e unidad.

Aunque los arreglos de hiperplanos pueden ser definidos de manera sencilla, estos conllevan a bellos y profundos resultados. En su estudio se relacionan distintas ramas de la matemática, como lo son la combinatoria, el álgebra, la topología y la geometría algebraica; y se vislumbran interesantes relaciones entre dichas disciplinas. El arreglo de Shi es un arreglo de hiperplanos que ha mostrado tener asombrosas propiedades combinatorias. Fue considerado primero por Shi en su investigación de los grupos afines de Weyl, donde lo estudió usando técnicas de la teoría combinatoria de grupos. El arreglo de Shi ha continuado apareciendo en el contexto de los grupos afines de Weyl, y además se ha convertido en un objeto de gran interés para la combinatoria. Son estas algunas de las razones que motivan este estudio.

Este trabajo tiene tres objetivos bien definidos. Primero, pretende mostrar y probar algunos importantes resultados, tanto antiguos como modernos, de la teoría de arreglos de hiperplanos. También busca ilustrar cómo estos métodos, y algunos de la combinatoria enumerativa, pueden ser aplicados al arreglo de Shi. Finalmente, intenta mostrar nuevos avances desarrollados por el autor en la comprensión de los aspectos combinatorios de este arreglo.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: el capítulo 2 presenta los fundamentos sobre los que se desarrolla el trabajo. Se asumen algunos conocimientos básicos de álgebra lineal y teoría de campos.

En el tercer capítulo se prueban dos bellos teoremas que son ejemplo de la relación

entre los arreglos de hiperplanos y la combinatoria. El moderno método de campos finitos es uno de ellos, y ha probado ser de gran utilidad en la prueba de distintos resultados. También se presenta el teorema de Zaslavsky, uno de los primeros grandes teoremas en la teoría de arreglos de hiperplanos. Finalmente se desarrolla una aplicación a la teoría de grafos, en la que se ve la interesante relación entre los arreglos de hiperplanos y otras áreas de la matemática.

El cuarto capítulo presenta cómo los teoremas anteriores y la combinatoria enumerativa pueden ser aplicados a problemas sobre el arreglo de Shi. En particular, se exhibe una biyección entre las regiones de este arreglo y las funciones de parqueo, la cual permite calcular fácilmente el número de estas regiones.

En el capítulo 5 se presentan algunos nuevos avances que revelan un poco la estructura de la biyección anteriormente descrita. Se extiende dicha biyección a todas las caras del arreglo de Shi, y se muestran algunos sorprendentes resultados que permiten una mejor comprensión de la geometría y la combinatoria del arreglo de Shi.

Finalmente, en el sexto capítulo se discuten algunas conclusiones y perspectivas que se desprenden de este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre los que se fundamenta el trabajo. En la primera parte se definen los arreglos de hiperplanos y otras nociones relacionadas. La segunda parte se centra en definir el orden parcial de intersecciones y demostrar algunas de sus propiedades. Finalmente, en la tercera parte se desarrolla brevemente la teoría de álgebras de incidencia, y se introducen los polinomios característicos.

2.1. Arreglos de hiperplanos

Sea K un campo, y sea $V \cong K^n$ un espacio vectorial sobre K de dimensión n . Un *hiperplano lineal en V* es un subespacio H de V de la forma

$$H = \{v \in V \mid \alpha \cdot v = 0\},$$

donde α es un vector fijo de V distinto de cero, y $\alpha \cdot v$ denota el producto punto usual:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

En otras palabras, un hiperplano lineal es el kernel de una aplicación lineal no nula $f : V \rightarrow K$. Sin embargo, vale la pena tener presente la siguiente caracterización.

Proposición 2.1.1. *H es un hiperplano lineal en $V \cong K^n$ si y solo si H es un subespacio $n - 1$ dimensional de V .*

Demostración. Si H es un hiperplano lineal en V entonces H es el kernel de una aplicación lineal no nula $f : V \rightarrow K$. Por lo tanto $V/H \cong K$, luego $\dim(V/H) = 1$. Entonces H es un subespacio $n - 1$ dimensional de V .

Por otro lado, si H es un subespacio $n - 1$ dimensional de V entonces existe $v \in V$ tal que $V = \text{gen}\langle H, v \rangle$. Luego todo elemento de V se puede escribir de manera única como la suma de un elemento de H y un múltiplo escalar de v . Por lo tanto la aplicación lineal $f : V \rightarrow K$ dada por

$$f(h + \lambda v) = \lambda, \text{ donde } h \in H \text{ y } \lambda \in K,$$

está bien definida, y tiene como kernel al subespacio H . Entonces H es un hiperplano lineal en V . \square

Un *hiperplano (afín) en V* es la traslación J de un hiperplano lineal en V , es decir,

$$J = \{v \in V \mid \alpha \cdot v = a\},$$

donde de nuevo α es un vector fijo de V distinto de cero (diremos que α es un vector normal al hiperplano J), y $a \in K$. En general, diremos que L es un *subespacio afín de V* si L es la traslación de un subespacio W de V . En este caso, la dimensión $\dim(L)$ de L se define como la dimensión de W .

Un *arreglo de hiperplanos (finito) en V* es un conjunto finito \mathcal{A} de hiperplanos en V . La *dimensión $\dim(\mathcal{A})$ de \mathcal{A}* se define como la dimensión de V , mientras que el *rango $\text{rango}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A}* se define como la dimensión del subespacio de V generado por las normales a los hiperplanos en \mathcal{A} .

Tomemos ahora $K = \mathbb{R}$ y $V = \mathbb{R}^n$, y sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en V . Una *región de \mathcal{A}* es una componente conexa del complemento X de los hiperplanos en \mathcal{A} :

$$X = \mathbb{R}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Llamaremos $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ al conjunto de todas las regiones de \mathcal{A} , y

$$r(\mathcal{A}) = |\mathcal{R}(\mathcal{A})|$$

al número de regiones de \mathcal{A} . Si W es el subespacio de V generado por las normales a los hiperplanos en \mathcal{A} , diremos que una región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ es *relativamente acotada* cuando $R \cap W$ es acotado. Llamaremos $b(\mathcal{A})$ al número de regiones de \mathcal{A} relativamente acotadas.

Ejemplo 2.1.2. Tomemos $K = \mathbb{R}$, y consideremos el arreglo \mathcal{A} de hiperplanos en \mathbb{R}^2 que consiste de las m rectas definidas por $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ (las coordenadas en \mathbb{R}^2 son x y y), donde $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ son m números reales. El subespacio W de \mathbb{R}^2 generado por las normales a los hiperplanos en \mathcal{A} es el eje x . Luego $\dim(\mathcal{A}) = 2$ y $\text{rango}(\mathcal{A}) = 1$. Las regiones relativamente acotadas de \mathcal{A} son las regiones definidas por $a_i < x < a_{i+1}$, con $1 \leq i \leq m - 1$. Hay dos regiones más en $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ que no son relativamente acotadas, estas están definidas por $x < a_1$ y por $x > a_m$. Por lo tanto $r(\mathcal{A}) = m + 1$ y $b(\mathcal{A}) = m - 1$.

2.2. El orden parcial de intersecciones

Un *conjunto parcialmente ordenado* u *orden parcial* es un conjunto P junto con una relación binaria \leq que satisface las siguientes tres propiedades:

1. (Reflexividad) Para todo $x \in P$, se tiene que $x \leq x$.
2. (Antisimetría) Para todo $x, y \in P$, si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. (Transitividad) Para todo $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Usaremos las abreviaciones comunes, por ejemplo $x < y$ cuando $x \leq y$ y $x \neq y$, o $y \geq x$ cuando $x \leq y$. Si $x \leq y$ en P entonces el *intervalo (cerrado)* $[x, y]$ de P se define como

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}.$$

Un elemento $x \in P$ es un elemento minimal (resp. maximal) de P si no existe $y \in P$ tal que $y < x$ (resp. $y > x$).

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en V . El *orden parcial de intersecciones de \mathcal{A}* , denotado por $L(\mathcal{A})$, es el conjunto de todas las posibles intersecciones no vacías entre hiperplanos en \mathcal{A} (incluyendo a V como la intersección sobre el conjunto vacío), con el orden definido por $x \leq y$ en $L(\mathcal{A})$ si $x \supseteq y$ (como subconjuntos de V).

Nótese que todos los elementos de $L(\mathcal{A})$ son subespacios afines de V . Además el elemento $V \in L(\mathcal{A})$ es mínimo en el orden, es decir, para todo $x \in L(\mathcal{A})$ se tiene que $V \leq x$.

Si x y y son elementos de un orden parcial P , diremos que y *cubre a x* , y lo denotaremos $x \triangleleft y$, si $x < y$ y no existe $z \in P$ tal que $x < z < y$. El *diagrama (de Hasse)* de un orden parcial finito P se obtiene dibujando los elementos de P como puntos, con x mas abajo que y si $x < y$, y dibujando una arista entre x y y si $x \triangleleft y$. La Figura 2.1 muestra algunos ejemplos de arreglos de hiperplanos en \mathbb{R}^2 junto con el diagrama de su orden parcial de intersecciones.

Una *cadena de longitud k* en un orden parcial P es un conjunto $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ de elementos de P . Diremos que el orden parcial P es *graduado de rango n* si toda cadena maximal en P tiene longitud n . En este caso existe una *función rango* $\text{rg} : P \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

- $\text{rg}(x) = 0$ si x es un elemento minimal de P .
- $\text{rg}(y) = \text{rg}(x) + 1$ si $x \triangleleft y$ en P .

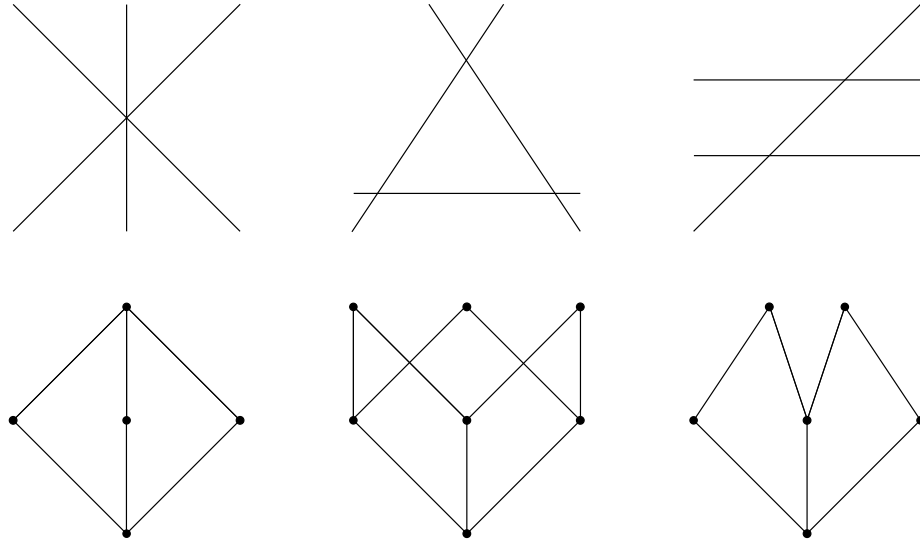


Figura 2.1: Arreglos de hiperplanos en \mathbb{R}^2 y su orden parcial de intersecciones

Teorema 2.2.2. *Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en un espacio vectorial $V \cong K^n$. Entonces el orden parcial de intersecciones $L(\mathcal{A})$ es graduado de rango igual a $\text{rango}(\mathcal{A})$. La función rango de $L(\mathcal{A})$ está dada por*

$$\text{rg}(x) = \text{codim}(x) = n - \dim(x),$$

donde $\dim(x)$ es la dimensión de x como subespacio afín de V .

Demostración. Como $L(\mathcal{A})$ tiene un único elemento minimal V , entonces toda cadena maximal en $L(\mathcal{A})$ es de la forma $V = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, donde x_k es un elemento maximal de $L(\mathcal{A})$. Luego basta probar que:

- (a) Si $x \leq y$ en $L(\mathcal{A})$ entonces $\dim(x) - \dim(y) = 1$.
- (b) Todos los elementos maximales de $L(\mathcal{A})$ tienen dimensión $n - \text{rango}(\mathcal{A})$.

Para probar (a), supongamos que x es un subespacio afín de V y que H es un hiperplano en V tal que $H \cap x \neq \emptyset$. Tomemos $v \in H \cap x$. Entonces $H' = H - v$ es un hiperplano lineal en V , por lo que H' es el kernel de una aplicación lineal $f : V \rightarrow K$. Si $x' = x - v$ entonces x' es un subespacio de V . Luego la restricción $f|_{x'} : x' \rightarrow K$ de f a x' es una aplicación lineal con kernel $H' \cap x'$. Por lo tanto, si $f|_{x'}$ es idénticamente nula entonces $H' \cap x' = x'$, de donde $H \cap x = x$. Si no, $H' \cap x'$ es un hiperplano en x' , por lo que $\dim(H' \cap x') = \dim(x') - 1$. Pero $H' \cap x' = (H \cap x) - v$, luego

$$\dim(H \cap x) = \dim(H' \cap x') = \dim(x') - 1 = \dim(x) - 1.$$

Resumiendo, tenemos que si x es un subespacio afín de V , y H es un hiperplano en V tal que $H \cap x \neq \emptyset$ entonces $H \cap x = x$ o $\dim(H \cap x) = \dim(x) - 1$.

Ahora, si $x < y$ en $L(\mathcal{A})$ entonces $y = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_d \cap x$, donde los H_i son hiperplanos de \mathcal{A} y $d \geq 1$. Como y es un subconjunto propio de x entonces existe algún H_j ($1 \leq j \leq d$) tal que $z = H_j \cap x$ es un subconjunto propio de x . Luego por lo probado anteriormente tenemos que $\dim(z) = \dim(x) - 1$. Además $x < z \leq y$ en $L(\mathcal{A})$, lo que implica que $z = y$. Por lo tanto $\dim(y) = \dim(x) - 1$, con lo que concluye la prueba de (a).

Para probar (b), supongamos que $x \in L(\mathcal{A})$ tiene la mayor codimensión entre todos los elementos de $L(\mathcal{A})$, y llamemos $d = \text{codim}(x)$. Entonces x es la intersección de d hiperplanos en \mathcal{A} linealmente independientes (es decir, cuyas normales son linealmente independientes), digamos $x = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_d$. Tomemos $y \in L(\mathcal{A})$ tal que $e = \text{codim}(y) < d$. Entonces y es la intersección de e hiperplanos en \mathcal{A} , por lo que existe algún H_j ($1 \leq j \leq d$) que es linealmente independiente de estos. Luego $y \cap H_j \neq \emptyset$ es un elemento de $L(\mathcal{A})$ mayor que y . Por lo tanto y no es un elemento maximal de $L(\mathcal{A})$, lo que prueba (b). \square

2.3. El polinomio característico

Un orden parcial P es *localmente finito* si todo intervalo $[x, y]$ de P es finito. Denotaremos por $\text{Int}(P)$ al conjunto de todos los intervalos (cerrados) de P . Simplificando la notación, para cualquier función $f : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{Z}$ escribiremos $f(x, y)$ en vez de $f([x, y])$.

Definición 2.3.1. Sea P un orden parcial localmente finito. La función $\mu = \mu_P : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{Z}$, llamada la *función de Möbius de P* , se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu(x, x) &= 1, \text{ para todo } x \in P \\ \mu(x, y) &= - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), \text{ para todo } x < y \text{ en } P. \end{aligned}$$

Nótese que esta última condición es equivalente a

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0, \text{ para todo } x < y \text{ en } P.$$

Una de las principales razones a las que se debe la importancia de la función de Möbius es la *fórmula de inversión de Möbius*. Aunque esta puede ser demostrada de manera sencilla, para probarla desarrollaremos un poco la teoría de álgebras de incidencia, lo que proporciona una mejor comprensión de este resultado.

Si P es un orden parcial localmente finito, llamaremos $\mathcal{J}(P) = \mathcal{J}(P, K)$ al espacio vectorial de todas las funciones $f : \text{Int}(P) \rightarrow K$. De nuevo para simplificar la notación, si $f \in \mathcal{J}(P)$ escribiremos $f(x, y)$ en vez de $f([x, y])$. Podemos considerar de manera natural a la función $\mu = \mu_P$ como un elemento de $\mathcal{J}(P)$. Ahora, para $f, g \in \mathcal{J}(P)$ definamos el producto (o convolución) $fg \in \mathcal{J}(P)$ de la siguiente manera:

$$fg(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

Es fácil ver que este producto hace de $\mathcal{J}(P)$ un álgebra asociativa, con identidad multiplicativa $\delta \in \mathcal{J}(P)$ (llamada la *función δ de Kronecker*) definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x < y. \end{cases}$$

Proposición 2.3.2. *Sea $f \in \mathcal{J}(P)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) f tiene inverso por la derecha.
- (b) f tiene inverso por la izquierda.
- (c) f es invertible (es decir, f tiene un inverso por ambos lados).
- (d) $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$.

