АКАДЕМИЯ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

МАТЕРИАЛЫ

всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы

/ Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г. /

Ереван
1974

А.И.ШНИРЕЛЬМАН

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

I. Пусть M – гладкое компактное многообразие, L – эллиптический дифференциальный оператор на M ; если M имеет границу, то пусть там заданы, например, нулевые условия Дирихле. Как устроены собственные функции оператора L ?

Ограничимся случаем, когда $L = \Delta$ – оператор Лапласа некоторой римановой метрики на M. При $\dim M = n = 1$ оператор Лапласа только один, и его собственные функции (с точностью до замены координаты) имеют вид $e^{\pm i\lambda x}$.

Естественным обобщением этого на многомерный случай является "квазианалитическая" асимптотика, когда высокочастотную собственную функцию с собственным значением $-\lambda^2$ ищут (локально) в виде $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) e^{i\lambda f_j(x)}$ ([I] , стр. 69).

Амплитуду $g_j(x)$ и фазу $f_j(x)$ ищут как асимптотические ряды:

$$g_j(x) \sim g_j^{(0)}(x) + g_j^{(1)}(x)/\lambda + \cdots \quad ;$$
$$f_j(x) \sim f_j^{(0)}(x) + f_j^{(1)}(x)/\lambda + \cdots \quad (\lambda \to \infty). \qquad (I)$$

При подстановке этих асимптотических рядов в уравнение $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ для функций $f_j^{(k)}$ и $g_j^{(k)}$ получается цепочка уравнений, начинающаяся с уравнения для $f_j^{(0)}(x)$, имеющего вид

$$|\operatorname{grad} f_j^{(0)}(x)| \equiv 1 \quad . \qquad (2)$$

При глобальном рассмотрении этого уравнения следует иметь в виду, что $\lambda f_j^{(0)}(x)$ имеет смысл фазы, поэтому при обходе по каждому циклу эта величина может приобретать приращение, кратное 2π. Кроме того, число листов (m) функции $f^{(0)}(x)$ разное в разных точках M и на некоторых $(n-1)$-мерных подмногообразиях отдельные листы склеиваются друг с другом (эти подмногообразия - каустики - являются огибающими характеристик уравнения (2)). В частности, в некоторых областях M функция $f^{(0)}$ вообще не определена (области тени).

На каустиках, при переходе с одного листа на другой, фаза претерпевает определенный скачок, кратный $\frac{\pi}{2}$ (индекс Арнольда-Маслова [2]). Если M имеет границу, то там также происходит попарная склейка листов, причем при переходе с одного листа на другой имеется скачок фазы, зависящий от типа граничных условий.

Глобальное решение уравнения (2) с описанными неоднозначностями, как правило, отсутствует. Это заведомо так в случае риманова компактного многообразия отрицательной кривизны. Более наглядные примеры - это обычный оператор Лапласа в области с вогнутой границей (например, внутренность гипоциклоиды, или квадрат с выброшенным кругом). В этих случаях собственные функции, несомненно существующие при сколь угодно больших частотах, заведомо не имеют "квазиклассического" вида. <u>Как же они выглядят</u> ?

2. Поставленный вопрос по существу не сформулирован, так как не сказано, что мы в сущности хотим узнать о собственной функции. Например, его можно понять буквально. Пусть многообразие M очень велико (вся Вселенная). Пусть там возбуждено собственное колебание, длина волны которого имеет тот же порядок, что у видимого света. Тогда наш глаз, помещенный в какую-то точку M , увидит что-то на "небесной сфере".

То, что он там увидит, и есть в какой-то степени ответ на вопрос "Как выглядит" собственная функция.

В "квазиклассическом" случае мы увидим на небесной сфере несколько отдельных "звезд". Если двигаться по многообразию, что видимое взаимное расположение этих "звезд" и их яркость будут меняться. В частности, при пересечении каустики мы увидим, что две "звезды" сливаются в одну (при этом на порядок увеличивается яркость), а потом исчезают (или те же события, но в обратном порядке).

Если M имеет отрицательную кривизну, то мы увидим нечто противоположное. Как правило, мы увидим всю небесную сферу <u>равномерно светящейся</u>, причем интенсивность этого свечения не зависит от нашего положения и от направления. В этом состоит результат, точной формулировке которого и наброску доказательства посвящена остальная часть доклада.

