Categoricidad relativa para campos finitamente generados

Thomas Scanlon

University of California, Berkeley

XV Congreso Nacional de Matemáticas
Bogotá, Colombia
12 de agosto de 2005

Categoricidad

Definición

Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathscr{L}$-estructura para un lenguaje de lógica de primer orden $\mathscr{L}$. Decimos que $\mathfrak{M}$ es λ-*categórica* ssi $|\mathfrak{M}| = \lambda$ y todas las $\mathscr{L}$-estructuras de tamaño λ con la misma teoría son isomorfas a $\mathfrak{M}$.

Categoricidad

Definición

Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathscr{L}$-estructura para un lenguaje de lógica de primer orden $\mathscr{L}$. Decimos que $\mathfrak{M}$ es λ-*categórica* ssi $|\mathfrak{M}| = \lambda$ y todas las $\mathscr{L}$-estructuras de tamaño λ con la misma teoría son isomorfas a $\mathfrak{M}$.

Teorema

Si K es un campo λ-categórico en el lenguaje de anillos, entonces K es algebraicamente cerrado o finito.

Categoricidad relativa

Definición

Sea $\mathscr{K}$ una clase de $\mathscr{L}$-estructuras. $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es *categórica en* $\mathscr{K}$ si $\mathfrak{M}$ es isomorfa a todas las estructuras en $\mathscr{K}$ con la misma teoría de $\mathfrak{M}$.

- Si $\mathscr{K}$ es la clase de $\mathscr{L}$-estructuras de cadinalidad λ, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categórica en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es λ-categórica.
- Si $\mathscr{K}$ es la clase de todas $\mathscr{L}$-estructuras, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categoría en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es finita.

Categoricidad relativa

Definición

Sea $\mathscr{K}$ una clase de $\mathscr{L}$-estructuras. $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es *categórica en* $\mathscr{K}$ si $\mathfrak{M}$ es isomorfa a todas las estructuras en $\mathscr{K}$ con la misma teoría de $\mathfrak{M}$.

- Si $\mathscr{K}$ es la clase de $\mathscr{L}$-estructuras de cadinalidad λ, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categórica en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es λ-categórica.
- Si $\mathscr{K}$ es la clase de todas $\mathscr{L}$-estructuras, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categoría en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es finita.

Categoricidad relativa

Definición

Sea $\mathscr{K}$ una clase de $\mathscr{L}$-estructuras. $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es *categórica en* $\mathscr{K}$ si $\mathfrak{M}$ es isomorfa a todas las estructuras en $\mathscr{K}$ con la misma teoría de $\mathfrak{M}$.

- Si $\mathscr{K}$ es la clase de $\mathscr{L}$-estructuras de cadinalidad λ, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categórica en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es λ-categórica.
- Si $\mathscr{K}$ es la clase de todas $\mathscr{L}$-estructuras, $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ es categoría en $\mathscr{K}$ si y solamente si $\mathfrak{M}$ es finita.

Introducción a campos finitamente generados

Definición

El campo K es *finitamente generado* si hay un conjunto finito $S \subseteq K$ para cual si $L \subseteq K$ es un subcampo de K que contiene a S, entonces $L = K$.

- Los campos primos, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{F}_p$, son finitamente generados con $S = \varnothing$.
- Si K es un campo finitamente generado y L es una extensión finita de K, entonces L es también finitamente generado. Así, todos los campos númericos son finitamente generados.
- Más generalamente, si K es finitamente generado, el campo $K(x)$ de funciones racionales sobre K es finitamente generado.

Introducción a campos finitamente generados

Definición

El campo K es *finitamente generado* si hay un conjunto finito $S \subseteq K$ para cual si $L \subseteq K$ es un subcampo de K que contiene a S, entonces $L = K$.

- Los campos primos, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{F}_p$, son finitamente generados con $S = \varnothing$.
- Si K es un campo finitamente generado y L es una extensión finita de K, entonces L es también finitamente generado. Así, todos los campos númericos son finitamente generados.
- Más generalamente, si K es finitamente generado, el campo $K(x)$ de funciones racionales sobre K es finitamente generado.