Demostración. Supongamos que f tiene inverso por la derecha, es decir, existe $g \in \mathcal{J}(P)$ tal que $fg = \delta$ en $\mathcal{J}(P)$. Esto es equivalente a

$$f(x, x)g(x, x) = 1, \text{ para todo } x \in P,$$

y

$$g(x, y) = -f(x, x)^{-1} \sum_{x < z \leq y} f(x, z)g(z, y), \text{ para todo } x < y \text{ en } P.$$

Luego f tiene inverso por la derecha si y solo si $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. De la misma forma podemos ver que f tiene inverso por la izquierda si y solo si $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$, y por lo tanto, si y solo si f tiene inverso por la derecha. Pero si f tiene inverso por la izquierda y por la derecha entonces estos deben ser iguales, por lo que f es invertible. \square

La *función zeta* $\zeta \in \mathcal{J}(P)$ se define como $\zeta(x, y) = 1$ para todo $x \leq y$ en P . Entonces la definición de la función μ (Definición 2.3.1) expresa simplemente la relación $\mu\zeta = \delta$ en $\mathcal{J}(P)$. Luego por la proposición anterior, esto implica que ζ es invertible y que $\zeta^{-1} = \mu$ en $\mathcal{J}(P)$.

Habiendo hecho estas consideraciones, ahora sí probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3 (Fórmula de inversión de Möbius). *Sea P un orden parcial finito con función de Möbius μ , y sean $f, g : P \rightarrow K$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$(i) \quad f(x) = \sum_{y \geq x} g(y), \text{ para todo } x \in P.$$

$$(ii) \quad g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y), \text{ para todo } x \in P.$$

Demostración. El conjunto K^P de todas las funciones $h : P \rightarrow K$ forma un espacio vectorial sobre el que $\mathcal{J}(P)$ actúa (por la izquierda) como un álgebra de transformaciones lineales de la siguiente manera:

$$(\gamma h)(x) = \sum_{y \geq x} \gamma(x, y) h(y),$$

donde $h \in K^P$ y $\gamma \in \mathcal{J}(P)$. Como $\zeta^{-1} = \mu$ en $\mathcal{J}(P)$ entonces

$$f = \zeta g \iff \mu f = g,$$

que es precisamente la fórmula de inversión de Möbius. □

Recordemos que si \mathcal{A} es un arreglo de hiperplanos en V entonces el elemento $V \in L(\mathcal{A})$ es mínimo en $L(\mathcal{A})$. En general, si P es un orden parcial con elemento mínimo, a este lo denotaremos por $\hat{0} = \hat{0}_P$. En este caso escribiremos $\mu(x)$ en vez de $\mu(\hat{0}, x)$.

Definición 2.3.4. Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en $V \cong K^n$. El *polinomio característico* $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de \mathcal{A} se define como

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{\dim(x)}.$$

Nótese que el polinomio característico de \mathcal{A} es siempre de la forma

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n - |\mathcal{A}| t^{n-1} + \dots$$

Ejemplo 2.3.5. Tomemos $K = \mathbb{R}$, y consideremos el arreglo \mathcal{A} de hiperplanos en \mathbb{R}^2 consistente de las cuatro rectas definidas por:

$$y = 0, \quad x - y = 0, \quad x + y = 0, \quad y = 1;$$

donde las coordenadas de \mathbb{R}^2 son x y y .

La Figura 2.2 muestra el arreglo \mathcal{A} y su orden parcial de intersecciones $L(\mathcal{A})$. Además, junto a cada elemento x de su orden parcial de intersecciones se ha puesto el valor de la función $\mu(x)$.

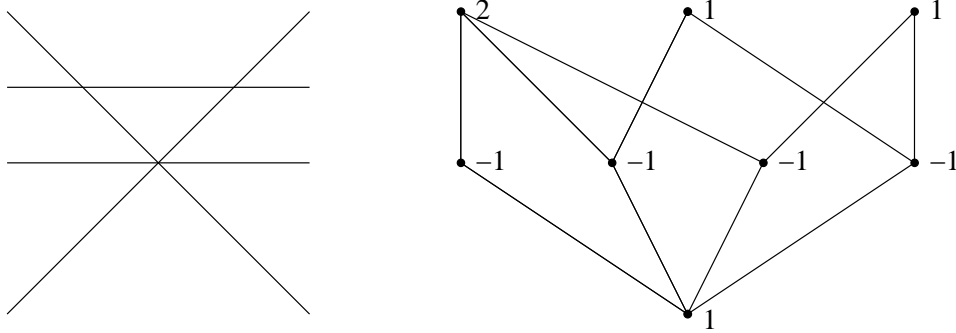


Figura 2.2: Arreglo \mathcal{A} , junto con $L(\mathcal{A})$ y su función μ

El polinomio característico de \mathcal{A} es entonces

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2.$$

Capítulo 3

El polinomio característico y el número de regiones

En este capítulo se exploran de una manera más profunda las propiedades del orden parcial de intersecciones y el polinomio característico de un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n , y se relacionan con el número de regiones de este. En particular, se exponen dos grandes resultados: el método de campos finitos y el teorema de Zaslavsky.

El método de campos finitos es un sorprendente método que permite trasladar el problema del cálculo de un polinomio característico a un problema de enumeración finita. Este método se presenta en la primera parte del capítulo. El resultado principal estaba ya implícito en el trabajo de Crapo y Rota [6], pero fue desarrollado por primera vez como una herramienta sistemática en 1996 por Athanasiadis [1] [2]. Blass y Sagan también presentaron una técnica parecida pero no tan general [4].

En la segunda parte se expone un bello teorema que relaciona el polinomio característico de un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n con su número de regiones. Es uno de los primeros grandes resultados en la teoría de arreglos de hiperplanos, y se debe a Zaslavsky en 1975 [14].

3.1. El método de campos finitos

Tomemos $K = \mathbb{R}$, y sea J un hiperplano en \mathbb{R}^n de la forma

$$J = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \cdot \vec{x} = a\},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$ es distinto de cero, y $a \in \mathbb{Q}$. En este caso, diremos que J es un \mathbb{Q} -hiperplano. Multiplicando por un entero adecuado, podemos suponer que $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ y que $0 \leq a \in \mathbb{Z}$. Además, podemos dividir entre el máximo común divisor

$\text{mcd}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, a)$, así que es válido asumir que $\text{mcd}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, a) = 1$. Hechas estas consideraciones, a la ecuación $\alpha \cdot \vec{x} = a$ la llamaremos *ecuación principal de J* . Claramente existen unos únicos $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ y $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen estas condiciones, por lo que cada \mathbb{Q} -hiperplano en \mathbb{R}^n tiene asociada una única ecuación principal.

Ahora, sea $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ un arreglo de \mathbb{Q} -hiperplanos en \mathbb{R}^n . Supongamos que para todo i la ecuación principal de H_i es $\alpha_i \cdot \vec{x} = a_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}^n$ y $a_i \in \mathbb{Z}$. Para todo primo p denotaremos por \mathbb{F}_p al campo de p elementos. Podemos considerar las coordenadas de α_i módulo p y así obtener $(\alpha_i)_p \in (\mathbb{F}_p)^n$, y también a_i módulo p para obtener $(a_i)_p \in \mathbb{F}_p$. Luego, si p es tal que $(\alpha_i)_p \neq 0$ para todo i entonces llamaremos \mathcal{A}_p al arreglo de hiperplanos en $(\mathbb{F}_p)^n$ consistente de los hiperplanos

$$(H_i)_p = \{\vec{x} \in (\mathbb{F}_p)^n \mid (\alpha_i)_p \cdot \vec{x} = (a_i)_p\},$$

con $1 \leq i \leq k$. En este caso, diremos que el arreglo \mathcal{A} es *reducible módulo p* . Además, diremos que el arreglo \mathcal{A} tiene *buena reducción módulo p* si $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_p)$.

Ejemplo 3.1.1. Sea \mathcal{A} el arreglo de hiperplanos en $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ consistente de los puntos $-\frac{1}{2}$, 0 y 6 . Claramente estos puntos son \mathbb{Q} -hiperplanos en \mathbb{R} . Las ecuaciones principales de estos son

$$-2x = 1, \quad x = 0, \quad x = 6;$$

respectivamente. Luego \mathcal{A} es reducible módulo p si y solo si $p \neq 2$. Además, \mathcal{A} tiene buena reducción módulo p si y solo si los tres hiperplanos siguen siendo distintos después de la reducción, es decir, si y solo si -2^{-1} , 0 y 6 son distintos módulo p . Por lo tanto \mathcal{A} tiene una buena reducción módulo p cuando p es distinto de 2 , 3 y 11 .

Teorema 3.1.2. *Sea \mathcal{A} un arreglo de \mathbb{Q} -hiperplanos en \mathbb{R}^n . Entonces \mathcal{A} tiene buena reducción módulo p para todos excepto finitos primos.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ y que para todo i la ecuación principal de H_i es $\alpha_i \cdot \vec{x} = a_i$. Claramente existen finitos primos p para los que \mathcal{A} no es reducible módulo p . Sea p un primo tal que \mathcal{A} es reducible módulo p , y llamemos rg a la función rango de $L(\mathcal{A})$ y rg_p a la función rango de $L(\mathcal{A}_p)$.

Mostraremos primero que $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_p)$ si para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ se tiene que

$$\bigcap_{i \in S} H_i \neq \emptyset \iff \bigcap_{i \in S} (H_i)_p \neq \emptyset \quad (3.1)$$

y

$$\bigcap_{i \in S} H_i \neq \emptyset \implies \text{rg} \left(\bigcap_{i \in S} H_i \right) = \text{rg}_p \left(\bigcap_{i \in S} (H_i)_p \right). \quad (3.2)$$

Supongamos que para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ se tiene (3.1) y (3.2), y definamos la función $F : L(\mathcal{A}) \rightarrow L(\mathcal{A}_p)$ como

$$F\left(\bigcap_{i \in S} H_i\right) = \bigcap_{i \in S} (H_i)_p.$$

F está bien definida, ya que si

$$x = \bigcap_{i \in S} H_i \neq \emptyset$$

entonces por (3.1) tenemos que

$$\bigcap_{i \in S} (H_i)_p \neq \emptyset,$$

y además, si

$$x = \bigcap_{i \in S'} H_i$$

para algún otro $S' \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ entonces

$$x = \bigcap_{i \in S \cup S'} H_i,$$

por lo que

$$\operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S} H_i\right) = \operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S \cup S'} H_i\right) = \operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S'} H_i\right)$$

y entonces por (3.2)

$$\operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S} (H_i)_p\right) = \operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S \cup S'} (H_i)_p\right) = \operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S'} (H_i)_p\right),$$

lo que implica que

$$\bigcap_{i \in S} (H_i)_p = \bigcap_{i \in S \cup S'} (H_i)_p = \bigcap_{i \in S'} (H_i)_p.$$

Por la condición (3.1) F es sobreyectiva. Además F es inyectiva, ya que si

$$y = \bigcap_{i \in S} (H_i)_p = \bigcap_{i \in S'} (H_i)_p \neq \emptyset$$

para $S, S' \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ entonces

$$y = \bigcap_{i \in S \cup S'} (H_i)_p,$$

lo que implica que

$$\operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S} (H_i)_p\right) = \operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S \cup S'} (H_i)_p\right) = \operatorname{rg}_p\left(\bigcap_{i \in S'} (H_i)_p\right)$$

y entonces por (3.2)

$$\operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S} H_i\right) = \operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S \cup S'} H_i\right) = \operatorname{rg}\left(\bigcap_{i \in S'} H_i\right),$$

por lo que

$$\bigcap_{i \in S} H_i = \bigcap_{i \in S \cup S'} H_i = \bigcap_{i \in S'} H_i.$$

Finalmente es claro que F respeta el orden, por lo que F es un isomorfismo entre $L(\mathcal{A})$ y $L(\mathcal{A}_p)$.

Por otra parte, supongamos que J_1, J_2, \dots, J_k son hiperplanos en un espacio vectorial $V \cong K^n$, y digamos que J_i es el conjunto solución de la ecuación $\beta_i \cdot \vec{x} = b_i$, donde $\beta_i \in K^n$ y $b_i \in K$. Entonces $J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_k \neq \emptyset$ si y solo si existe $v \in V$ tal que $\beta_i \cdot v = b_i$ para todo i . Luego, considerando los β_i como vectores fila, $J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_k \neq \emptyset$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo,

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} \beta_1 & b_1 \\ \beta_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_k & b_k \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Además en este caso se tiene que

$$\operatorname{codim}(J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_k) = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Ahora, si $S = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ es no vacío, llamemos

$$M_S = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \alpha_{i_2} \\ \vdots \\ \alpha_{i_r} \end{pmatrix}, \quad N_S = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} & a_{i_1} \\ \alpha_{i_2} & a_{i_2} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{i_r} & a_{i_r} \end{pmatrix};$$

y

$$(M_S)_p = \begin{pmatrix} (\alpha_{i_1})_p \\ (\alpha_{i_2})_p \\ \vdots \\ (\alpha_{i_r})_p \end{pmatrix}, \quad (N_S)_p = \begin{pmatrix} (\alpha_{i_1})_p & (a_{i_1})_p \\ (\alpha_{i_2})_p & (a_{i_2})_p \\ \vdots & \vdots \\ (\alpha_{i_r})_p & (a_{i_r})_p \end{pmatrix}.$$

Luego por lo probado anteriormente y en vista del Teorema 2.2.2, tenemos que para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ se cumple (3.1) y (3.2) si, para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ no vacío se tienen las ecuaciones

$$\text{rango}_{\mathbb{R}^n}(M_S) = \text{rango}_{(\mathbb{F}_p)^n}((M_S)_p) \quad (3.3a)$$

y

$$\text{rango}_{\mathbb{R}^n}(N_S) = \text{rango}_{(\mathbb{F}_p)^n}((N_S)_p). \quad (3.3b)$$

Pero sabemos que el rango de una matriz A es mayor o igual que t si y solo si A tiene una submatriz B de tamaño $t \times t$ con $\det(B) \neq 0$. Entonces las ecuaciones (3.3) no se cumplen si y solo si existe una matriz $A = M_S$ o $A = N_S$ para algún $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ tal que todas sus submatrices de tamaño $\text{rango}(A) \times \text{rango}(A)$ con determinante distinto de cero (hay por lo menos una de estas submatrices) tienen determinante múltiplo de p . Pero claramente esto puede pasar sólo para finitos primos p , ya que p debe ser un divisor del determinante (distinto de cero) de una submatriz de alguna matriz M_S o N_S , de las que solo hay finitas.

Por lo tanto, las ecuaciones (3.3) se tienen para todos excepto finitos primos p . Luego $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_p)$ para todos excepto finitos primos p , con lo que concluye la prueba. \square

Este teorema junto con el siguiente forman una herramienta bastante útil para calcular polinomios característicos.

Teorema 3.1.3 (Método de campos finitos). *Sea \mathcal{A} un arreglo de \mathbb{Q} -hiperplanos en \mathbb{R}^n , y sea p un primo tal que \mathcal{A} tiene buena reducción módulo p . Entonces*

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(p) &= \left| (\mathbb{F}_p)^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right| \\ &= p^n - \left| \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right|. \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que si $x \in L(\mathcal{A}_p)$ entonces, como x es un subespacio afín de $(\mathbb{F}_p)^n$,

se tiene que $|x| = p^{\dim(x)}$. Ahora, definamos las funciones $f, g : L(\mathcal{A}_p) \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \left| x - \bigcup_{y>x} y \right|.$$

En particular,

$$g(\hat{0}) = g((\mathbb{F}_p)^n) = \left| (\mathbb{F}_p)^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right|.$$

Además, claramente se tiene que

$$f(x) = \sum_{y \geq x} g(y).$$

Si denotamos por μ a la función de Möbius de $L(\mathcal{A}_p)$ entonces por la fórmula de inversión de Möbius (Teorema 2.3.3) tenemos que

$$g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y)$$

$$= \sum_{y \geq x} \mu(x, y) p^{\dim(y)}.$$

Reemplazando $x = \hat{0}$ obtenemos

$$g(\hat{0}) = \sum_{y \in L(\mathcal{A}_p)} \mu(y) p^{\dim(y)} = \chi_{\mathcal{A}}(p).$$

Esta última igualdad se debe a que $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_p)$ y a que $\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}_p)$. \square

A continuación trataremos de ilustrar la gran utilidad de este método.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos el arreglo en \mathbb{R}^n

$$\mathcal{H}_n : \quad x_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Sea p un primo tal que \mathcal{H}_n tiene buena reducción módulo p . Entonces por el método de campos finitos tenemos que

$$\chi_{\mathcal{H}_n}(p) = \left| (\mathbb{F}_p)^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{H}_n)_p} H \right|$$

$$= \left| \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_p)^n \mid x_i \neq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\} \right|$$

$$= (p-1)^n.$$

Como esta igualdad se tiene para infinitos primos p (Teorema 3.1.2), entonces ambos polinomios deben ser iguales, es decir,

$$\chi_{\mathcal{H}_n}(t) = (t-1)^n.$$

Nótese que de esta manera podemos calcular polinomios característicos sin tener que describir el orden parcial de intersecciones ni su función de Möbius.