3. Пусть Δ - оператор Лапласа на M, $\Lambda=\sqrt{-\Delta}$. Пространства Соболева $H_s(M)$ можно определить так:

$$H_s=(\Lambda+1)^{-s}L_2,\ \|u\|_s=\|(\Lambda+1)^s u\|_{L_2}=\|(\Lambda+1)^s u\|_0 \qquad (3)$$

В частности, если $u=u_k$ - собственная функция оператора Δ с собственным значением $-\lambda_k^2$, то $\|u_k\|_s=(\lambda_k+1)^s$, так как везде в дальнейшем считается, что собственные функции нормированы: $\|u_k\|_0=1$.

Обозначим через T^*M многообразие ковекторов на M, T_x^*M - кокасательное пространство в точке $x\in M$, S^*M - многообразие единичных ковекторов, S_x^*M - единичную сферу в T_x^*M.

Пусть $A(x,\xi)$ $(x\in M,\ \xi\in T_x^*M)$ - символ псевдодифференциального оператора (п.д.о.) нулевого порядка, т.е. функция, однородная по ξ нулевого порядка и гладкая при $\xi\neq 0$.

Пусть $\hat{A}$ - п.д.о., имеющий символ $A(x,\xi)$ [3]. Объектом нашего изучения будет асимптотическое поведение функционала

$(\hat{A}u_\kappa, u_\kappa)$. (Скалярное произведение в $L_2(M)$) при $\kappa \to \infty$.

Заметим, что оно зависит только от символа $A(x,\xi)$. В самом деле, если $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ – два п.д.о. с символом $A(x,\xi)$, то $\|(\hat{A}_1-\hat{A}_2)u\|_0 \leq C\|u\|_{-1}$; в частности, $\|(\hat{A}_1-\hat{A}_2)u_\kappa\|_0 \leq$ $\leq C\lambda_\kappa^{-1}$.

Поэтому можно фиксировать способ построения п.д.о. $\hat{A}$ по его символу $A(x,\xi)$ (т.е. выбрать локальные координаты на M, разбиение единицы и т.д.); связь между п.д.о. $\hat{A}$ и его символом $A(x,\xi)$ будет взаимно однозначной и линейной.

Далее, символ $A(x,\xi)$ определяется (в силу однородности) своим сужением $A(x,\omega)$ на S^*M $(x\in M, \omega\in S_x^*M)$. Обозначим через $\langle A\rangle$ среднее значение $A(x,\omega)$ на S^*M :

$$\langle A\rangle = \frac{1}{V(M)\Omega_n}\int\limits_{S^*M} A(x,\omega)\,dx\,d\omega \quad ;$$

здесь $V(M)$ – объем M, Ω_n – площадь единичной сферы в n-мерном евклидовом пространстве.

Будем считать, что все собственные значения Δ простые. Тогда на множестве $\mathbb{Z}_+$ натуральных чисел можно ввести вероятностную меру $P_s(\kappa)$, зависящую от параметра $s>0$, следующим образом:

$$P_s(\kappa) = e^{-\lambda_\kappa^2 s} \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^2 s} \qquad (4)$$

Подпоследовательность $\{u_{\kappa_j}\}$ последовательности $\{u_\kappa\}$ назовем подпоследовательностью плотности 1, если

$$\lim_{s\to 0} \sum_{j=1}^{\infty} P_s(\kappa_j) = 1 \qquad (5)$$

это определение плотности подпоследовательности несколько шире обычного.

Теперь можно сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть B -ограниченное множество в $C^\infty(S^*M)$. Тогда в последовательности $\{u_k\}$ найдется подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$ плотности 1, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\hat{A}u_{k_j}, u_{k_j}) = \langle A\rangle$ для всякого $A(x,\omega)\in B$ ($\hat{A}$ -п.д.о., построенный по символу $A(x,\omega)$).