Introducción a campos finitamente generados

Definición

El campo K es *finitamente generado* si hay un conjunto finito $S \subseteq K$ para cual si $L \subseteq K$ es un subcampo de K que contiene a S, entonces $L = K$.

- Los campos primos, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{F}_p$, son finitamente generados con $S = \varnothing$.
- Si K es un campo finitamente generado y L es una extensión finita de K, entonces L es también finitamente generado. Así, todos los campos númericos son finitamente generados.
- Más generalamente, si K es finitamente generado, el campo $K(x)$ de funciones racionales sobre K es finitamente generado.

Introducción a campos finitamente generados

Definición

El campo K es *finitamente generado* si hay un conjunto finito $S \subseteq K$ para cual si $L \subseteq K$ es un subcampo de K que contiene a S, entonces $L = K$.

- Los campos primos, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{F}_p$, son finitamente generados con $S = \varnothing$.
- Si K es un campo finitamente generado y L es una extensión finita de K, entonces L es también finitamente generado. Así, todos los campos númericos son finitamente generados.
- Más generalamente, si K es finitamente generado, el campo $K(x)$ de funciones racionales sobre K es finitamente generado.

Campos de funciones

Si K es un campo finitamente generado y $k \subseteq K$ es un subcampo, entonces K es isomorfo a $k(V)$, el campo de funciones sobre una variedad V sobre k.

Campos de funciones

Si K es un campo finitamente generado y $k \subseteq K$ es un subcampo, entonces K es isomorfo a $k(V)$, el campo de funciones sobre una variedad V sobre k.

Se puede entender el estudio de campos finitamente generados como geometría birracional.

Pregunta de Pop

Pregunta (Pop "Conjetura γ")

Sean K y L dos campos finitamente generados con la misma teoría en el lenguaje de anillos. ¿Son ellos isomorfos?

Pregunta de Pop

Pregunta (Pop “Conjetura γ”)

Sean K y L dos campos finitamente generados con la misma teoría en el lenguaje de anillos. ¿Son ellos isomorfos?

Pregunta (Poonen “Conjetura β”)

¿Si K es un campo finitamente generado, hay una sentencia del lenguaje de anillos φ que es verdad en K pero falsa en todos los otros campos finitamente generados?

Pregunta de Pop

Pregunta (Pop "Conjetura γ")

Sean K y L dos campos finitamente generados con la misma teoría en el lenguaje de anillos. ¿Son ellos isomorfos?

Pregunta (Poonen "Conjetura β")

¿Si K es un campo finitamente generado, hay una sentencia del lenguaje de anillos φ que es verdad en K pero falsa en todos los otros campos finitamente generados?

Pregunta (Poonen "Conjetura α")

¿Son todas las clases "razonables" de campos finitamente generados definibles?

Observaciones facíles

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sea $\mathfrak{l} \subseteq L$ el campo de constantes (o el máximo campo finito o campo númerico en L) de L y $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de K.

- L y K tienen la mismo característica. Así, ellos tienen el mismo campo primo F.
- $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{k}$ son isomorfos

Observaciones facíles

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sea $\mathfrak{l} \subseteq L$ el campo de constantes (o el máximo campo finito o campo númerico en L) de L y $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de K.

- L y K tienen la mismo característica. Así, ellos tienen el mismo campo primo F.
- $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{k}$ son isomorfos

Observaciones facíles

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sea $\mathfrak{l} \subseteq L$ el campo de constantes (o el máximo campo finito o campo númerico en L) de L y $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de K.

- L y K tienen la mismo característica. Así, ellos tienen el mismo campo primo F.
- $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{k}$ son isomorfos.

Observaciones facíles

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sea $\mathfrak{l} \subseteq L$ el campo de constantes (o el máximo campo finito o campo númerico en L) de L y $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de K.