Existe una gran cantidad de aplicaciones interesantes del método de campos finitos. El siguiente ejemplo muestra una de ellas.

Ejemplo 3.1.5. Un grafo (finito) $G = (V, E)$ está compuesto de un conjunto finito V de vértices y un conjunto E de aristas, donde $E \subseteq [V]^2$. Diremos que dos vértices son *adyacentes* si pertenecen a una misma arista. Claramente la estructura del grafo no depende del conjunto V sino de las aristas entre los vértices, así que podemos suponer que $V = \{1, 2, \dots, n\}$ para algún n .

Dado un grafo $G = (V, E)$, diremos que una función $\kappa : V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es una coloración propia de G si se cumple que $\kappa(u) \neq \kappa(v)$ para cada par de vértices adyacentes u, v . Si $q \in \mathbb{Z}^+$, denotaremos por $\chi_G(q)$ al número de coloraciones propias $\kappa : V \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ de G .

Es fácil ver que $\chi_G(q)$ resulta ser en realidad un polinomio en q , por lo que se llama el *polinomio cromático de G* . Para esto, llamemos $e_i = e_i(G)$ al número de coloraciones propias sobreyectivas $\kappa : V \rightarrow \{1, 2, \dots, i\}$. Entonces podemos escoger una coloración propia $\kappa : V \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ primero escogiendo el tamaño $i = |\kappa(V)|$ de su imagen, luego escogiendo los elementos de $\kappa(V)$ de $\binom{q}{i}$ formas, y finalmente escogiendo κ de e_i formas. Por lo tanto

$$\chi_G(q) = \sum_{i=1}^n e_i \binom{q}{i}.$$

Como $\binom{q}{i} = q(q-1)\cdots(q-i+1)/i!$ es un polinomio en q , entonces $\chi_G(q)$ también lo es. Luego escribiremos $\chi_G(t)$, con t una indeterminada.

Ahora, si $G = (V, E)$ es un grafo con vértices $V = \{1, 2, \dots, n\}$, definamos el arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n

$$\mathcal{A}_G : \quad x_i - x_j = 0 \quad \text{si } \{i, j\} \in E.$$

Existen varias relaciones entre el grafo G y su arreglo de hiperplanos \mathcal{A}_G , tales como la siguiente. Sea p un primo tal que \mathcal{A}_G tiene buena reducción módulo p . Entonces por el método de campos finitos

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_G}(p) &= \left| (\mathbb{F}_p)^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{A}_G)_p} H \right| \\ &= \left| \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_p)^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } \{i, j\} \in E\} \right| \\ &= \chi_G(p). \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.2 esta igualdad se tiene para infinitos primos, por lo que ambos polinomios deben ser iguales. Es decir,

$$\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t).$$

Entonces, como corolario, tenemos que el polinomio cromático de G tiene coeficientes enteros y es de la forma

$$\chi_G(t) = t^n - |E|t^{n-1} + \dots .$$

3.2. El teorema de Zaslavsky

Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n , y sea H un hiperplano en \mathcal{A} . Podemos ver a \mathbb{R}^{n-1} como subconjunto de \mathbb{R}^n mediante la inclusión canónica $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Así que podemos suponer que $H = \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Al arreglo de hiperplanos $\mathcal{A} - \{H\}$ en \mathbb{R}^n , o simplemente $\mathcal{A} - H$, lo llamaremos la *eliminación de H del arreglo \mathcal{A}* . Por otra parte, al comienzo de la prueba del Teorema 2.2.2 mostramos que si J es un hiperplano en \mathbb{R}^n distinto de H tal que $J \cap H \neq \emptyset$ entonces $J \cap H$ es un hiperplano en H . Luego $\mathcal{A}/H = \{J \cap H \neq \emptyset \mid J \in \mathcal{A} - H\}$ es un arreglo de hiperplanos en $H = \mathbb{R}^{n-1}$, al que llamaremos la *restricción de \mathcal{A} a H* . En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de un arreglo \mathcal{A} en \mathbb{R}^2 y un hiperplano $H \in \mathcal{A}$. Al lado se exhibe la eliminación de H , y abajo la restricción a H .

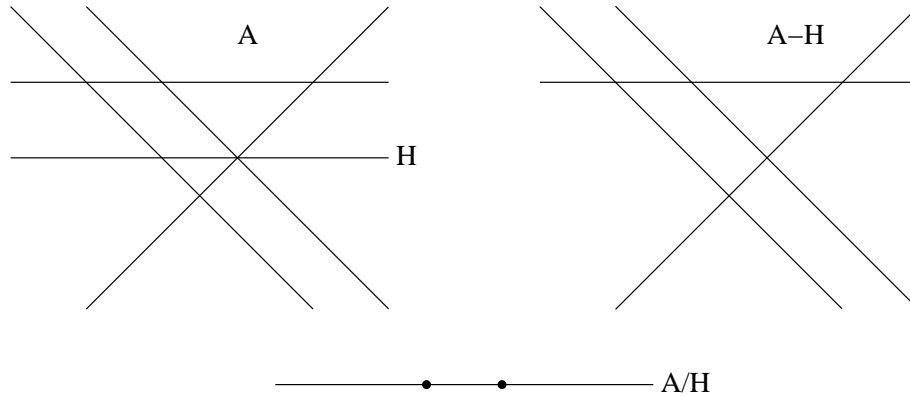


Figura 3.1: Ejemplo de eliminación y de restricción

Ahora estableceremos recurrencias para el número de regiones y el polinomio característico de un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n .

Lema 3.2.1. *Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n , y sea H un hiperplano en \mathcal{A} . Entonces*

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A} - H) + r(\mathcal{A}/H)$$

y

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A} - H) + b(\mathcal{A}/H), & \text{si } \text{rango}(\mathcal{A} - H) = \text{rango}(\mathcal{A}) \\ 0, & \text{si } \text{rango}(\mathcal{A} - H) = \text{rango}(\mathcal{A}) - 1. \end{cases}$$

Demostración. Nótese que $r(\mathcal{A})$ es igual a $r(\mathcal{A} - H)$ más el número de regiones de $\mathcal{A} - H$ que son divididas en dos por H . Si R es una de estas regiones entonces $R' = R \cap H$ es una región de \mathcal{A}/H . Ahora, si R' es una región de \mathcal{A}/H entonces los puntos de \mathbb{R}^n cerca de R' a ambos lados de H deben estar en una misma región R de $\mathcal{A} - H$, ya que cualquier hiperplano de $\mathcal{A} - H$ que los separara intersectaría a R' y la dividiría en regiones distintas. Luego H divide a R en dos regiones. Por lo tanto, existe una biyección entre las regiones de $\mathcal{A} - H$ que son divididas en dos por H y las regiones de \mathcal{A}/H , con lo que queda probada la primera recurrencia.

Probaremos ahora la segunda recurrencia. De nuevo podemos asumir que $H = \mathbb{R}^{n-1}$. Supongamos primero que $\text{rango}(\mathcal{A} - H) = \text{rango}(\mathcal{A})$, es decir, que el vector normal a H es combinación lineal de los vectores normales a los demás hiperplanos en \mathcal{A} . Entonces el subespacio W generado por los vectores normales a los hiperplanos en \mathcal{A} es el mismo subespacio generado por los vectores normales a los hiperplanos en $\mathcal{A} - H$. Se tiene entonces que $b(\mathcal{A})$ es igual a $b(\mathcal{A} - H)$ más el número de regiones de $\mathcal{A} - H$ que H divide en dos y al hacerlo, alguna de las dos regiones resultantes es relativamente acotada en \mathcal{A} . Claramente si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A} - H)$ es una de estas regiones, es decir, si R es dividida por H en dos regiones R_1 y R_2 con $R_1 \cap W$ acotado, entonces la región $R' = R \cap H$ de \mathcal{A}/H cumple que $R \cap W \cap H$ es acotado. Pero $W \cap H$ es el subespacio generado por las normales a los hiperplanos en \mathcal{A}/H , por lo que R' es una región relativamente acotada de \mathcal{A}/H . Por otra parte, toda región R' de \mathcal{A}/H relativamente acotada cumple que alguna de las dos regiones de \mathcal{A} que se encuentran a su lado es relativamente acotada en \mathcal{A} , ya que si no el vector normal de H sería linealmente independiente de los vectores normales a los demás hiperplanos en \mathcal{A} . Luego existe una biyección entre las regiones de $\mathcal{A} - H$ separadas en dos por H , tal que alguna de las dos partes es relativamente acotada, y las regiones relativamente acotadas de \mathcal{A}/H , por lo que $b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A} - H) + b(\mathcal{A}/H)$.

Supongamos ahora que $\text{rango}(\mathcal{A} - H) = \text{rango}(\mathcal{A}) - 1$. Llamemos W al subespacio generado por los vectores normales a los hiperplanos en $\mathcal{A} - H$, y sea α un vector normal a H . El vector α no pertenece entonces a W , por lo que $\alpha = \vec{w} + \vec{u}$ con $\vec{w} \in W$ y $0 \neq \vec{u} \in W^\perp$. Llamemos $W' = \text{gen}(W, \alpha)$. Si R es una región de \mathcal{A} y $\vec{x} \in R \cap W'$ es un punto en su interior entonces el único hiperplano de \mathcal{A} que intersecta a la recta $l = \{\vec{x} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ es H , por lo que R debe contener un rayo de la recta l . Como $l \subseteq W'$ entonces $R \cap W'$ es no acotado, es decir, R no es relativamente acotada. Esto muestra que $b(\mathcal{A}) = 0$, con lo que concluye la prueba. \square

Lema 3.2.2 (Fórmula de eliminación-restricción). *Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n , y sea H un hiperplano en \mathcal{A} . Entonces*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}-H}(t) - \chi_{\mathcal{A}/H}(t).$$

Demostración. De nuevo podemos suponer que $H = \mathbb{R}^{n-1}$. Como el polinomio característico de un arreglo de hiperplanos depende únicamente de su orden parcial de intersecciones, también podemos suponer que \mathcal{A} es un arreglo de \mathbb{Q} -hiperplanos. Nótese que entonces $\mathcal{A} - H$ y \mathcal{A}/H son también arreglos de \mathbb{Q} -hiperplanos. Ahora, sea p un primo tal que \mathcal{A} , $\mathcal{A} - H$ y \mathcal{A}/H tienen buena reducción módulo p . Por el método de campos finitos (Teorema 3.1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(p) &= p^n - \left| \bigcup_{J \in \mathcal{A}_p} J \right| \\ &= p^n - \left| \left(\bigcup_{J \in \mathcal{A}_p - H_p} J \right) \sqcup \left(H_p - \bigcup_{J \in \mathcal{A}_p - H_p} (J \cap H_p) \right) \right| \\ &= p^n - \left| \bigcup_{J \in \mathcal{A}_p - H_p} J \right| - \left| H_p - \bigcup_{J \in \mathcal{A}_p - H_p} (J \cap H_p) \right| \\ &= p^n - \left| \bigcup_{J \in (\mathcal{A}-H)_p} J \right| - \left(p^{n-1} - \left| \bigcup_{J \in \mathcal{A}_p - H_p} (J \cap H_p) \right| \right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}-H}(p) - \left(p^{n-1} - \left| \bigcup_{J \in \mathcal{A}-H} (J \cap H)_p \right| \right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}-H}(p) - \left(p^{n-1} - \left| \bigcup_{J \in (\mathcal{A}/H)_p} J \right| \right) \\ &= \chi_{\mathcal{A}-H}(p) - \chi_{\mathcal{A}/H}(p). \end{aligned}$$

Nuevamente por el Teorema 3.1.2 sabemos que esta igualdad se tiene para infinitos primos, por lo que ambos polinomios deben ser iguales, es decir,

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}-H}(t) - \chi_{\mathcal{A}/H}(t),$$

con lo que termina la prueba. □

Ahora sí enunciaremos el teorema principal, que relaciona el polinomio característico y el número de regiones.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Zaslavsky). *Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n . Entonces*

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \tag{3.4}$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rango}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1). \tag{3.5}$$

Demostración. Si $\mathcal{A} = \emptyset$ entonces $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n$ y $r(\mathcal{A}) = 1$, por lo que en este caso se cumple la ecuación (3.4). Por el Lema 3.2.2 tenemos que para todo arreglo \mathcal{A} , si $H \in \mathcal{A}$ entonces

$$(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}-H}(-1) + (-1)^{n-1} \chi_{\mathcal{A}/H}(-1).$$

Luego en vista del Lema 3.2.1, $r(\mathcal{A})$ y $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ satisfacen la misma recurrencia, lo que prueba la ecuación (3.4).

La ecuación (3.5) también se cumple cuando $\mathcal{A} = \emptyset$, ya que en este caso todo el espacio es relativamente acotado y por lo tanto $b(\mathcal{A}) = 1$. En otro caso, llamemos $d(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rango}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$, y supongamos que $\mathcal{A} = \{H, H_1, H_2, \dots, H_k\}$. Por el Lema 3.2.2 se tiene que

$$\chi_{\mathcal{A}}(1) = \chi_{\mathcal{A}-H}(1) - \chi_{\mathcal{A}/H}(1). \quad (3.6)$$

Supongamos que $\text{rango}(\mathcal{A}) = \text{rango}(\mathcal{A}-H)$. Podemos asumir que $H = \mathbb{R}^{n-1}$, es decir, que el vector normal a H es $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Llamemos $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i) \in \mathbb{R}^n$ al vector normal de H_i , para $1 \leq i \leq k$. Luego claramente si el hiperplano $H_i \in \mathcal{A}$ es tal que $H \cap H_i \neq \emptyset$ entonces el vector normal al hiperplano $H \cap H_i \in \mathcal{A}/H$ es $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{n-1}^i) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Y si el hiperplano $H_i \in \mathcal{A}$ es tal que $H \cap H_i = \emptyset$ entonces el vector normal a H_i es $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{rango}(\mathcal{A}) &= \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_{n-1}^k & \alpha_n^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_{n-1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \text{rango}(\mathcal{A}/H) + 1, \end{aligned}$$

y en vista de la ecuación (3.6) tenemos que $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}-H) + d(\mathcal{A}/H)$.

Supongamos ahora que $\text{rango}(\mathcal{A}) = \text{rango}(\mathcal{A}-H) + 1$, y denotemos por rg a la función rango de $L(\mathcal{A})$. Definamos la función $F : L(\mathcal{A}-H) \rightarrow L(\mathcal{A}/H)$ como

$$F \left(\bigcap_{i \in S} H_i \right) = H \cap \left(\bigcap_{i \in S} H_i \right) = \bigcap_{i \in S} (H \cap H_i)$$

para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. F está bien definida, ya que si

$$\bigcap_{i \in S} H_i \neq \emptyset$$

entonces, como el vector normal a H es linealmente independiente de los vectores normales a los demás hiperplanos en \mathcal{A} , tenemos que

$$H \cap \bigcap_{i \in S} H_i \neq \emptyset.$$

Claramente F es sobreyectiva. Además, es fácil ver que F es inyectiva. De hecho, si $H \cap x = H \cap y$ para $x, y \in L(\mathcal{A} - H)$ entonces

$$H \cap x = H \cap (x \cap y) = H \cap y.$$

Luego

$$\text{rg}(x) = \text{rg}(H \cap x) - 1 = \text{rg}(H \cap (x \cap y)) - 1 = \text{rg}(x \cap y),$$

por lo que $x = x \cap y$. De manera análoga tenemos que $y = x \cap y$ y entonces $x = y$, probando la inyectividad de F . Finalmente es claro que F respeta el orden, por lo que F es un isomorfismo entre $L(\mathcal{A} - H)$ y $L(\mathcal{A}/H)$. Entonces por el Lema 3.2.2 tenemos que $d(\mathcal{A})$ es cero.