Эквивалентная формулировка:
пусть $\mathcal{F}_s(A;t) = \rho_s\{k \mid (\hat{A}u_k, u_k) < t\}$ - функция распределения "случайной величины" $(\hat{A}u_k, u_k)$ относительно меры ρ_s. Тогда

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{F}_s(A;\omega) = \begin{cases} 0, & t<\langle A\rangle \\ 1, & t>\langle A\rangle \end{cases} \qquad (6)$$

Связь этой теоремы с наглядным образом, описанным в начале, будет указана ниже.

4. Доказательство теоремы состоит из четырех этапов. Большая часть рассуждений годится для любого многообразия; только в одном месте используется отрицательность кривизны.

В дальнейшем точку $(x,\omega)\in S^*M$ мы будем для краткости обозначать одной буквой z.

ЛЕММА I. На S^*M существует последовательность мер $\mu_k(dz)$ положительных и нормированных на 1, таких, что

$$\lim_{k\to\infty}\Big[(\hat{A}u_k, u_k) - \int_{S^*M} A(z)\mu_k(dz)\Big], \qquad (7)$$

равномерно, когда $A(z)$ пробегает любое ограниченное множество $B\subset C^\infty(S^*M)$.

Для доказательства рассмотрим выражение $(\hat{A}u_k, u_k)$ при фиксированном k. Оно линейно по $A(z)$, и его можно рассматривать как значение на $A(z)$ некоторой обобщенной функции $U_k(z)$:

$$(\hat{A}u_\kappa, u_\kappa) = \langle U_\kappa(z), A(z) \rangle \tag{8}$$

(угловые скобки указывают на то, что скалярное произведение берется на S^*M, и не на M). Фактически при каждом конечном K функция $U(z)$ будет гладкой, но это для нас несущественно.

Пусть $A(z)$ – действительная функция. Тогда, согласно неравенству Гординга [4] ,

$$\operatorname{Re}(\hat{A}u_\kappa, u_\kappa) \geq \inf_z A(z) \|u_\kappa\|_0^2 - c\|u_\kappa\|^2_{-\frac{1}{2}} ,$$

$$|\operatorname{Im}(\hat{A}u_\kappa, u_\kappa)| \leq c\|u_\kappa\|^2_{-\frac{1}{2}} . \tag{9}$$

Кроме того, по построению,

$$(\hat{I}u_\kappa, u_\kappa) = 1$$

($\hat{I}$ – тождественный оператор, с символом $I(z) \equiv 1$). Константа c ограничена, когда $A(z) \in B$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\langle U_\kappa(z), A(z) \rangle \geq \inf_z A(z) - c\lambda_\kappa^{-1} ,$$

$$|\operatorname{Im}\langle U_\kappa(z), A(z) \rangle \leq c\lambda_\kappa^{-1} , \tag{9^I}$$

$$\langle U_\kappa(z), 1 \rangle = 1 .$$

Если бы в правых частях не стоял член $c\lambda_\kappa^{-1}$, то отсюда бы следовало, что $U_\kappa(z)$ – настоящая мера, положительная и нормированная.

Но при большом K неприятный член становится малым, и обобщенную функцию $U_\kappa(z)$ можно исправить и превратить в меру $\mu_\kappa(dz)$, мало меняя ее значение на функциях $A(z) \in B$.

4. Нетрудно понять смысл меры $\mu_k(dz)$. Рассмотрим решение волнового уравнения, имеющее вид $u_k(x)\,e^{i\lambda_k t}$, где λ_k очень велико. Тогда $\mu_k(dz)=\mu_k(dx\wedge d\omega)$ - это, с точностью до множителя, <u>поток энергии</u>, протекающий через элемент объема dx многообразия M внутри телесного угла $d\omega$. Такое толкование позволяет понять важное свойство меры $\mu_k(dz)$ - инвариантность относительно геодезического потока.

Геодезический поток - однопараметрическая группа G_t преобразований многообразия S^*M, сохраняющих объем dz. Если $z=(x,\omega)\in S^*M$, то $G_t(z)$ строится так: через точку $x\in M$ в направлении, двойственном $\omega\in S^*_x M$, проводится геодезическая длины t. Если x' - ее конец, $\omega'\in S^*_{x'}M$ - единичный ковектор, двойственный единичному касательному вектору геодезической в точке x', то положим $z'=(x',\omega')=G_t(z)$.