- L y K tienen la mismo característica. Así, ellos tienen el mismo campo primo F.
- $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{k}$ son isomorfos, porque si $\mathfrak{l} = F[\alpha] \cong F[X]/(P(X))$ para un polinomio $P(X) \in F[X]$, $K \models (\exists x)P(x) = 0$. Se sigue que $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l} \hookrightarrow \mathfrak{k}$ por la misma razón.

Geometría birracional

Proposición

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sean $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de L y de K. Si $L = \mathfrak{k}(V)$ y $K = \mathfrak{k}(W)$, entonces hay funciones racionales $V \to W$ y $W \to V$.

- Escribe L como $\mathfrak{k}(x_1, \ldots, x_n)[Y]/(P(x_1, \ldots, x_n, Y)$ donde P es un polinomio sobre $\mathfrak{k}$.
- $K \equiv L \Rightarrow K \models (\exists x_1, \ldots, x_n, y) P(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
- Si $f_1, \ldots, f_n, g$ son elementos de $K = \mathfrak{k}(W)$ con $P(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$, entonces $(f_1, \ldots, f_n, g) : W \to V$ es una función racional de W a V.

Geometría birracional

Proposición

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sean $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de L y de K. Si $L = \mathfrak{k}(V)$ y $K = \mathfrak{k}(W)$, entonces hay funciones racionales $V \to W$ y $W \to V$.

Demostación:

- Escribe L como $\mathfrak{k}(x_1, \ldots, x_n)[Y]/(P(x_1, \ldots, x_n, Y)$ donde P es un polinomio sobre $\mathfrak{k}$.
- $K \equiv L \Rightarrow K \models (\exists x_1, \ldots, x_n, y) P(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
- Si $f_1, \ldots, f_n, g$ son elementos de $K = \mathfrak{k}(W)$ con $P(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$, entonces $(f_1, \ldots, f_n, g) : W \to V$ es una función racional de W a V.

Geometría birracional

Proposición

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sean $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de L y de K. Si $L = \mathfrak{k}(V)$ y $K = \mathfrak{k}(W)$, entonces hay funciones racionales $V \to W$ y $W \to V$.

Demostación:

- Escribe L como $\mathfrak{k}(x_1, \ldots, x_n)[Y]/(P(x_1, \ldots, x_n, Y)$ donde P es un polinomio sobre $\mathfrak{k}$.
- $K \equiv L \Rightarrow K \models (\exists x_1, \ldots, x_n, y) P(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
- Si $f_1, \ldots, f_n, g$ son elementos de $K = \mathfrak{k}(W)$ con $P(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$, entonces $(f_1, \ldots, f_n, g) : W \to V$ es una función racional de W a V.

Geometría birracional

Proposición

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sean $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de L y de K. Si $L = \mathfrak{k}(V)$ y $K = \mathfrak{k}(W)$, entonces hay funciones racionales $V \to W$ y $W \to V$.

Demostación:

- Escribe L como $\mathfrak{k}(x_1, \ldots, x_n)[Y]/(P(x_1, \ldots, x_n, Y)$ donde P es un polinomio sobre $\mathfrak{k}$.
- $K \equiv L \Rightarrow K \models (\exists x_1, \ldots, x_n, y) P(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
- Si $f_1, \ldots, f_n, g$ son elementos de $K = \mathfrak{k}(W)$ con $P(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$, entonces $(f_1, \ldots, f_n, g) : W \to V$ es una función racional de W a V.

Geometría birracional

Proposición

Sean L y K dos campos finitamente generados con la misma teoría. Sean $\mathfrak{k} \subseteq K$ el campo de constantes de L y de K. Si $L = \mathfrak{k}(V)$ y $K = \mathfrak{k}(W)$, entonces hay funciones racionales $V \to W$ y $W \to V$.