Luego, en vista del Lema 3.2.1, en ambos casos $b(\mathcal{A})$ y $d(\mathcal{A})$ satisfacen la misma recurrencia, lo que prueba la ecuación (3.5). \square

Corolario 3.2.4. *Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n . Entonces $r(\mathcal{A})$ y $b(\mathcal{A})$ dependen sólo de $L(\mathcal{A})$.*

En la Figura 3.2 se muestran dos arreglos en \mathbb{R}^2 con el mismo orden parcial de intersecciones y sin embargo “geoméricamente” distintos. Por ejemplo, el primer arreglo tiene una región acotada de cuatro lados mientras que el segundo no. No obstante, el corolario afirma que deben tener el mismo número de regiones y de regiones relativamente acotadas, 10 y 2 respectivamente.

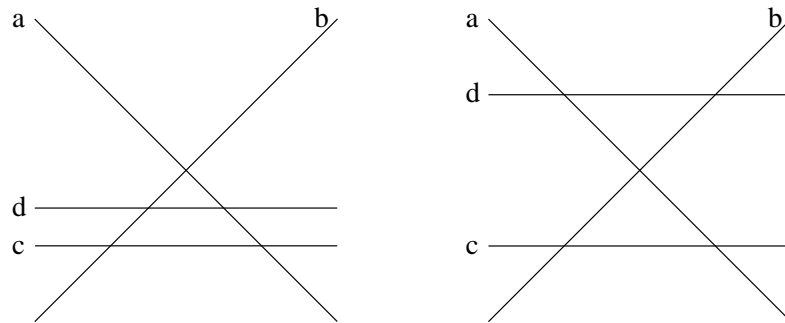


Figura 3.2: Dos arreglos en \mathbb{R}^2 con el mismo orden parcial de intersecciones

El teorema de Zaslavsky es uno de los grandes resultados en la teoría de hiperplanos. El siguiente ejemplo muestra una de sus bellas aplicaciones.

Ejemplo 3.2.5. Sea G un grafo. Una orientación ω de G es una asignación de una dirección $v \rightarrow u$ o $u \rightarrow v$ para cada arista $\{u, v\}$ de G . Un ciclo dirigido de ω es una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_k de G tal que $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ en ω . Diremos que la orientación ω es acíclica si no tiene ciclos dirigidos.

En el Ejemplo 3.1.5 definimos el arreglo \mathcal{A}_G y mostramos que $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$. Ahora, toda región de \mathcal{A}_G esta determinada según su posición respecto a cada hiperplano de \mathcal{A}_G . Es decir, al escoger una región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$ estamos especificando si los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ cumplen $x_i < x_j$ o $x_i > x_j$, para cada arista $\{i, j\}$ de G . Indiquemos por la dirección $i \rightarrow j$ que $x_i < x_j$, y por $j \rightarrow i$ que $x_i > x_j$. De esta forma la región R define de manera natural una orientación ω_R de G . Además, es claro que dos regiones distintas definen orientaciones distintas.

Probaremos ahora que las orientaciones de G definidas por las regiones de \mathcal{A}_G son precisamente las orientaciones acíclicas de G . Si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$ y ω_R tuviera un ciclo $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$ entonces un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ satisfaría $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k} < x_{i_1}$, lo que es una contradicción. Luego ω_R es acíclica.

Para el recíproco, supongamos que ω es una orientación acíclica de G . Nótese que debe existir un vértice de G del que no salen flechas. Esto ya que si caminamos por las aristas de G siguiendo la dirección de las flechas no podemos volver a pasar por un mismo vértice, debido a que ω es acíclica. Por lo tanto el proceso debe terminar, y debe hacerlo en un vértice del que no salen flechas. Sea j_n uno de estos vértices. Si lo quitamos, la orientación restante continúa siendo acíclica, por lo que existe un vértice j_{n-1} del que no salen flechas (excepto posiblemente a j_n). Continuando con este proceso, obtenemos un ordenamiento j_1, j_2, \dots, j_n de los vértices de G , de tal forma que si $j_i \rightarrow j_k$ entonces $i < k$. Luego si tomamos un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_{j_1} < x_{j_2} < \dots < x_{j_n}$, la región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$ que lo contenga cumple que $\omega = \omega_R$.

Por lo tanto hemos construido una biyección entre las orientaciones acíclicas de un grafo G y las regiones de \mathcal{A}_G . Entonces, si denotamos por $OA(G)$ al conjunto de orientaciones acíclicas de un grafo G , tenemos que

$$|OA(G)| = r(\mathcal{A}_G) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}_G}(-1) = (-1)^n \chi_G(-1).$$

Este teorema fue probado por Stanley en 1973 por primera vez, usando argumentos de la teoría de grafos. La prueba expuesta aquí, que usa la teoría de arreglos de hiperplanos, se debe a Greene y Zaslavsky en 1983.

Capítulo 4

El arreglo de Shi

En este capítulo se introduce y se muestran varias propiedades de un arreglo de hiperplanos en particular: el arreglo de Shi. Este arreglo en \mathbb{R}^n fue considerado por primera vez por Shi, quien calculó su número de regiones [10].

En la primera parte se define el arreglo de Shi y se prueban algunas de sus propiedades básicas. Se calcula también su polinomio característico y se obtiene su número de regiones como corolario del teorema de Zaslavsky. El polinomio característico fue hallado por primera vez por Headley [7], pero la bella prueba que se muestra aquí se debe a Athanasiadis [1].

La segunda parte se centra en dar una prueba biyectiva para el número de regiones del arreglo de Shi. Se definen primero las funciones de parqueo y se prueban algunos hechos básicos sobre estas. Las funciones de parqueo fueron consideradas primero por Konheim y Weiss [8], quienes calcularon su cantidad. Se exhibe aquí una elegante prueba de su enumeración debida a Pollak. Después se muestra un etiquetamiento de las regiones del arreglo de Shi por funciones de parqueo, y se prueba que este es de hecho una biyección. El etiquetamiento fue sugerido por Pak, pero fue Stanley quien probó por primera vez que era una biyección [12]. La prueba que se da en este trabajo es debida al autor, y tiene algunas ideas similares a las de la prueba de Stanley.

4.1. Definición y propiedades básicas

El arreglo de Shi en n dimensiones, denotado por \mathcal{S}_n , consiste de los $n(n-1)$ hiperplanos en \mathbb{R}^n

$$x_i - x_j = 0, 1, \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq n.$$

Si W es el subespacio de \mathbb{R}^n generado por las normales a los hiperplanos en \mathcal{S}_n entonces claramente

$$W \subseteq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}.$$

Además, si denotamos por $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector con todas sus coordenadas cero excepto por un 1 en la i -ésima, el conjunto $\{e_1 - e_j \mid 2 \leq j \leq n\}$ es un subconjunto de W consistente de $n - 1$ vectores linealmente independientes, por lo que $\dim(W) \geq n - 1$. Luego se debe dar la igualdad

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\},$$

y por lo tanto $\text{rango}(\mathcal{S}_n) = n - 1$.

En la Figura 4.1 se muestra el arreglo \mathcal{S}_3 en $W = \ker(x_1 + x_2 + x_3) \cong \mathbb{R}^2$, de donde $r(\mathcal{S}_3) = 16$ y $b(\mathcal{S}_3) = 4$.

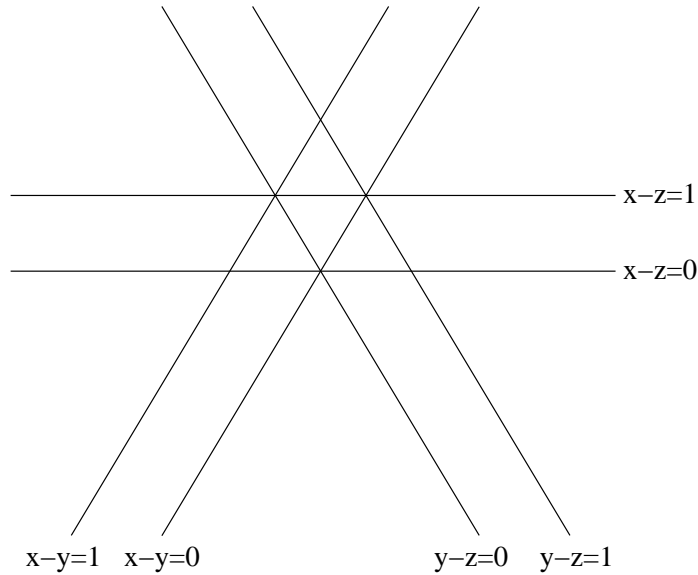


Figura 4.1: El arreglo de Shi \mathcal{S}_3 en $\ker(x_1 + x_2 + x_3)$

Teorema 4.1.1. *El polinomio característico de \mathcal{S}_n es*

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t - n)^{n-1}.$$

Demostración. Sea p un primo tal que \mathcal{S}_n tiene buena reducción módulo p . Consideremos el conjunto

$$C = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}_p)^n \mid i < j \implies \alpha_i \neq \alpha_j \text{ y } \alpha_i \neq \alpha_j + 1\}.$$

Por el método de campos finitos (Teorema 3.1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{S}_n}(p) &= \left| (\mathbb{F}_p)^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H \right| \\ &= |C|. \end{aligned}$$

Ahora ubiquemos en orden los elementos de \mathbb{F}_p sobre un círculo, siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Poner los números $1, 2, \dots, n$ sobre n de estos espacios determina una n -tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que cumple $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, definiendo α_i como el elemento de \mathbb{F}_p sobre el que se puso el número i . Además toda n -tupla que cumpla esta condición esta determinada por uno de tales posicionamientos. Luego existe una biyección entre los elementos de C y las formas de poner los números $1, 2, \dots, n$ sobre el círculo de tal forma que para todo j , en el espacio siguiente (en el sentido de las manecillas del reloj) a en el que se puso el número j no hay puesto un número menor que j (llamaremos a esto un *buen posicionamiento*). Contaremos entonces cuantos buenos posicionamientos hay.

La Figura 4.2 muestra dos posicionamientos con $p = 11$ y $n = 6$. El de la izquierda es un buen posicionamiento que corresponde a la tupla $(4, 9, 5, 1, 10, 6) \in C$, mientras que el de la derecha no es buen posicionamiento y corresponde a la tupla $(9, 3, 1, 10, 2, 7) \notin C$.

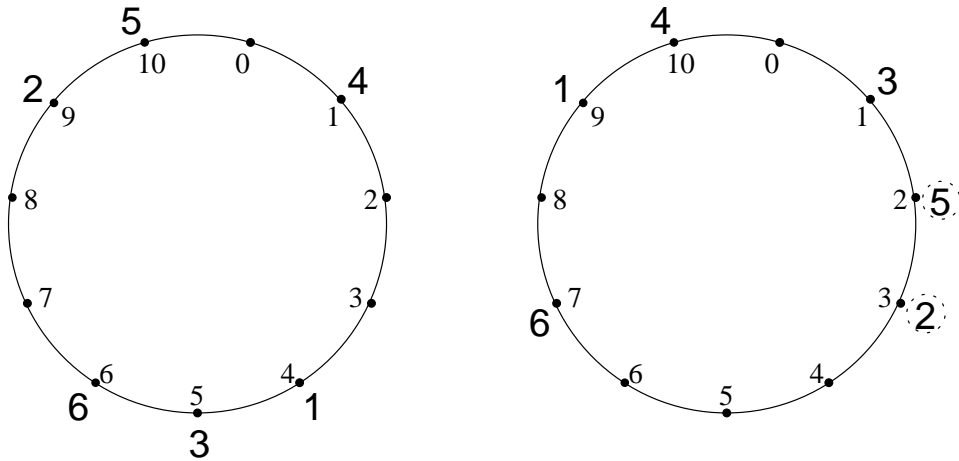


Figura 4.2: Dos posicionamientos de los números $1, 2, \dots, 6$ con $p = 11$

Escojamos un partición ordenada débil $\pi = (B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ con $p - n$ partes, tal que $1 \in B_1$ (débil significa que aceptamos partes vacías). Es decir, $\bigcup B_i = \{1, 2, \dots, n\}$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Podemos construir un buen posicionamiento basados en la partición π , de la siguiente forma. Ponemos primero sobre el círculo los elementos de B_1 en espacios consecutivos (en el sentido de las manecillas del reloj) y en orden ascendente, ubicando primero a $1 \in B_1$ sobre algún elemento $\alpha_1 \in \mathbb{F}_p$.

Luego saltamos un espacio y ponemos los elementos de B_2 en espacios consecutivos y en orden ascendente. Saltamos otro espacio y ponemos los elementos de B_3 en espacios consecutivos y en orden ascendente. Así continuamos hasta poner todos los elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ sobre el círculo. Gracias a los espacios saltados, el posicionamiento resultante es un buen posicionamiento. La Figura 4.3 muestra el buen posicionamiento construido a partir de

$$\pi = (\{1, 3, 5\}, \{2\}, \emptyset, \{4, 6\}, \emptyset)$$

y $\alpha_1 = 9$, con $p = 11$ y $n = 6$. Es fácil ver que todo buen posicionamiento pue-

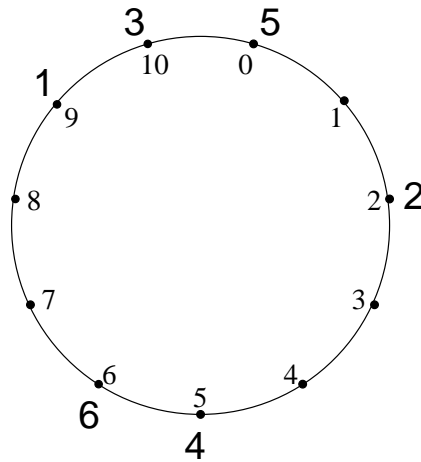


Figura 4.3: Un buen posicionamiento

de ser construido de esta forma a partir de una única partición ordenada débil $\pi = (B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ con $p - n$ partes tal que $1 \in B_1$ y una escogencia de α_1 , por lo que hemos definido una biyección.

Ahora, hay $(p - n)^{n-1}$ posibles particiones π , ya que para $2 \leq i \leq n$ hay $p - n$ posibilidades para el j tal que $i \in B_j$. Y además hay p posibles α_1 . Entonces

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(p) = |C| = p(p - n)^{n-1}.$$

Por el Teorema 3.1.2 esta igualdad es cierta para infinitos primos, por lo que ambos polinomios deben ser iguales, es decir,

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t - n)^{n-1},$$

que era lo buscado. □

Ya con el polinomio característico de \mathcal{S}_n podemos conocer el número de regiones.

Corolario 4.1.2. *Se tiene que $r(\mathcal{S}_n) = (n + 1)^{n-1}$ y $b(\mathcal{S}_n) = (n - 1)^{n-1}$.*

Demostración. El corolario es una aplicación directa del Teorema 3.2.3. □

Al ver estas expresiones tan sencillas para el número de regiones, es de esperarse que exista una prueba biyectiva directa de estas igualdades. En la siguiente sección probaremos de esta manera que $r(\mathcal{S}_n) = (n + 1)^{n-1}$, lo que nos permitirá explorar más a fondo las propiedades del arreglo de Shi.

4.2. Prueba biyectiva para el número de regiones

Antes de dar la prueba necesitamos un nuevo concepto y algunas de sus propiedades.

4.2.1. Funciones de parqueo

Supongamos que en una calle de una sola vía hay n posibles espacios en los que parquear, numerados $1, 2, \dots, n$ en ese orden. Hay también n carros C_1, C_2, \dots, C_n que entran a la calle de a uno en uno en ese orden y tratan de parquear. Cada carro C_i tiene un espacio preferido para parquear $P_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Cuando llega el momento para el carro C_i de ir a buscar espacio, va directamente a su espacio preferido P_i . Si este está desocupado parquea allí, si no, continúa por la calle y parquea en el primer espacio libre que encuentre. Por ejemplo, supongamos que $n = 4$ y $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (2, 1, 2, 3)$. Entonces primero C_1 entra y parquea en el lugar 2. Luego entra C_2 y parquea en el lugar 1. Después entra C_3 y va al lugar 2, pero como este está ocupado sigue avanzando hasta parquear en el primer espacio libre que encuentra, es decir, el espacio 3. Finalmente entra C_4 y va al espacio 3, pero como está ocupado, termina parqueando en el espacio 4. Por el contrario, si $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (3, 1, 4, 3)$ entonces C_4 no puede parquear, ya que en su turno tanto su espacio preferido como todos los siguientes están ocupados.

Diremos entonces que $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ es una *función de parqueo de longitud n* si todos los carros pueden parquear. Sin embargo, existe una caracterización más práctica de las funciones de parqueo.

Proposición 4.2.1. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, y sea $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \{1, 2, \dots, n\}^n$. Sea $Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_n$ el reordenamiento creciente de las entradas de P . Entonces P es una función de parqueo si y solo si $Q_i \leq i$ para todo i .*

Demostración. Si P es una función de parqueo entonces para todo i , los i carros que terminaron parqueando en los primeros i espacios deben tener espacio preferido menor o igual que i , por lo que $Q_i \leq i$.