<u>ЛЕММА 2</u>. <u>Пусть</u> B - <u>ограниченное множество в</u> $C^\infty(S^*M)$, $T>0$, $\varepsilon>0$. <u>Найдется такое</u> K_0, <u>что при всех</u> $K>K_0$, $A(z)\in B$, $|t|<T$,

$$\left|\int A(G_t^{-1}(z))\,\mu_k(dz)-\int A(z)\,\mu_k(dz)\right|<\varepsilon\quad. \tag{10}$$

Известно, что для всякого "высокочастотного" решения $u(x,t)$ волнового уравнения энергия перемещается вдоль геодезических с единичной скоростью. Если $u(x,t)=u_k(x)e^{i\lambda_k t}$, то поток энергии к тому же стационарен.

Следовательно, мера $\mu_k(dz)$ инвариантна относительно геодезического потока с той точностью, с какой вообще можно говорить о потоке энергии (т.е.тем точнее, чем выше частота λ_k) Разумеется, это рассуждение не заменяет строгого доказательства.

5. Следующая лемма показывает, что меры $\mu_\kappa(dz)$ "в среднем" лебеговы.

<u>ЛЕММА 3.</u> <u>Пусть</u> B <u>-ограниченное множество в</u> $C^\infty(S^*M)$. <u>Тогда</u> $\lim\limits_{S\to 0}\sum\limits_\kappa P_s(\kappa)\int\limits_{S^*M} A(z)\mu_\kappa(dz)=\langle A\rangle$ <u>равномерно при</u> $A\in B$.

Идея доказательства - обычная для спектральной теории. Пусть $G(x,x';S)$ - решение задачи

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial S}G(x,x';S)=\Delta_{x'}G(x,x';S)\\ G(x,x';S)\big|_{S=0}=\delta(x-x')\end{cases}; \tag{I1}$$

$$G(x,x',S)=\sum_\kappa u_\kappa(x)\,u_\kappa(x')\,e^{-\lambda_\kappa^2 S}. \tag{I2}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_\kappa P_s(\kappa)\int\limits_{S^*M}A(z)\mu_\kappa(dz)\sim\sum_\kappa P_s(\kappa)(\hat{A}u_\kappa,u_\kappa)\sim \tag{I3}$$

$$\sim\frac{1}{V(M)}(2\pi S)^{\frac{n}{2}}\int\limits_M \hat{A}_{x'}\,G(x,x',S)\big|_{x=x'}dx\qquad (S\to 0).$$

Поведение функции $G(x,x',S)$ при $S\to 0$ таково: при $x'\neq x$ она экспоненциально мала, а при x', близких к x, $G(x,x',S)\sim\sim(2\pi S)^{-n/2}e^{-|x'-x|^2/2S}$.

Эта функция имеет острый пик при $x'=x$, когда $S\to 0$. Поэтому можно асимптотически вычислить результат применения к ней п.д.о. $\hat{A}$. Получается

$$\hat{A}_{x'}\,G(x,x',S)\big|_{x'=x}\sim(2\pi S)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Omega_n}\int\limits_{S^*M}A(x,\omega)\,dx\quad (S\to 0). \tag{I4}$$

Отсюда

$$\sum_{K} P_s(K)\int_{S^*M} A(z)\mu_K(dz) \sim \frac{1}{V(M)\Omega_n}\int_M dx \int_{S^*M} A(x,\omega)d\omega = \langle A\rangle, \qquad (15)$$

что и требовалось.

6. Теперь у нас есть все для доказательства теоремы. Именно

а) Многообразие S^*M и гладкий поток G_t на нем, сохраняющий лебеговую меру dz ;

б) Последовательность мер $\mu_K(dz)$, про которые известно, что они "почти инвариантны" относительно G_t (лемма 2) и в "среднем" лебеговы (лемма 3).

Докажем, что <u>для всякой функции</u> $A(z)\in C$ <u>и всякого</u> $\varepsilon>0$ <u>найдется подпоследовательность</u> $\{K_j\}$ <u>плотности</u> 1 , <u>такая, что</u>

$$\left|\int_{S^*M} A(z)\mu_{K_j}(dz) - \langle A\rangle\right| < \varepsilon \quad . \qquad (16)$$

Отсюда, очевидно, следует теорема.