Demostación:

- Escribe L como $\mathfrak{k}(x_1, \ldots, x_n)[Y]/(P(x_1, \ldots, x_n, Y)$ donde P es un polinomio sobre $\mathfrak{k}$.
- $K \equiv L \Rightarrow K \models (\exists x_1, \ldots, x_n, y) P(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
- Si $f_1, \ldots, f_n, g$ son elementos de $K = \mathfrak{k}(W)$ con $P(f_1, \ldots, f_n, g) = 0$, entonces $(f_1, \ldots, f_n, g) : W \to V$ es una función racional de W a V.

Un teorema refinado

Teorema (Pop, Poonen)

Si $K = \mathfrak{k}(V)$ *y* $L = \mathfrak{k}(W)$ *son campos finitamente generados con la misma teoría, entonces hay una función racional genericamente finita* $V \to W$.

Un teorema refinado

Teorema (Pop, Poonen)

Si $K = \mathfrak{k}(V)$ y $L = \mathfrak{k}(W)$ son campos finitamente generados con la misma teoría, entonces hay una función racional genericamente finita $V \to W$.

La clave a este teorema es la definabilidad de independencia algebraica.

Teorema (Poonen)

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ hay una fórmula $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de anillos tal que para todo campo finitamente generado K y todos los elementos $a_1, \ldots, a_n \in K$, $K \models \varphi_n(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n$ son algebraicamente independentes.

Usar la fórmula de Poonen

- El campo de constantes es uniformemente definible en la clase de campos finitamente generados usando la fórmula $\neg\varphi_1$.
- Si K es un campo finitamente generado con campo primo $F \subseteq K$ y $a_1, \ldots, a_n \in K$ son elementos de K, entonces la clausura algebraica relativo de $F(a_1, \ldots, a_n)$, $\{\alpha \in K \mid [F(a_1, \ldots, a_n; \alpha) : F(a_1, \ldots, a_n)] < \infty\}$, es definible usando la fórmula $\bigvee_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} [\neg\varphi_{|I|+1}(\alpha; (a_i)_{i \in I}) \wedge \varphi_{|I|}((a_i)_{i \in I})]$

Usar la fórmula de Poonen

- El campo de constantes es uniformemente definible en la clase de campos finitamente generados usando la fórmula $\neg\varphi_1$.
- Si K es un campo finitamente generado con campo primo $F \subseteq K$ y $a_1, \ldots, a_n \in K$ son elementos de K, entonces la clausura algebraica relativo de $F(a_1, \ldots, a_n)$, $\{\alpha \in K \mid [F(a_1, \ldots, a_n; \alpha) : F(a_1, \ldots, a_n)] < \infty\}$, es definible usando la fórmula $\bigvee_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} [\neg\varphi_{|I|+1}(\alpha; (a_i)_{i \in I}) \wedge \varphi_{|I|}((a_i)_{i \in I})]$

Definir los enteros

Teorema (Rumely)

Hay una fórmula $\vartheta(x)$ en el lenguaje de anillos tal que si K es un campo númerico, $K \models \vartheta(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \mathscr{O}_K$.

Definir los enteros

Teorema (Rumely)

Hay una fórmula $\vartheta(x)$ en el lenguaje de anillos tal que si K es un campo númerico, $K \models \vartheta(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{O}_K$.

Teorema (J. Robinson)

Sea K un campo númerico con $\mathcal{O}_K \subseteq K$ su anillo de enteros. El anillo $\mathbb{Z}$ de enteros racionales es definible en $\mathcal{O}_K$ en el lenguaje de anillos.

Definir los enteros

Teorema (Rumely)

Hay una fórmula $\vartheta(x)$ en el lenguaje de anillos tal que si K es un campo númerico, $K \models \vartheta(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \mathscr{O}_K$.

Teorema (J. Robinson)

Sea K un campo númerico con $\mathscr{O}_K \subseteq K$ su anillo de enteros. El anillo $\mathbb{Z}$ de enteros racionales es definible en $\mathscr{O}_K$ en el lenguaje de anillos.