Supongamos ahora que P no es una función de parqueo, y que el primer carro que

no encuentra espacio para parquear es C_k . Digamos que l es el último espacio vacío en el momento en que el carro C_k busca parquear. Entonces tanto el carro C_k como los carros que en ese momento están parqueados en los espacios después de l (que son $n - l$) deben tener espacio preferido mayor que l . Por lo tanto hay al menos $n - l + 1$ carros con espacio preferido mayor que l , por lo que $Q_l > l$. \square

A pesar de la sencillez la prueba, la anterior proposición tiene un corolario interesante.

Corolario 4.2.2. *Cualquier permutación de las entradas de una función de parqueo es también una función de parqueo.*

A continuación se muestran todas las funciones de parqueo en el caso $n = 2$ y $n = 3$, con una notación simplificada.

$n = 2$: 11, 12, 21.

$n = 3$: 111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Teorema 4.2.3. *El número de funciones de parqueo de longitud n es $(n + 1)^{n-1}$.*

Demostración. Consideremos $n + 1$ (en vez de n) espacios para parquear ordenados en un círculo, numerados $1, 2, \dots, n + 1$ en el orden de las manecillas del reloj. Supongamos que hay n carros C_1, C_2, \dots, C_n con espacios preferidos (P_1, P_2, \dots, P_n) que intentan en ese orden parquear allí, pero ahora $1 \leq P_i \leq n + 1$ (en vez de $1 \leq P_i \leq n$). Cada carro en su turno entra al círculo a su espacio preferido, y avanza desde ahí en el sentido de las manecillas del reloj hasta encontrar un espacio vacío en el que parquea. Nótese entonces lo siguiente:

- Todos los carros siempre pueden parquear, ya que los espacios están ordenados en círculo y siempre habrá un espacio vacío.
- Después de que todos los carros hayan parqueado quedará un espacio vacío.
- La sucesión (P_1, P_2, \dots, P_n) es una función de parqueo si y solo si el espacio que queda vacío después de que todos los carros han parqueado es el $n + 1$.
- Si la sucesión (P_1, P_2, \dots, P_n) produce al final el espacio vacío i , entonces la sucesión $(P_1 + k, P_2 + k, \dots, P_n + k)$ (tomando las entradas módulo $n + 1$) produce al final el espacio vacío $i + k$ (módulo $n + 1$).

Por lo tanto para cada sucesión (P_1, P_2, \dots, P_n) , exactamente una de las $n + 1$ sucesiones de la forma $(P_1 + k, P_2 + k, \dots, P_n + k)$ (módulo $n + 1$) con $1 \leq k \leq n + 1$ es una función de parqueo. Como hay $(n + 1)^n$ posibles sucesiones (P_1, P_2, \dots, P_n) , se tiene entonces que el número de funciones de parqueo es $(n + 1)^n / (n + 1) = (n + 1)^{n-1}$. \square

Viendo este resultado y el Corolario 4.1.2, es natural preguntarse por una biyección sencilla entre las regiones del arreglo \mathcal{S}_n y las funciones de parqueo de longitud n , con lo que se probaría de manera directa que $r(\mathcal{S}_n) = (n+1)^{n-1}$. Precisamente esto es lo que se mostrará en la siguiente parte.

4.2.2. El etiquetamiento de las regiones

Construiremos ahora una biyección entre las regiones del arreglo \mathcal{S}_n y las funciones de parqueo de longitud n .

Diremos que dos regiones $R, R' \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ están separadas por el hiperplano $H \in \mathcal{S}_n$ si R y R' se encuentran en distintos lados de H .

Primero, llamemos R_0 a la región de \mathcal{S}_n definida por

$$x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_n + 1.$$

Ahora, definamos un etiquetamiento $\lambda : \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ de las regiones de \mathcal{S}_n como sigue.

- $\lambda(R_0) = (1, 1, \dots, 1)$.
- Si las regiones $R, R' \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ están separadas únicamente por el hiperplano $H : x_i = x_j$ ($i < j$), y si R y R_0 están en el mismo lado de H , entonces definimos $\lambda(R') = \lambda(R) + e_i$ ($e_i \in \mathbb{Z}^n$ es el vector con todas sus coordenadas 0 excepto por un 1 en la i -ésima).
- Si las regiones $R, R' \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ están separadas únicamente por el hiperplano $H : x_i = x_j + 1$ ($i < j$), y si R y R_0 están en el mismo lado de H , entonces definimos $\lambda(R') = \lambda(R) + e_j$.

Nótese que este etiquetamiento está bien definido, ya que la etiqueta $\lambda(R)$ de una región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ depende solamente de los hiperplanos que la separan de R_0 .

En la Figura 4.4 se muestra el etiquetamiento λ con notación simplificada cuando $n = 3$, teniendo en cuenta que las coordenadas de \mathbb{R}^3 son $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.

Teorema 4.2.4. *El etiquetamiento λ es una biyección entre las regiones de \mathcal{S}_n y las funciones de parqueo de longitud n .*

Dejaremos la prueba de este teorema para después, mientras desarrollamos una forma sencilla de representar las regiones de \mathcal{S}_n . Si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$, diremos que la función $X : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *representación por intervalos de la región R* si el punto $(X(1), X(2), \dots, X(n)) \in \mathbb{R}^n$ está en R . Si dos representaciones por intervalos representan la misma región las llamaremos *equivalentes*. En realidad, es mejor imaginarnos

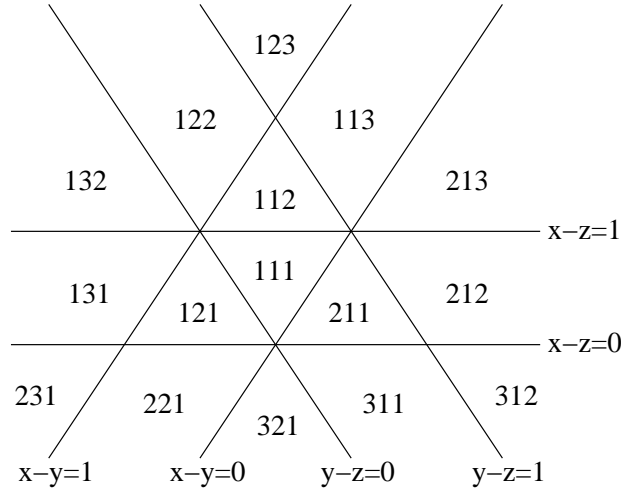


Figura 4.4: Etiquetamiento λ de las regiones de \mathcal{S}_3

estas representaciones por intervalos como formas en las que n intervalos de longitud 1, numerados $1, 2, \dots, n$, pueden ser ubicados en la recta real: si X es una representación por intervalos de la región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ entonces pensaremos a X como la colección ordenada de los n intervalos $[X(i), X(i) + 1]$. Al intervalo $[X(i), X(i) + 1]$ lo llamaremos el *intervalo número i de X* , y lo denotaremos por X_i . La región R queda entonces determinada por la posición relativa de los extremos de los intervalos de X . Por ejemplo, para saber a que lado del hiperplano $x_i = x_j + 1$ (con $i < j$) se encuentra R basta mirar en X cuál es menor entre el punto inicial de X_i y el punto final de X_j .

La ventaja principal de imaginarnos una representación por intervalos X de esta forma es que podemos visualizarla fácilmente con un diagrama, de la siguiente manera. Primero dibujamos la recta real, con la convención que los números crecen hacia la derecha. Luego dibujamos allí los intervalos de X , teniendo en cuenta que si $i < j$ entonces X_i se dibuja un poco más abajo que X_j . Como la región determinada por X no depende de la ubicación exacta de cada intervalo sino de su posición relativa a los demás, ignoraremos en el dibujo a la recta real inicial. Para entender mejor esto, en la Figura 4.5 se muestra la representación por intervalos X dada por

$$(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6)) = (1.8, 0.6, 2.8, 0, 3.2, 1.2).$$

Ahora sí examinemos más a fondo el etiquetamiento λ . Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y sea X una representación por intervalos de una región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$. Diremos que el par (X_i, X_j) es de tipo 1 si $i < j$ y $X(i) < X(j)$, y que es de tipo 2 si $i > j$ y $X(i)+1 < X(j)$. Entonces el par (X_i, X_j) es de tipo 1 si y solo si R y R_0 están separadas por el hiperplano $x_i = x_j$ (con $i < j$), y es de tipo 2 si y solo si R y R_0 están separadas por el hiperplano

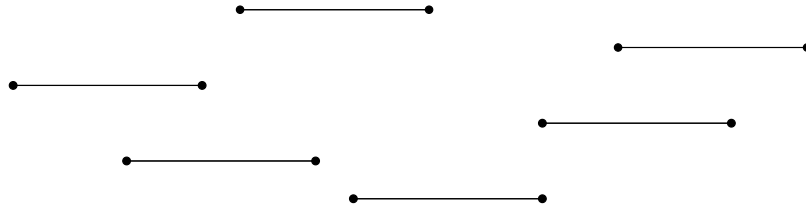


Figura 4.5: Representación por intervalos

$x_j = x_i + 1$ (con $i > j$). La Figura 4.6 muestra cómo es un par de tipo 1 y de tipo 2 en X , y la Figura 4.7 muestra como es una representación por intervalos de la región R_0 ; con lo que se ve claramente lo anterior. Ahora, si llamamos

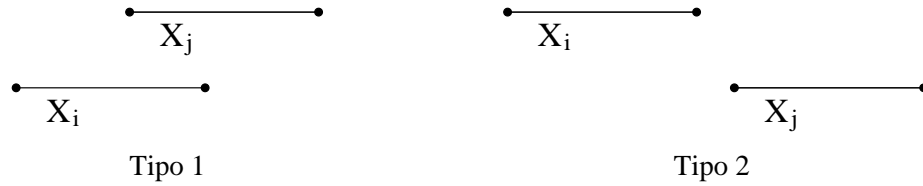


Figura 4.6: Parejas de tipo 1 y de tipo 2

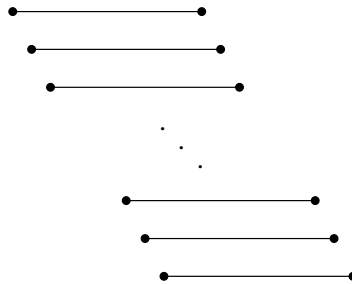


Figura 4.7: Representación por intervalos de la región R_0

$$\lambda(X_i) = \left| \{j \mid (X_i, X_j) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| + 1$$

entonces, recordando la definición del etiquetamiento λ , tenemos que

$$\lambda(R) = (\lambda(X_1), \lambda(X_2), \dots, \lambda(X_n)).$$

Por ejemplo, si X es la representación por intervalos de la Figura 4.5 entonces $\lambda(R) = (3, 5, 2, 5, 1, 3)$, y $\lambda(X_4) = 5$ debido a los pares (X_4, X_6) , (X_4, X_5) (de tipo 1) y (X_4, X_1) , (X_4, X_3) (de tipo 2).

Es fácil ver que $\lambda(R)$ es una función de parqueo de longitud n , ya que $\lambda(X_i) - 1$ es menor o igual al número de intervalos de X que se encuentran a la derecha de X_i . Por lo tanto, si $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$ es la lista de los intervalos de X de derecha a izquierda entonces $\lambda(X_{i_j}) \leq j$.

Enunciaremos ahora un lema que usaremos para la prueba.

Lema 4.2.5. *Sea X una representación por intervalos, y sea $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Si $j \in I$ y el par (X_i, X_j) es de tipo 1 o de tipo 2 entonces*

$$\left| \{l \in I \mid (X_i, X_l) \text{ es de tipo 1 o 2}\} \right| > \left| \{l \in I \mid (X_j, X_l) \text{ es de tipo 1 o 2}\} \right|.$$

Demostración. Supongamos que (X_i, X_j) es de tipo 1, y sea $l \in I$. Si (X_j, X_l) es un par de tipo 1 entonces (X_i, X_l) también lo es. Si (X_j, X_l) es de tipo 2 entonces, si $i < l$ se tiene que (X_i, X_l) es de tipo 1, y si $i > l$ se tiene que (X_i, X_l) es de tipo 2. Luego

$$\{l \in I \mid (X_j, X_l) \text{ es de tipo 1 o 2}\} \subseteq \{l \in I \mid (X_i, X_l) \text{ es de tipo 1 o 2}\}.$$

Pero además esta contención es propia, ya que j es un elemento que está en la diferencia de los dos conjuntos. Por lo tanto se tiene el resultado.

Supongamos ahora que (X_i, X_j) es de tipo 2, y sea $l \in I$. Si (X_j, X_l) es un par de tipo 2 entonces (X_i, X_l) también lo es. Si (X_j, X_l) es de tipo 1 entonces, si $i < l$ se tiene que (X_i, X_l) es de tipo 1, y si $i > l$ se tiene que (X_i, X_l) es de tipo 2. Luego, análogamente al caso anterior, se tiene el resultado. Esto completa la prueba del lema. \square

Ahora sí probaremos que el etiquetamiento λ es en realidad una biyección.

Demostración del Teorema 4.2.4. Sea $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ una función de parqueo de longitud n . Mostraremos que existe una única región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $\lambda(R) = P$. Para esto construiremos por pasos una representación por intervalos X de esta región, y mostraremos que es única módulo equivalencia.

Primero, sea $P_{i_1} \leq P_{i_2} \leq \dots \leq P_{i_n}$ el reordenamiento creciente de las entradas de P . En el paso k de la construcción decidiremos la posición que tendrá el intervalo X_{i_k} de X , de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

(a) No hay igualdades entre los extremos de X_{i_k} y extremos de otros intervalos anteriormente ubicados, es decir, no existe $j < k$ tal que $X(i_j) = X(i_k)$, $X(i_j) = X(i_k) + 1$ o $X(i_j) + 1 = X(i_k)$.

(b) Se cumple

$$\left| \{i_l \mid l < k \text{ y } (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2}\} \right| = P_{i_k} - 1.$$

(c) Para todo $j < k$ se tiene que (X_{i_j}, X_{i_k}) no es de tipo 1 ni 2.

Describiremos ahora la construcción.

Paso 1. Ubicamos el intervalo X_{i_1} (en cualquier parte de la recta real).

Paso k . Supongamos que ya han sido ubicados los intervalos $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{k-1}}$ cumpliendo con las tres condiciones. Consideremos el conjunto de puntos

$$A_k = \{X(i_j) \mid j < k \text{ y } i_j > i_k\} \cup \{X(i_j) - 1 \mid j < k \text{ y } i_j < i_k\}.$$

Estos $k-1$ puntos dividen la recta real en k intervalos abiertos ($k-2$ acotados y 2 no acotados), denotémoslos por U_0, U_1, \dots, U_{k-1} en orden de derecha a izquierda. Por la definición de A_k tenemos entonces que para todo j ,

$$X(i_k) \in U_j \implies \left| \{i_l \mid l < k \text{ y } (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2}\} \right| = j. \quad (4.1)$$

Supongamos por ejemplo que $k = 6$, que ya hemos puesto los intervalos X_2, X_3, X_5, X_6, X_7 y que ahora queremos ubicar a X_4 . En la Figura 4.8 se muestra un posible ejemplo. En la parte de abajo de la figura está dibujada la recta real y los intervalos U_0, U_1, \dots, U_5 .