Будем для простоты считать, что меры μ_K в точности инвариантны относительно G_t .

<u>Доказательство теоремы.</u> Согласно теореме Биркгофа, на S^*M найдется множество $\mathfrak{M}$ полной меры, такое что для всякого $z\in\mathfrak{M}$ существует $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(G_t(z))\,dt$ - временное среднее функции $A(z)$, являющееся измеримой функцией от z . Поскольку многообразие M имеет отрицательную кривизну, поток G_t эргодичен (вот то единственное место, где используется отрицательность кривизны).

Следовательно, почти всюду на $\mathfrak{M}$ временное среднее совпадает с $\langle A\rangle$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_1(\tau,\varepsilon)=\left\{z \,\Big|\, \left|\frac{1}{T}\int_0^T A(G_t(z))\,dt-\langle A\rangle\right|<\varepsilon \quad \forall T\le\tau\right\}.$$

Легко видеть, что $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$ $\exists\tau>0$,

$$mes\,(S^*M\setminus \mathfrak{M}_1(\tau,\varepsilon))<\delta,$$

где mes обозначает лебегову меру.

Поток G_t __гладкий__. Поэтому найдется открытая окрестность $\widetilde{\mathfrak{M}}$ множества $\mathfrak{M}_1(\tau,\varepsilon)$, имеющая гладкую границу и такая, что $\forall z\in\widetilde{\mathfrak{M}}$, $\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau A(G_t(z))\,dt-\langle A\rangle\right|<2\varepsilon$. Пусть $\chi(z)$ – характеристическая функция $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

В этом месте уместно воспользоваться вероятностным языком. Всякую последовательность $\{\alpha_k\}$ можно рассматривать как случайную величину относительно меры $P_s(k)$; тогда $\sum_k P_s(k)\alpha_k=M_s(\alpha)$ будет ее математическим ожиданием.

Как было доказано, меры μ_k "в среднем" лебеговы. Это, в частности, значит, что

$$\lim_{s\to 0} M_s\left(\int_{S^*M}(1-\chi(z))\,\mu_k(dz)\right)<\delta,$$

так что при достаточно малых s

$$M_s\left(\int_{S^*M}(1-\chi(z))\,\mu_k(dz)\right)<\delta.$$

Случайная величина, стоящая в скобках, неотрицательна. Поэтому, согласно неравенству Чебышева,

$$P_s\left\{k \,\Big|\, \int_{S^*M}(1-\chi(z))\,\mu_k(dz)<\sqrt{\delta}\right\}>1-\sqrt{\delta}. \tag{17}$$

Пусть мера μ_K удовлетворяет условию $\int\limits_{S^*M}(1-\chi(z))\mu_K(dz)<\sqrt{\delta}$. Тогда

$$\left|\int A(z)\mu_K(dz)-\langle A\rangle\right|=$$

$$=\left|\int(1-\chi(z))A(z)\mu_K(dz)-\int(1-\chi(z))\langle A\rangle\mu_K(dz)+\right.$$

$$\left.+\int\chi(z)A(z)\mu_K(dz)-\int\chi(z)\langle A\rangle\mu_K(dz)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\delta}\left(\max|A(z)|+\langle A\rangle\right)+$$

$$+\int\chi(z)\mu_K(dz)\cdot\left|\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau A(G_t(z))\,dt-\langle A\rangle\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\delta}\max|A(z)|+2\varepsilon$$

Таким образом, доказано, что $\forall\varepsilon>0,\ \forall\delta>0\ \exists\ s_0>0,\ \forall s<s_0$

$$P_s\left\{K\ \Big|\ \left|\int A(z)\mu_K(dz)-\langle A\rangle\right|<\varepsilon\right\}>1-\delta$$

Следовательно, $\lim\limits_{s\to 0}P_s\{\ldots\}=1$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.М.Бабич, В.С.Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., "Наука", I972.

2. В.И.Арнольд. О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функц.анализ, I, № I (I967), I-I4.

3. "Псевдодифференциальные операторы", сборник статей, М., "Мир", 1967.

4. П.Д.Лэкс, Л.Ниренберг. Об устойчивости разностных схем: точная форма неравенства Гординга, "Математика", II:6, 1967, 3-20.