Corolario

Si K es un campo finitamente generado de característica cero, entonces $\mathbb{Z} \subseteq K$ es definible en el lenguaje de anillos.

Interpretar un campo finitamente generado en $\mathbb{Z}$

Teorema (Lagrange)

El semianillo de números naturales $\mathbb{N}$ *es definible en* $\mathbb{Z}$ *para la fórmula* $(\exists x_1, x_2, x_3, x_4) y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Interpretrar un campo finitamente generado en $\mathbb{Z}$

Teorema (Lagrange)

El semianillo de números naturales $\mathbb{N}$ es definible en $\mathbb{Z}$ para la fórmula $(\exists x_1, x_2, x_3, x_4) y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Teorema (Gödel)

Hay una codificación de secuencias en $\mathbb{N}$.

Interpretrar un campo finitamente generado en $\mathbb{Z}$

Teorema (Lagrange)

El semianillo de números naturales $\mathbb{N}$ es definible en $\mathbb{Z}$ para la fórmula $(\exists x_1, x_2, x_3, x_4) y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Teorema (Gödel)

Hay una codificación de secuencias en $\mathbb{N}$.

Corolario

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ hay un conjunto $R \subseteq \mathbb{Z}$ definible (en el lenguaje de anillos) y funciones definibles $\oplus : R \times R \to R$ y $\otimes : R \times R \to R$ para cual $(R, \oplus, \otimes)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n], +, \times)$.

Interpretrar un campo finitamente generado en $\mathbb{Z}$

Corolario

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ hay un conjunto $R \subseteq \mathbb{Z}$ definible (en el lenguaje de anillos) y funciones definibles $\oplus : R \times R \to R$ y $\otimes : R \times R \to R$ para cual $(R, \oplus, \otimes)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n], +, \times)$.

Corolario

Todos los campos finitamente generados son (uniformamente) interpretables en $\mathbb{Z}$. Es decir, si K es un campo finitamente generado, entonces hay un conjunto definible $\widetilde{K} \subseteq \mathbb{Z}$ y funciones definibles $\oplus : \widetilde{K}^2 \to \widetilde{K}$ y $\otimes : \widetilde{K}^2 \to \widetilde{K}$ para cual $(K, +, \times)$ y $(\widetilde{K}, \oplus, \otimes)$ son isomorfos.

$\Gamma\nu o\theta\iota\ \sigma\epsilon\ \alpha\nu\tau o\nu$

Pregunta

Si K es un campo de caracteristíca cero y $(\widetilde{K}, \oplus, \otimes)$ es un campo isomorfo a K y definible en $\mathbb{Z}$, entonces $(\widetilde{K}, \oplus, \otimes)$ es definible en K. ¿Es un isomorfismo entre K y $\widetilde{K}$ definible (con parámetros) en K? (Es decir, ¿es K bi-interpretable con $\mathbb{Z}$?)

$\Gamma\nu o\theta\iota\ \sigma\epsilon\ \alpha\nu\tau o\nu$

Pregunta

Si K es un campo de caracterist́ca cero y $(\widetilde{K}, \oplus, \otimes)$ es un campo isomorfo a K y definible en $\mathbb{Z}$, entonces $(\widetilde{K}, \oplus, \otimes)$ es definible en K. ¿Es un isomorfismo entre K y $\widetilde{K}$ definible (con parámetros) en K? (Es decir, ¿es K bi-interpretable con $\mathbb{Z}$?)

Si la respueta es "Sí," entonces la teoría de K es aislada en la clase de teorías de campos finitamente generados.

La inducción

- Queremos probar para inducción en el grado de trascendencia que cada campo finitamente generado (de característica cero) K es bi-interpretible con $\mathbb{Z}$.

La inducción

- Queremos probar para inducción en el grado de trascendencia que cada campo finitamente generado (de característica cero) K es bi-interpretible con $\mathbb{Z}$.
- Para K un campo númerico, escribe $\mathcal{O}_K = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha^i$ y K como el campo de fracciones de $\mathcal{O}_K$.