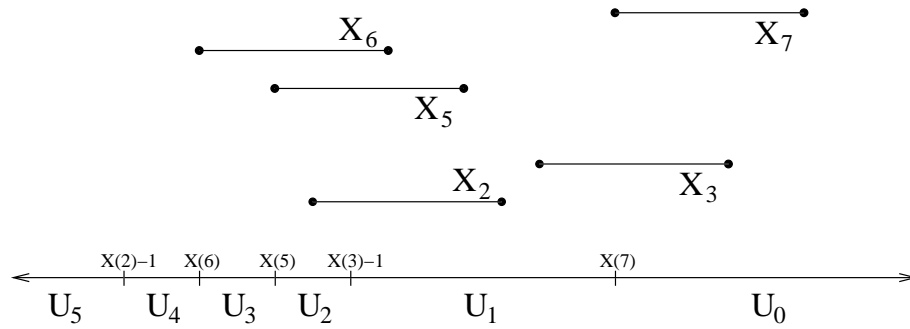


Figura 4.8: Posible configuración en la ubicación de X_4

Ahora, como P es una función de parqueo entonces $m = P_{i_k} \leq k$. Consideremos el conjunto

$$B_k = \{X(i_j) \mid j < k \text{ y } i_j < i_k\} \cup \{X(i_j) + 1 \mid j < k \text{ y } i_j > i_k\}.$$

Probaremos que

$$B_k \subseteq \bigcup_{j=0}^{m-1} U_j.$$

Esto claramente es cierto si $m = k$. Si no, supongamos por contradicción que existe $x \in B_k$ tal que $x \in U_l$ con $l \geq m$. Digamos que x es un extremo del intervalo X_{i_j} , es decir, $x = X(i_j)$ o $x = X(i_j) + 1$. Entonces si definiéramos $X(i_k)$ como un punto de U_m más a la derecha que x , tendríamos por la definición de B_k que (X_{i_j}, X_{i_k})

es de tipo 1 o 2. Luego por el Lema 4.2.5, tomando $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, y por (4.1)

$$\begin{aligned}
P_{i_k} &= \left| \{i_l \mid l < k \text{ y } (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| \\
&= \left| \{i_l \in I \mid (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| \\
&< \left| \{i_l \in I \mid (X_{i_j}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| \\
&= \left| \{i_l \mid l < j \text{ y } (X_{i_j}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| + 1 \\
&= P_{i_j} - 1 + 1 \\
&= P_{i_j},
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Entonces podemos definir $X(i_k)$ como un punto de U_{m-1} que esté a la izquierda de todos los puntos de B_k y de tal forma que cumpla la condición (a). Por (4.1) tenemos que

$$\left| \{i_l \mid l < k \text{ y } (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \right| = P_{i_k} - 1,$$

cumpliendo la condición (b). Además, como $X(i_k)$ está a la izquierda de todos los puntos de B_k entonces se cumple la condición (c).

Nótese que la región que representará X al terminar la construcción quedará determinada únicamente por la posición de $X(i_k)$ respecto a los puntos de A_k y B_k . La forma en que ubicamos al intervalo X_{i_k} es entonces la única posible (módulo equivalencia) para que se cumplan las condiciones (a), (b) y (c); ya que para cumplir con la condición (b) la implicación (4.1) exige que $X(i_k)$ esté en U_{m-1} , y para cumplir con la condición (c) $X(i_k)$ debe estar a la izquierda de todos los puntos de B_k .

Al terminar la construcción hemos ya definido la posición de todos los n intervalos $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$. Por la condición (a) tenemos que X es la representación por intervalos de una región R . Por la condición (c),

$$\{j \mid (X_{i_k}, X_j) \text{ es de tipo 1 o 2} \} \subseteq \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}$$

para todo k . Luego

$$\{j \mid (X_{i_k}, X_j) \text{ es de tipo 1 o 2} \} = \{i_l \mid l < k \text{ y } (X_{i_k}, X_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2} \},$$

y por lo tanto por la condición (b) se tiene que $\lambda(X_{i_k}) = P_{i_k}$ para todo k . Es decir, $\lambda(R) = P$.

Para ver que la región R es única, supongamos que existe $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $\lambda(R') = P$ y mostremos que $R = R'$. Tomemos X' una representación por intervalos de R' .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los intervalos de X' cumplen la condición (a). Por el Lema 4.2.5 tomando $I = \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que X' también cumple la condición (c). Entonces para todo k

$$\{i_l \mid l < k \text{ y } (X'_{i_k}, X'_{i_l}) \text{ es de tipo 1 o 2}\} = \{j \mid (X'_{i_k}, X'_j) \text{ es de tipo 1 o 2}\} = P_{i_k} - 1,$$

por lo que X' también cumple la condición (b). Pero en la construcción vimos que toda representación por intervalos que cumpla las condiciones (a), (b) y (c) debe ser equivalente a X , por lo que se tiene lo buscado. \square

Capítulo 5

El etiquetamiento de las caras

En este capítulo se extiende el etiquetamiento λ de las regiones de \mathcal{S}_n a un etiquetamiento de todas las caras de \mathcal{S}_n . Se exploran y se aplican varias propiedades interesantes y sorprendentes de este etiquetamiento, obteniendo así una mayor comprensión de la combinatoria y la geometría del arreglo de Shi.

La definición del orden parcial de caras de un arreglo de hiperplanos se presenta en la primera parte. También allí se muestran algunas representaciones de las caras que se usarán después.

La segunda parte se centra en exhibir un resultado que permite extender de forma natural el etiquetamiento de las regiones descrito en el capítulo anterior.

En la tercera parte se explora más a fondo este etiquetamiento y se prueban algunas de sus propiedades. También se hace clara su importancia, al permitir una descripción combinatoria del orden parcial de caras del arreglo de Shi. Se deducen también varias consecuencias de tipo geométrico y combinatorio, y se muestra su gran utilidad en la prueba de distintos hechos.

Tanto el resultado que permite extender el etiquetamiento de las regiones como la definición del etiquetamiento mismo y todas sus propiedades aquí presentadas, se deben al autor.

5.1. El orden parcial de caras

Definición 5.1.1. Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^n . Una *cara (cerrada)* de \mathcal{A} es un conjunto C no vacío de la forma $C = \bar{R} \cap x$ (\bar{R} denota la clausura topológica de R), donde $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ y $x \in L(\mathcal{A})$. El *orden parcial de caras* de \mathcal{A} , denotado por $F(\mathcal{A})$, es el conjunto de todas las caras de \mathcal{A} ordenadas por inclusión.

Nótese que en particular \bar{R} es una cara de \mathcal{A} para toda región R de \mathcal{A} . La dimensión de una cara $C \in F(\mathcal{A})$ se define como la dimensión del menor subespacio afín que contenga a C .

Por ejemplo, el arreglo de hiperplanos en \mathbb{R}^2 presentado en la parte izquierda de la Figura 5.1 tiene dos caras de dimensión 0, siete caras de dimensión 1 y seis caras de dimensión 2. Su orden parcial de caras es el que se muestra a la derecha.

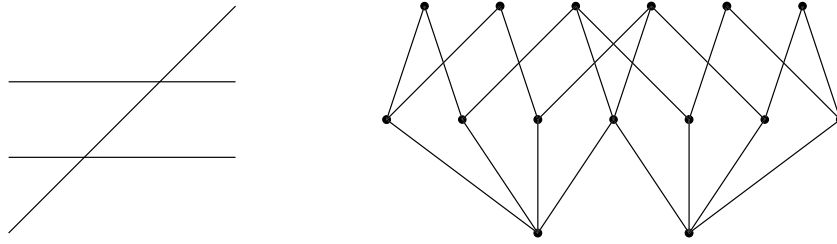


Figura 5.1: Arreglo en \mathbb{R}^2 y su orden parcial de caras

Cada cara C de un arreglo de hiperplanos \mathcal{A} en \mathbb{R}^n puede ser determinada especificando para cada $H \in \mathcal{A}$, a que lado de H se encuentra C . Más formalmente, si $H \in \mathcal{A}$ definamos H^+ y H^- como los dos semiespacios cerrados en los que H corta a \mathbb{R}^n (escogiendo arbitrariamente cuál de los dos es H^+), y llamemos $H^0 = H$. Entonces las caras de \mathcal{A} son precisamente las intersecciones no vacías de la forma

$$C = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H^{\sigma_H},$$

donde $\sigma_H \in \{+, -, 0\}$ para todo H . Luego cada cara C queda codificada por su sucesión de signos $(\sigma_H)_{H \in \mathcal{A}}$, con la convención que $\sigma_H \neq 0$ si y solo si $C \not\subseteq H$.

Nos interesaremos aquí por explorar el orden parcial de caras del arreglo de Shi. Por simplicidad denotaremos $\mathcal{F}_n = F(\mathcal{S}_n)$. Para las caras del arreglo de Shi es útil representar su sucesión de signos mediante una matriz, de la siguiente manera. Primero, definamos \mathcal{M}_n como el conjunto de matrices de $n \times n$ con entradas en $\{+, -, 0\}$ y con todas sus entradas de la diagonal iguales a 0. Como convención, si $i < j$ entonces para $H \in \mathcal{S}_n$ dado por $H : x_i = x_j$ escogeremos $H^- : x_i \geq x_j$, y para $H : x_i = x_j + 1$ escogeremos $H^- : x_i \leq x_j + 1$. Ahora, si $C \in \mathcal{F}_n$ es una cara con sucesión de signos $(\sigma_H)_{H \in \mathcal{S}_n}$, definamos su matriz asociada $M_C \in \mathcal{M}_n$ como

$$(M_C)_{i,j} = \begin{cases} \sigma_H & \text{si } j < i, \text{ donde } H : x_j = x_i \\ \sigma_H & \text{si } i < j, \text{ donde } H : x_i = x_j + 1 \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Por ejemplo, la cara \bar{R}_0 está definida por $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq x_n + 1$ y por lo tanto su matriz asociada $M_{\bar{R}_0}$ tiene ceros en la diagonal y $-$ en todas las demás entradas. En

general, si $C \in \mathcal{F}_n$ entonces C es la clausura de una región si y solo si todas las entradas de M_C que no estén en la diagonal son distintas de cero. Además, si $C, D \in \mathcal{F}_n$ entonces $C \subseteq D$ si y solo si las entradas de M_C son iguales a las de M_D con excepción de algunos ceros que se reemplazan por $+$ o $-$ en M_D .

La definición de las representaciones por intervalos que dimos en el capítulo anterior puede ser extendida fácilmente para representar a todas las caras del arreglo de Shi. Diremos que la función $X : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ en una representación por intervalos de la cara $C \in \mathcal{F}_n$ si el punto $(X(1), X(2), \dots, X(n)) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a C y no a ninguna otra cara que esté contenida propiamente en C . Seguiremos con las mismas convenciones descritas en el capítulo anterior, sólo que ahora se permiten igualdades entre los extremos de los intervalos de X de la forma $X(i) = X(j)$ o $X(i) = X(j) + 1$, con $i < j$. Por ejemplo, en la parte superior de la Figura 5.2 se muestra una cara $C \in \mathcal{F}_3$, y abajo su representación por intervalos. La matriz asociada a la cara C es

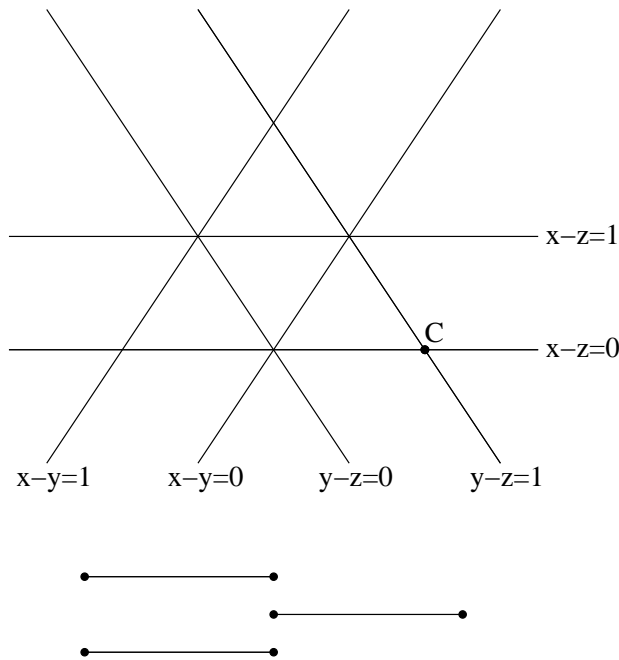


Figura 5.2: Cara $C \in \mathcal{F}_3$ y su representación por intervalos

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. El etiquetamiento

Ahora extenderemos el etiquetamiento de las regiones de \mathcal{S}_n que describimos en el capítulo anterior a un etiquetamiento de todas las caras en \mathcal{F}_n .

Primero, denotemos por \mathcal{P}_n al orden parcial de las funciones de parqueo de longitud n con el orden definido por $(P_1, P_2, \dots, P_n) \leq (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ si y solo si $P_i \leq Q_i$ para todo i . En la Figura 5.3 se muestra el diagrama de \mathcal{P}_3 . Es fácil ver que \mathcal{P}_n es un orden parcial graduado de rango $n(n-1)/2$, con función rango dada por

$$\text{rg}((P_1, P_2, \dots, P_n)) = P_1 + P_2 + \dots + P_n - n.$$

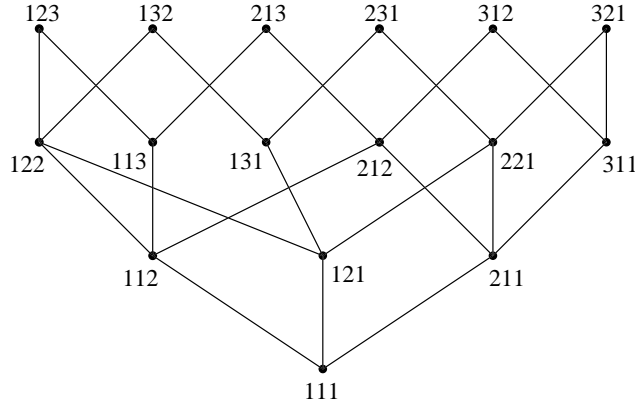


Figura 5.3: Orden parcial \mathcal{P}_3

A continuación enunciaremos el teorema que nos permitirá definir el etiquetamiento de \mathcal{F}_n .

Teorema 5.2.1. *Sea $C \in \mathcal{F}_n$. Existen dos únicas regiones $C^-, C^+ \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $C \subseteq \overline{C^-}$, $C \subseteq \overline{C^+}$ y para toda región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $C \subseteq \overline{R}$ se tiene que $\lambda(C^-) \leq \lambda(R) \leq \lambda(C^+)$ en \mathcal{P}_n . Además, $\overline{C^-} \cap \overline{C^+} = C$.*

Demostración. Sea X una representación por intervalos de C . Claramente el teorema es cierto si C es la clausura de una región R de \mathcal{S}_n , es decir, si en X no hay igualdades de la forma $X(i) = X(j)$ o $X(i) = X(j) + 1$ con $i < j$, ya que en este caso $C^- = C^+ = R$. Si no, tomemos r como

$$r = \text{máx}\{X(i) \mid \text{existe } j > i \text{ tal que } X(i) = X(j) \text{ o } X(i) = X(j) + 1\},$$

y k como

$$k = \text{máx}\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid X(i) = r\}.$$

En la Figura 5.4 se muestra un ejemplo de la representación por intervalos X , y se señala cuál es el intervalo X_k .

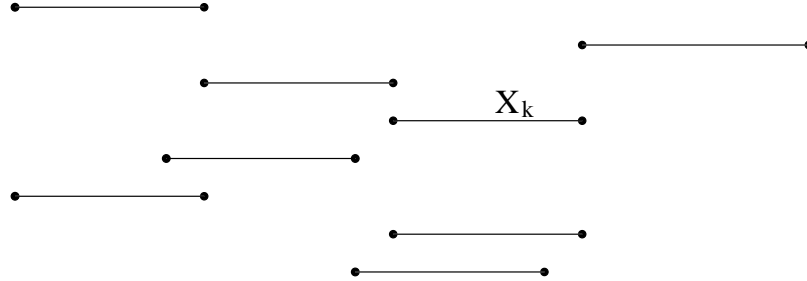


Figura 5.4: Representación por intervalos

Definamos una nueva representación por intervalos X' como

$$X'(i) = \begin{cases} X(i) & \text{si } i \neq k \\ X(i) - \epsilon & \text{si } i = k, \end{cases}$$

donde ϵ es un número real suficientemente pequeño tal que para todo j , si $X(k) > X(j)$ entonces $X(k) - \epsilon > X(j)$, y si $X(k) > X(j) + 1$ entonces $X(k) - \epsilon > X(j) + 1$. En otras palabras, X' es la misma representación por intervalos que X pero moviendo el intervalo X_k una pequeña distancia a la izquierda. Llamemos $C' \in \mathcal{F}_n$ a la cara representada por X' .

Comparemos ahora las matrices M_C y $M_{C'}$. Claramente las entradas de M_C que no están en la k -ésima fila o en la k -ésima columna son iguales a las de $M_{C'}$. También son iguales las entradas de la k -ésima fila o la k -ésima columna de M_C que sean distintas de cero, debido a la escogencia de ϵ . Nótese además que en X no hay igualdades de la forma $X(i) = X(k) + 1$ con $i < k$ ya que sería una contradicción con la maximalidad de r , ni igualdades de la forma $X(k) = X(i)$ con $k < i$ porque estas contradirían la escogencia de k . Entonces en la k -ésima columna de M_C no hay entradas iguales a cero (excepto en la diagonal). Las entradas iguales a cero en la k -ésima fila de M_C se deben a igualdades en X de la forma $X(k) = X(i) + 1$ con $k < i$, o de la forma $X(i) = X(k)$ con $i < k$. En el primer caso tenemos que $X'(k) < X(i) + 1 = X'(i) + 1$, por lo que $(M_{C'})_{k,i} = -$; y en el segundo $X'(i) = X(i) > X'(k)$, por lo que $(M_{C'})_{k,i} = -$. Luego M_C tiene las mismas entradas que $M_{C'}$ excepto algunos ceros (los de la k -ésima fila) que se reemplazan por $-$ en $M_{C'}$. Esto implica que $C \subseteq C'$.

A partir de la cara C construimos entonces una cara C' que la contiene, y además cumple que M_C tiene las mismas entradas que $M_{C'}$ excepto por algunos ceros que se reemplazan por $-$ en $M_{C'}$. Si repetimos la construcción empezando con la cara C' , obtenemos ahora una cara C'' . Y continuando con este proceso hasta terminar, conseguimos

una cadena

$$C \subseteq C' \subseteq C'' \subseteq \dots \subseteq C^{(m)}.$$

La matriz $M_{C^{(m)}}$ es entonces la misma matriz M_C pero cambiando todos sus ceros (excepto los de la diagonal) por $-$. Por lo tanto $C^{(m)}$ es la clausura de alguna región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$, y definiremos $C^- = R$.

Para definir C^+ realizamos la misma construcción pero ahora moviendo el intervalo X_k una pequeña distancia a la derecha, obteniendo así una cara $D' \in \mathcal{F}_n$ que contiene a C . Los ceros de la k -ésima fila de M_C se reemplazan ahora por $+$ en $M_{D'}$. Repetimos el mismo proceso hasta terminar, consiguiendo una cadena

$$C \subseteq D' \subseteq D'' \subseteq \dots \subseteq D^{(l)}.$$

La cara $D^{(l)}$ que obtenemos al final cumple que su matriz asociada $M_{D^{(l)}}$ es la misma matriz M_C pero cambiando todos sus ceros (excepto los de la diagonal) por $+$. Y definimos análogamente la región C^+ , de tal forma que $\overline{C^+} = D^{(l)}$.

Como $M_{\overline{C^-}}$ y $M_{\overline{C^+}}$ son la misma matriz que M_C pero cambiando los ceros (excepto los de la diagonal) por $-$ y $+$ respectivamente, entonces es fácil ver que $\overline{C^-} \cap \overline{C^+} = C$.

Ahora nótese que según nuestra convención, si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ y a_i es el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{R}}$ entonces $\lambda(R) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1)$. Sea $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $C \subseteq \overline{R}$. Recordemos que entonces $M_{\overline{R}}$ es la misma matriz que M_C pero cambiando todos sus ceros (excepto los de la diagonal) por $+$ o $-$. Luego para todo i , el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{R}}$ es por lo menos el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{C^-}}$, y a lo más el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{C^+}}$. Por lo tanto $\lambda(C^-) \leq \lambda(R) \leq \lambda(C^+)$ en \mathcal{P}_n . Esto muestra que C^- y C^+ tienen la propiedad deseada. La unicidad de C^- y C^+ se tiene gracias a esto. \square

En el siguiente corolario vemos como el etiquetamiento λ nos proporciona información sobre la geometría del arreglo de Shi.

Corolario 5.2.2. Sean $R_1, R_2, \dots, R_k \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$, y definamos $P^i = (P_1^i, P_2^i, \dots, P_n^i) = \lambda(R_i)$ para $1 \leq i \leq k$ como sus etiquetas. Si

$$Q = \left(\max_i P_1^i, \max_i P_2^i, \dots, \max_i P_n^i \right)$$

no es una función de parqueo entonces

$$\bigcap_{i=1}^k \overline{R_i} = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que

$$C = \bigcap_{i=1}^k \bar{R}_i \neq \emptyset.$$

Claramente $C \in \mathcal{F}_n$. Luego por el teorema anterior tenemos que $P^i \leq \lambda(C^+)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Pero como $\lambda(C^+)$ es una función de parqueo entonces Q también lo es, por lo que se tiene lo buscado. \square

Ahora sí definiremos el etiquetamiento de las caras del arreglo de Shi.

Definición 5.2.3. El etiquetamiento $\hat{\lambda} : \mathcal{F}_n \rightarrow \text{Int}(\mathcal{P}_n)$ se define como

$$\hat{\lambda}(C) = [\lambda(C^-), \lambda(C^+)].$$

Nótese que si $C = \bar{R}$ para alguna región R de \mathcal{S}_n entonces $\hat{\lambda}(C) = \{\lambda(R)\}$, por lo que podemos ver al etiquetamiento $\hat{\lambda}$ de las caras como una extensión del etiquetamiento λ definido anteriormente sólo para las regiones. Además como $\overline{C^-} \cap \overline{C^+} = C$ para toda cara C entonces este etiquetamiento es inyectivo. Lamentablemente no resulta ser sobreyectivo, es decir, sólo algunos intervalos en $\text{Int}(\mathcal{P}_n)$ aparecen como etiquetas. En la siguiente sección trataremos de explorar más a fondo la relación entre las caras de \mathcal{S}_n y sus etiquetas.

5.3. Algunas propiedades del etiquetamiento

La siguiente propiedad es tal vez el hecho más sorprendente del etiquetamiento $\hat{\lambda}$.

Teorema 5.3.1. Sea $C \in \mathcal{F}_n$. Entonces $\hat{\lambda}(C) = \{\lambda(R) \mid R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \text{ y } C \subseteq \bar{R}\}$.

Demostración. Por simplicidad, llamaremos $I(C) = \{\lambda(R) \mid R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \text{ y } C \subseteq \bar{R}\}$. El Teorema 5.2.1 nos asegura que $I(C) \subseteq \hat{\lambda}(C)$. Ahora, nótese que

$$|\hat{\lambda}(C)| = \prod_{i=1}^n \left((\lambda(C^+))_i - (\lambda(C^-))_i + 1 \right),$$

ya que $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ es una función de parqueo en $\hat{\lambda}(C)$ si y solo si $(\lambda(C^-))_i \leq P_i \leq (\lambda(C^+))_i$ para todo i . Tomemos una representación por intervalos X de la cara C , y definamos

$$A(C, i) = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid j > i \text{ y } X(i) = X(j)\}$$

y

$$B(C, i) = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid j < i \text{ y } X(j) = X(i) + 1\}.$$

Entonces $d(C, i) = |A(C, i)| + |B(C, i)|$ es el número de entradas iguales a cero en la i -ésima columna de M_C (sin contar la de la diagonal). Luego, recordando la descripción de las matrices M_{C^-} y M_{C^+} dada en la prueba del Teorema 5.2.1, $d(C, i)$ es la diferencia entre el número de entradas iguales a + en la i -ésima columna de M_{C^+} y el número de entradas iguales a + en la i -ésima columna de M_{C^-} . Por lo tanto $d(C, i) = (\lambda(C^+))_i - (\lambda(C^-))_i$, y

$$|\hat{\lambda}(C)| = \prod_{i=1}^n (d(C, i) + 1).$$

Probaremos entonces que $|I(C)| \geq \prod_{i=1}^n (d(C, i) + 1)$, lo que es equivalente a la igualdad entre $I(C)$ y $\hat{\lambda}(C)$ por un argumento de cardinalidad. Sabemos que $|I(C)|$ es el número de regiones de \mathcal{S}_n cuya clausura contiene a C . Luego $|I(C)|$ es el número de formas (módulo equivalencia) en las que es posible mover los intervalos de X una pequeña distancia, cambiando las igualdades en X de la forma $X(i) = X(j)$ o $X(i) = X(j) + 1$ (con $i < j$) a desigualdades. Probaremos que hay al menos $\prod_{i=1}^n (d(C, i) + 1)$ formas de hacer esto.

La prueba es por inducción en n . En el caso $n = 2$ es fácil comprobar que la igualdad se tiene para las cinco caras en \mathcal{F}_2 . Supongamos ahora que el teorema es cierto para $n - 1$. Consideremos $C \in \mathcal{F}_n$, y sea X una representación por intervalos de C . Sea r el mínimo $X(i)$, y sea k el mínimo i tal que $X(i) = r$. Por la escogencia de k no existe i tal que $i < k$ y $X(i) = X(k)$, o $i > k$ y $X(k) = X(i) + 1$. Es decir, para todo $i \neq k$ se tiene que $k \notin A(C, i)$ y $k \notin B(C, i)$. La Figura 5.5 muestra un ejemplo de la representación por intervalos X , y señala cuál es el intervalo X_k . En este caso $k = 4$, $A(C, 4) = \{6\}$ y $B(C, 4) = \{1, 2\}$.

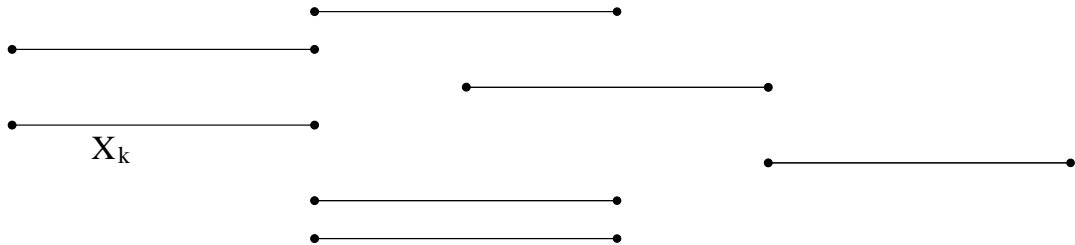


Figura 5.5: Representación por intervalos

Entonces, ignorando el intervalo X_k , por hipótesis de inducción tenemos que hay al menos $\prod_{i \neq k} (d(C, i) + 1)$ formas distintas de mover (de la forma descrita anteriormente) los intervalos de X excepto el intervalo X_k . Consideremos una de estas formas en las

que es posible mover los intervalos, y para $i \neq k$ llamemos $X'(i)$ a la nueva posición del intervalo número i . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los intervalos fueron movidos muy poco, de tal forma que existe un intervalo abierto U alrededor de $X(k) + 1$ tal que $X'(i) + 1 \in U$ si y solo si $X(i) + 1 = X(k) + 1$, y $X'(i) \in U$ si y solo si $X(i) = X(k) + 1$. Entonces los $d(C, k)$ puntos de $\{X'(i) + 1 \mid i \in A(C, k)\} \cup \{X'(i) \mid i \in B(C, k)\}$ separan el intervalo U en $d(C, k) + 1$ intervalos abiertos disyuntos $U_0, U_1, \dots, U_{d(C,k)}$. En la Figura 5.6 se presenta una posible forma de mover los intervalos de la Figura 5.5 excepto X_k , y se muestran los intervalos U y $U_0, U_1, \dots, U_{d(C,k)}$.

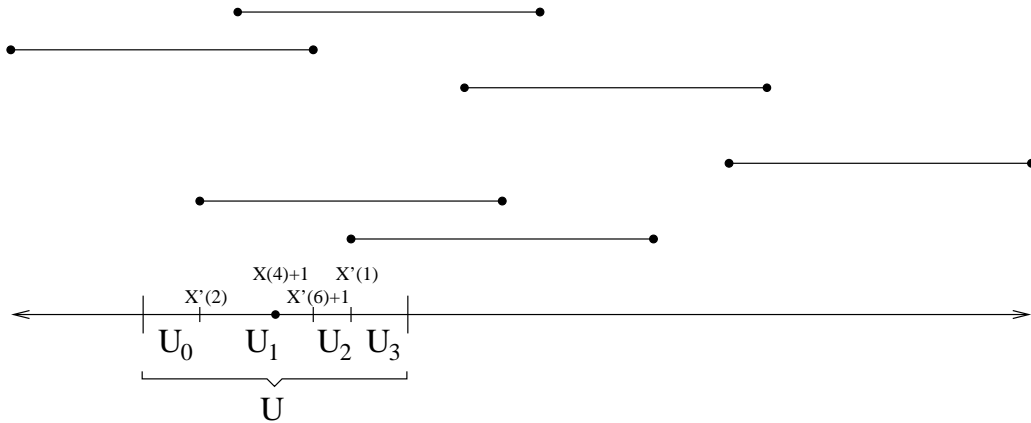


Figura 5.6: Posible forma de mover los intervalos excepto X_k

Para cada j tal que $0 \leq j \leq d(C, k)$, sea z_j algún punto en el interior del intervalo U_j , y definamos una representación por intervalos $Y_j : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$Y_j(i) = \begin{cases} X'(i) & \text{si } i \neq k \\ z_j & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Y_j es entonces una representación por intervalos obtenida moviendo los intervalos de X una pequeña distancia (de la forma descrita anteriormente). Como U fue escogido suficientemente pequeño, Y_j representa una cara (de hecho, la clausura de una región) que contiene a C . Además si $i \neq j$ entonces Y_i y Y_j representan diferentes caras, ya que $Y_i(k) \in U_i$ y $Y_j(k) \in U_j$. Luego hemos probado que por cada forma de mover los intervalos de X excepto el intervalo X_k , hay por lo menos $d(C, k) + 1$ regiones diferentes que contienen a C en su clausura. Entonces

$$|I(C)| \geq (d(C, k) + 1) \prod_{i \neq k} (d(C, i) + 1) = \prod_{i=1}^n (d(C, i) + 1)$$

como queríamos, luego la prueba está completa. □

Una consecuencia geométrica de este teorema es la siguiente.

Corolario 5.3.2. Sean $R_1, R_2, \dots, R_k \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que

$$C = \bigcap_{i=1}^k \overline{R_i} \neq \emptyset,$$

y llamemos $P^i = (P_1^i, P_2^i, \dots, P_n^i) = \lambda(R_i)$ para $1 \leq i \leq k$ a sus etiquetas. Si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ cumple que

$$\left(\min_i P_1^i, \min_i P_2^i, \dots, \min_i P_n^i \right) \leq \lambda(R) \leq \left(\max_i P_1^i, \max_i P_2^i, \dots, \max_i P_n^i \right)$$

entonces $C \subseteq \overline{R}$.

Demostración. Claramente C es una cara de \mathcal{S}_n . Además para todo i se tiene que $C \subseteq \overline{R_i}$, por lo que $\lambda(R_i) \in \hat{\lambda}(C)$. Entonces $\lambda(C^-) \leq \lambda(R_i) \leq \lambda(C^+)$ para todo i , por lo que la hipótesis del corolario implica que $\lambda(C^-) \leq \lambda(R) \leq \lambda(C^+)$, es decir, $\lambda(R) \in \hat{\lambda}(C)$. Luego por el teorema anterior, $C \subseteq \overline{R}$. \square

Otro importante corolario se enuncia a continuación.

Corolario 5.3.3. Sean $C, D \in \mathcal{F}_n$. Entonces $C \subseteq D$ si y solo si $\hat{\lambda}(C) \supseteq \hat{\lambda}(D)$.

Demostración. Nótese que por el teorema anterior $\hat{\lambda}(C) \supseteq \hat{\lambda}(D)$ si y solo si

$$\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \mid C \subseteq \overline{R}\} \supseteq \{R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \mid D \subseteq \overline{R}\},$$

luego el resultado se sigue. \square

Si definimos \mathcal{J}_n como el orden parcial de los intervalos de \mathcal{P}_n que aparecen como etiquetas de las caras de \mathcal{S}_n , con el orden dado por $I \leq J$ si $J \supseteq I$, entonces el corolario anterior nos dice que $\hat{\lambda}$ es un isomorfismo entre \mathcal{P}_n e \mathcal{J}_n . Luego obtener una caracterización de los intervalos que aparecen en \mathcal{J}_n nos daría una descripción completamente combinatoria del orden parcial de caras del arreglo de Shi.

Ahora, cada cara de \mathcal{S}_n tiene una dimensión. Para ver como esta se representa en su etiqueta necesitamos la siguiente definición.

Sea X una representación por intervalos de una cara $C \in \mathcal{F}_n$. Una *cadena* de X es una tupla $(X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k})$ de intervalos de X construida de la siguiente manera.

- Se escoge X_{a_1} de tal forma que no exista $i < a_1$ tal que $X(i) = X(a_1) + 1$, ni $i > a_1$ tal que $X(i) = X(a_1)$.
- Una vez escogido X_{a_j} , si existe algún $i < a_j$ tal que $X(i) = X(a_j)$ entonces $a_{j+1} = \max\{i < j \mid X(i) = X(a_j)\}$. Si este i no existe, pero existe algún $l > a_j$ tal que $X(l) + 1 = X(a_j)$, entonces $a_{j+1} = \max\{l > j \mid X(l) + 1 = X(a_j)\}$.

- La cadena termina cuando no existan i ni l descritos en el paso anterior.

Para entender mejor esto, la Figura 5.7 muestra un ejemplo de la posición que deben tener los intervalos de una cadena $(X_8, X_5, X_1, X_9, X_7, X_6, X_3, X_4, X_2)$.