La inducción

- Queremos probar para inducción en el grado de trascendencia que cada campo finitamente generado (de característica cero) K es bi-interpretible con $\mathbb{Z}$.
- Para K un campo númerico, escribe $\mathscr{O}_K = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha^i$ y K como el campo de fracciones de $\mathscr{O}_K$.
- Para K de grado de trascendencia $m+1$, sean $a_1, \ldots, a_m \in K$ elementos algebraicamente independientes y $\mathfrak{k}$ la clausura algebraica relativa de $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_m)$ en K. Así, $K \cong \mathfrak{k}(C)$ para una curva proyectiva y suave C.

La inducción

- Para K un campo númerico, escribe $\mathscr{O}_K = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha^i$ y K como el campo de fracciones de $\mathscr{O}_K$.
- Para K de grado de trascendencia $m+1$, sean $a_1, \ldots, a_m \in K$ elementos algebraicamente independentes y $\mathfrak{k}$ la clausura algebraica relativa de $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_m)$ en K. Así, $K \cong \mathfrak{k}(C)$ para una curva proyectiva y suave C.
- Por hipótesis de inducción, $\mathfrak{k}$ es bi-interpretable con $\mathbb{Z}$. Se sigue que el campo $\widetilde{K} = \widetilde{\mathfrak{k}(C)}$ es interpretable en $\mathfrak{k}$ y la funciones de evaluación $\widetilde{\text{ev}} : \widetilde{K} \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$ son definibles para todas las extensiones finitas $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{k}$.

La inducción

Categoricidad relativa para campos finitamente generados
Thomas Scanlon
Categoricidad relativa
Campos finitamente generados
Preguntas

- Para K de grado de trascendencia $m+1$, sean $a_1, \ldots, a_m \in K$ elementos algebraicamente independientes y $\mathfrak{k}$ la clausura algebraica relativa de $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_m)$ en K. Así, $K \cong \mathfrak{k}(C)$ para una curva proyectiva y suave C.
- Por hipótesis de inducción, $\mathfrak{k}$ es bi-interpretable con $\mathbb{Z}$. Se sigue que el campo $\widetilde{K} = \widetilde{\mathfrak{k}(C)}$ es interpretable en $\mathfrak{k}$ y la funciones de evaluación $\widetilde{\mathrm{ev}} : \widetilde{K} \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$ son definibles para todas las extensiones finitas $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{k}$.
- Si se puede definir uniformamente las funciones de evaluación $\mathrm{ev} : K \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$, entonces hay un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que un isomorfismo entre K y $\widetilde{K}$ es definible para $\psi(f) = g \Leftrightarrow (\forall [\mathfrak{l} : \mathfrak{k}] \leq m)(\forall x \in C(\mathfrak{l}))\, \mathrm{ev}(f, x) = \widetilde{\mathrm{ev}}(g, x)$

La inducción

- Por hipótesis de inducción, $\mathfrak{k}$ es bi-interpretable con $\mathbb{Z}$. Se sigue que el campo $\widetilde{K} = \mathfrak{k}(C)$ es interpretable en $\mathfrak{k}$ y la funciones de evaluación $\widetilde{\mathrm{ev}} : \widetilde{K} \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$ son definibles para todas las extensiones finitas $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{k}$.
- Si se puede definir uniformamente las funciones de evaluación $\mathrm{ev} : K \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$, entonces hay un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que un isomorfismo entre K y $\widetilde{K}$ es definible para $\psi(f) = g \Leftrightarrow (\forall [\mathfrak{l} : \mathfrak{k}] \leq m)(\forall x \in C(\mathfrak{l}))\, \mathrm{ev}(f, x) = \widetilde{\mathrm{ev}}(g, x)$
- Cuando k es un campo númerico y $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ es de trascendencia pura sobre k, estas funciones de evaluación son definibles. Así, K es bi-interpretable con $\mathbb{Z}$.