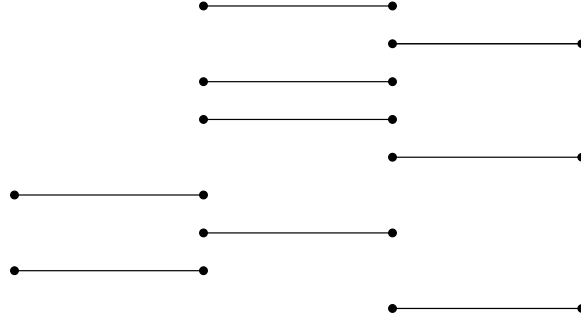


Figura 5.7: Cadena $(X_8, X_5, X_1, X_9, X_7, X_6, X_3, X_4, X_2)$

X puede tener varias cadenas, pero la definición implica que todas deben ser disjuntas y que cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ debe pertenecer a alguna de estas. Es fácil ver que el número de cadenas de la representación por intervalos X es igual a la dimensión de la cara C . Para esto, nótese que si movemos un poco algún intervalo X_j para así obtener una nueva representación por intervalos X' , entonces todos los intervalos de la cadena a la que pertenece X_j deben también ser movidos junto a X_j si queremos que X' represente también a C . Además cada cadena es “independiente” de las demás, es decir, podemos mover los intervalos de una sola cadena sin mover los demás y seguir representando la misma cara C .

Proposición 5.3.4. *Sea $C \in \mathcal{F}_n$, y denotemos $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$. Entonces*

$$\dim(C) = \left| \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid P_i = Q_i\} \right|.$$

Demostración. Sea X una representación por intervalos de C . Recordemos las definiciones de $A(C, i)$, $B(C, i)$ y $d(C, i)$ dadas en la prueba del Teorema 5.3.1. Nótese que si $(X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k})$ es una cadena de X entonces $d(C, a_i) = 0$ si y solo si $i = 1$, ya que para todo j se tiene que $a_j \in A(C, a_{j+1}) \cup B(C, a_{j+1})$. Luego el número de cadenas de X es igual al número de $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $d(C, i) = 0$. Pero habíamos visto que $d(C, i) = Q_i - P_i$, por lo que se tiene el resultado. \square

Siguiendo con las mismas ideas podemos probar la siguiente proposición.

Proposición 5.3.5. *Sea $C \in \mathcal{F}_n$, y $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$. Entonces*

$$\{Q_1 - P_1, Q_2 - P_2, \dots, Q_n - P_n\} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

para algún $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea X una representación por intervalos de C . Nótese que si $H = (X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k})$ es una cadena de X entonces

$$A(C, a_{j+1}) \cup B(C, a_{j+1}) \subseteq A(C, a_j) \cup B(C, a_j) \cup \{a_j\}$$

para todo j , por lo que $d(C, a_{j+1}) \leq d(C, a_j) + 1$. Luego $Q_{a_{j+1}} - P_{a_{j+1}} \leq Q_{a_j} - P_{a_j} + 1$ para todo j . Como $Q_{a_1} - P_{a_1} = 0$ entonces $\{Q_{a_1} - P_{a_1}, Q_{a_2} - P_{a_2}, \dots, Q_{a_k} - P_{a_k}\} = \{0, 1, \dots, m_H\}$ para algún $m_H \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, haciendo la unión sobre todas las cadenas de X , tenemos el resultado buscado. \square

Nótese que esta proposición restringe en gran cantidad los posibles intervalos que aparecen como etiquetas de alguna cara, por lo que es un paso hacia la caracterización de los elementos de \mathcal{J}_n . Por ejemplo, prohíbe que el intervalo $[12132, 32152]$ sea un elemento de \mathcal{J}_5 .

Ahora caracterizaremos los posibles tamaños de los intervalos que aparecen como etiquetas de caras de una dimensión fija.

Proposición 5.3.6. *El conjunto*

$$\left\{ |\hat{\lambda}(C)| \mid C \in \mathcal{F}_n \text{ y } \dim(C) = k \right\}$$

es el conjunto de todos los enteros positivos d tal que $d = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots (m+1)^{a_m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, donde $a_i > 0$ para todo i y $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n - k$.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{F}_n$ tal que $\dim(C) = k$, y sea $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$. Llamemos $a_i = |\{j \mid Q_j - P_j = i\}|$. Por la Proposición 5.3.5 tenemos que existe m tal que $a_i > 0$ si y solo si $i \leq m$. Luego

$$|\hat{\lambda}(C)| = |[P, Q]| = \prod_{i=1}^n (Q_i - P_i + 1) = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots (m+1)^{a_m}.$$

Además claramente $a_0 + a_1 + \dots + a_m = n$. Y por la Proposición 5.3.4 tenemos que $a_0 = k$, por lo que $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n - k$.

Por otra parte, si tomamos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ tales que $a_i > 0$ para todo i y $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ entonces es fácil construir una representación por intervalos X de una cara $C \in \mathcal{F}_n$ tal que $a_i = |\{j \mid d(C, j) = i\}|$. Luego, recordando que si $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$ entonces $d(C, j) = Q_j - P_j$, se obtiene el resultado. \square

El Teorema 5.3.1 afirma que $\hat{\lambda}(C) = \{\lambda(R) \mid R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \text{ y } C \subseteq \bar{R}\}$ para todo $C \in \mathcal{F}_n$, por lo que la proposición anterior también nos está dando información geométrica del arreglo de Shi.

Finalmente, caracterizaremos los intervalos de \mathcal{P}_n que aparecen como etiquetas de las caras de dimensión 1.

Teorema 5.3.7. *Sea $I = [P, Q]$ un intervalo de \mathcal{P}_n . Entonces I es la etiqueta de una cara de dimensión 1 si y solo si se cumplen las siguientes condiciones.*

(a) Q es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

(b) P está determinada por Q de la siguiente manera. Llamemos $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (Q^{-1}(1), Q^{-1}(2), \dots, Q^{-1}(n))$, y sean $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_k = n$ los números tal que

$$\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\} = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_j < a_{j+1}\}.$$

Entonces para todo $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, si j es tal que $i_j < r \leq i_{j+1}$ tenemos que

$$P_{a_r} = i_{j-1} + \left| \{l \in \{1, 2, \dots, n\} \mid i_{j-1} < l \leq i_j \text{ y } a_l > a_r\} \right| + 1,$$

con la convención que $i_{-1} = 0$.

Demostración. Para ver que las condiciones son necesarias, sea $C \in \mathcal{F}_n$ una cara de dimensión 1 tal que $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$, y sea X una representación por intervalos de C . X consiste entonces de una sola cadena $H = (X_{b_1}, X_{b_2}, \dots, X_{b_n})$. Recordemos que $Q_i - 1$ es el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{C}^+}$, y por lo tanto $Q_i - 1$ es el número de entradas iguales a $+$ o a 0 en la i -ésima columna de M_C (excepto la de la diagonal). Es decir,

$$Q_i = \left| \{j \mid j > i \text{ y } X(j) \geq X(i)\} \right| + \left| \{j \mid j < i \text{ y } X(j) \geq X(i) + 1\} \right| + 1.$$

Pero como X consiste sólo de la cadena H entonces para todo i

$$\{j \mid j > b_i \text{ y } X(j) \geq X(b_i)\} \cup \{j \mid j < b_i \text{ y } X(j) \geq X(b_i) + 1\} = \{b_1, b_2, \dots, b_{i-1}\},$$

por lo que $Q_{b_i} = i$. Esto muestra que Q es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, y además que $a_i = b_i$ para todo i .

En la Figura 5.8 se muestra una representación por intervalos de una cara $C \in \mathcal{F}_9$ de dimensión 1. En este ejemplo, la permutación $Q = (9, 8, 3, 5, 7, 2, 4, 1, 6)$ y la sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_9) = (8, 6, 3, 7, 4, 9, 5, 2, 1)$. Los números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_k$ son entonces $(i_0, i_1, i_2, i_3) = (0, 3, 5, 9)$.

Nótese que los números i_0, i_1, \dots, i_k cumplen que para todo m , $i_j < m \leq i_{j+1}$ si y solo si $X(a_m) = X(a_1) - j$. Luego

$$i_j = \left| \{l \mid X(l) > X(a_1) - j\} \right|.$$

Recordemos también que $P_i - 1$ es el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de $M_{\overline{C}^-}$, y por lo tanto $P_i - 1$ es el número de entradas iguales a $+$ en la i -ésima columna de M_C . Es decir,

$$P_i = \left| \{j \mid j > i \text{ y } X(j) > X(i)\} \right| + \left| \{j \mid j < i \text{ y } X(j) > X(i) + 1\} \right| + 1.$$

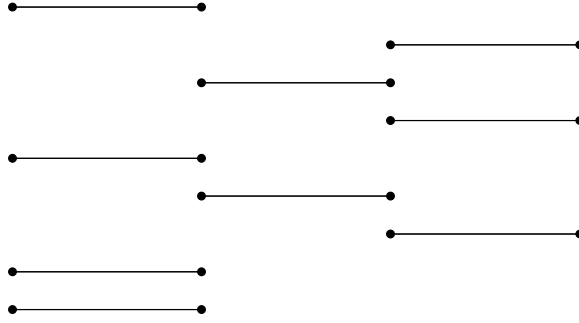


Figura 5.8: Representación por intervalos de una cara de dimensión 1

Sea $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ y j tal que $i_j < r \leq i_{j+1}$. Entonces $X(a_r) = X(a_1) - j$. Luego, como X consiste sólo de la cadena H ,

$$\begin{aligned} P_{a_r} &= \left| \{l \mid l > a_r \text{ y } X(l) > X(a_r)\} \right| + \left| \{l \mid l < a_r \text{ y } X(l) > X(a_r) + 1\} \right| + 1 \\ &= \left| \{l \mid l > a_r \text{ y } X(l) = X(a_r) + 1\} \right| + \left| \{l \mid X(l) > X(a_r) + 1\} \right| + 1 \\ &= \left| \{l \mid l > a_r \text{ y } X(l) = X(a_1) - (j - 1)\} \right| + \left| \{l \mid X(l) > X(a_1) - (j - 1)\} \right| + 1 \\ &= \left| \{m \mid a_m > a_r \text{ y } i_{j-1} < m \leq i_j\} \right| + i_{j-1} + 1, \end{aligned}$$

que era lo que buscábamos.

Para el recíproco, es fácil ver que si $I = [P, Q]$ es un intervalo de \mathcal{P}_n que satisface las condiciones (a) y (b) entonces I aparece como etiqueta de alguna cara de dimensión 1. De hecho, la representación por intervalos definida por

$$X(Q^{-1}(i)) = - \left| \{l \in \{1, 2, \dots, n\} \mid l < i \text{ y } Q^{-1}(l) < Q^{-1}(l + 1)\} \right|$$

representa una cara C de dimensión 1 que cumple $\hat{\lambda}(C) = I$. □

Este teorema tiene un bello corolario que se enuncia a continuación.

Corolario 5.3.8. *Si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ cumple que $\lambda(R)$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ entonces existe una única cara C de dimensión 1 tal que $C \subseteq \bar{R}$. Además, toda cara $C \in \mathcal{F}_n$ de dimensión 1 está contenida en la clausura de una única región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $\lambda(R)$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.*

Demostración. Supongamos que $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ es tal que $Q = \lambda(R)$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Por el teorema anterior sabemos que existe una única $P \in \mathcal{P}_n$ tal que el intervalo $[P, Q] = \hat{\lambda}(C)$ para alguna $C \in \mathcal{F}_n$ de dimensión 1. Por el Teorema 5.3.1 tenemos entonces que $C \subseteq \bar{R}$. Además para toda $C' \in \mathcal{F}_n$ de dimensión 1 tal que $C' \subseteq \bar{R}$ se tiene que $Q \in \hat{\lambda}(C')$, y como Q es un elemento maximal de \mathcal{P}_n entonces

$\hat{\lambda}(C') = [P', Q]$ para alguna $P' \in \mathcal{P}_n$. Por lo tanto $P = P'$ y entonces $C = C'$, lo que demuestra la unicidad de la cara C .

Por otra parte, si $C \in \mathcal{F}_n$ es una cara de dimensión 1 entonces por el teorema anterior $\hat{\lambda}(C) = [P, Q]$, con Q una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Por el Teorema 5.3.1, si $R \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ es la región tal que $\lambda(R) = Q$ entonces $C \subseteq \bar{R}$. Además para toda $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ tal que $C \subseteq \bar{R}'$ se tiene que $Q' = \lambda(R') \in [P, Q]$. Luego si Q' es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ entonces $Q' = Q$, debido a que Q' es maximal en \mathcal{P}_n . Por lo tanto $R = R'$, con lo que se prueba la unicidad de R . \square

Una consecuencia clara de este resultado es la siguiente.

Corolario 5.3.9. *El número de caras de \mathcal{S}_n de dimensión 1 es $n!$.*

Este es un caso particular de un resultado más general, expuesto primero por Athanasiadis [2]. Athanasiadis probó que si f_k es el número de caras de \mathcal{S}_n de dimensión k entonces f_k está dado por

$$f_k = \binom{n}{k} \cdot \left| \{f : \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\} \mid \text{Im } f \supseteq \{1, 2, \dots, n-k\}\} \right|.$$

Sin embargo la prueba de Athanasiadis es una prueba indirecta, por lo que la prueba biyectiva expuesta aquí nos permite una mayor claridad sobre la combinatoria del arreglo de Shi.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

Los resultados expuestos en este trabajo reflejan ampliamente las propiedades combinatorias del arreglo de Shi, y muestran que todavía restan bastantes aspectos de este por entender. También es claro que el etiquetamiento de las regiones es mucho más que una herramienta para contar, ya que provee información sobre la estructura de tipo geométrico y combinatorio del arreglo de Shi.

Stanley ha generalizado este etiquetamiento a una clase más amplia de arreglos de hiperplanos, llamados los arreglos de Shi extendidos. Es bastante probable que varios de los resultados que se presentan en el capítulo 5 puedan ser extendidos a estos arreglos, por lo que se considera un posible estudio en esta dirección. También resulta interesante la posibilidad de aislar las propiedades del etiquetamiento de las regiones que permitieron probar el Teorema 5.2.1 y el Teorema 5.3.1. De esta forma se podrían aplicar métodos semejantes a los aquí expuestos en diferentes arreglos de hiperplanos.

Por otra parte, el etiquetamiento de las caras abre paso a varios interrogantes. En primer lugar, se busca lograr una caracterización total y simple de los intervalos que aparecen como etiquetas de alguna cara, para así obtener una descripción completamente combinatoria del orden parcial de caras del arreglo de Shi. También se espera poder generalizar a mayores dimensiones la forma en que fueron contadas las caras de dimensión 1, y así encontrar una prueba combinatoria del resultado dado por Athanasiadis. Finalmente, el etiquetamiento de las caras abre claramente la puerta para una aplicación a la teoría de caminos aleatorios en arreglos de hiperplanos, como es definida por Brown y Diaconis [5].

Bibliografía

- [1] C. A. Athanasiadis, *Algebraic Combinatorics of Graph Spectra, Subspace Arrangements and Tutte Polynomials*, Ph.D. thesis, MIT, 1996.
- [2] C. A. Athanasiadis, Characteristic Polynomials of Subspace Arrangements and Finite Fields, *Advances in Math.* **122** (1996), 193-233.
- [3] C. A. Athanasiadis y S. Linusson, A Simple Bijection for the Regions of the Shi Arrangement of Hyperplanes, *Discrete Mathematics* **204** (1999), 27-39.
- [4] A. Blass y B. Sagan, Characteristic and Ehrhart Polynomials, *J. Algebraic Combinatorics* **7** (1998), 115-126.
- [5] K. S. Brown y P. Diaconis, Random Walks and Hyperplane Arrangements, *The Annals of Probability* **26** (1998), no. 4, 1813-1854.
- [6] H. Crapo y G.-C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, preliminary edition, MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
- [7] P. Headley, On Reduced Words in Affine Weyl Groups, in *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, May 23-27, 1994*, DIMACS, pp. 225-242.
- [8] A. G. Konheim y B. Weiss, An Occupancy Discipline and Applications, *SIAM J. Applied Math.* **14** (1966), 1266-1274.
- [9] P. Orlik y H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [10] J.-Y. Shi, *The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1179, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [11] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1996
- [12] R. Stanley, Hyperplane Arrangements, Interval Orders, and Trees, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **93** (1996), 2620-2625.

- [13] R. Stanley, An Introduction to Hyperplane Arrangements, disponible en la URL <http://www-math.mit.edu/~rstan/>.
- [14] T. Zaslavsky, Facing up to Arrangements: Face-count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes, *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 1, no. 154, 1975.