La inducción

- Si se puede definir uniformamente las funciones de evaluación $\mathrm{ev} : K \times C_{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{l}$, entonces hay un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que un isomorfismo entre K y $\widetilde{K}$ es definible para $\psi(f) = g \Leftrightarrow (\forall [\mathfrak{l} : \mathfrak{k}] \leq m)(\forall x \in C(\mathfrak{l}))\, \mathrm{ev}(f, x) = \widetilde{\mathrm{ev}}(g, x)$
- Cuando k es un campo númerico y $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ es de trascendencia pura sobre k, estas funciones de evaluación son definibles. Así, K es bi-interpretable con $\mathbb{Z}$.
- Más generalamente, si un principio local-global razonable para formas cuadráticas sobre campos de funciones de curvas sobre campos p-adicos es verdad, entonces todos los campos finitamente generados de característica cero son bi-interpretables con $\mathbb{Z}$.

Preguntas

Pregunta

Sean C una curva proyectiva y suave sobre $\mathbb{Q}_p$ y $P \in C(\mathbb{Q}_p)$ un punto $\mathbb{Q}_p$-racional. Sea $K := \mathbb{Q}_p(C)$ y $q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ una forma de Pfister sobre K. ¿Si el segundo residuo $\partial_x^2(q)$ es trivial en el grupo de Witt de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ para todos los puntos $x \in C(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}) \smallsetminus \{P\}$, es q trivial en $W(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}(C))$?

Preguntas

Pregunta

Sean C una curva proyectiva y suave sobre $\mathbb{Q}_p$ y $P \in C(\mathbb{Q}_p)$ un punto $\mathbb{Q}_p$-racional. Sea $K := \mathbb{Q}_p(C)$ y $q = \langle\langle a, b \rangle\rangle$ una forma de Pfister sobre K. ¿Si el segundo residuo $\partial_x^2(q)$ es trivial en el grupo de Witt de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ para todos los puntos $x \in C(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}) \setminus \{P\}$, es q trivial en $W(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}(C))$?

Pregunta

¿Qué pasa cuando K tiene característica positiva?

Preguntas

Pregunta

Sean C una curva proyectiva y suave sobre $\mathbb{Q}_p$ y $P \in C(\mathbb{Q}_p)$ un punto $\mathbb{Q}_p$-racional. Sea $K := \mathbb{Q}_p(C)$ y $q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ una forma de Pfister sobre K. ¿Si el segundo residuo $\partial_x^2(q)$ es trivial en el grupo de Witt de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ para todos los puntos $x \in C(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}) \smallsetminus \{P\}$, es q trivial en $W(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}(C))$?

Pregunta

¿Qué pasa cuando K tiene característica positiva?

Por un teorema de Rumely, $\mathbb{Z}$ es interpretable in K. Necesitamos una versión del principio local-global razonable en característica positiva.

Categoricidad relativa para campos finitamente generados

Thomas Scanlon

Categoricidad relativa

Campos finitamente generados

Preguntas

Preguntas

Pregunta

Sean C una curva proyectiva y suave sobre $\mathbb{Q}_p$ y $P \in C(\mathbb{Q}_p)$ un punto $\mathbb{Q}_p$-racional. Sea $K := \mathbb{Q}_p(C)$ y $q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ una forma de Pfister sobre K. ¿Si el segundo residuo $\partial_x^2(q)$ es trivial en el grupo de Witt de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ para todos los puntos $x \in C(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}) \smallsetminus \{P\}$, es q trivial en $W(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}(C))$?

Pregunta

¿Qué pasa cuando K tiene característica positiva?

Pregunta (Poonen "Conjetura α")

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto de códigos de Gödel para los campos infinitos finitamente generados. ¿Si $T \subseteq S$ es definible en $\mathbb{N}$, hay una fórmula φ tal que $T = \{[K] \mid K \models \varphi\}$?