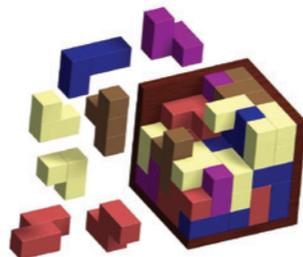


Rompecabezas matemáticos



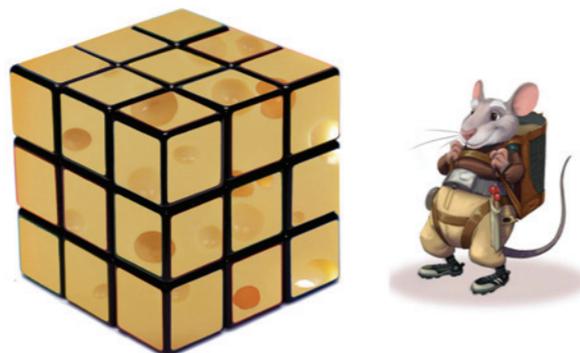
Por Antonio Montalbán*

En el número anterior se planteó un problema de esos que se van pasando de boca a boca entre los aficionados a rompecabezas y acertijos matemáticos. En este número se plantea uno nuevo y, a continuación, como se prometió, la solución explicada del problema de los ojos azules.

Problema: El queso y el ratón

Un ratón se encuentra con un cubo de queso que es cortado en 3 por 3 por 3. O sea, es cortado en 27 cubitos de queso, como un cubo Rubik. Este ratón, que es muy exquisito en su proceder, quiere comer el cubo entero de queso de una forma particular tal como se indica:

- (1) sólo puede comer un cubito a la vez;
 - (2) cuando termina con un cubito pasa a comer un cubito adyacente, o sea un cubito que esté justo al lado del que recién comió; y
 - (3) tiene que terminar comiendo el cubito del centro (porque es el más rico y lo quiere dejar para el final).
- ¿Puede el ratón comer el queso entero de esta manera? Si sí, explique cómo. Si no, explique por qué.



Problema: Ojos celestes

Planteo

En el medio del océano hay una pequeña isla donde habitan cien personas, todas profesan una extraña religión. Una de las reglas que las personas de esa religión tienen que obedecer es la siguiente: Si en algún momento alguien descubre que tiene ojos celestes, esa misma noche debe ir y saltar dentro del volcán en el centro de la isla ya que significa que es un enviado del demonio. En esta isla no hay espejos, y nadie habla sobre el color de los ojos de los otros, por lo que las personas que tienen ojos celestes pueden llegar a vivir toda su vida sin saberlo. Como todos se reúnen en la playa todos los mediodías, sí saben el color de ojos de los otros. Resulta que en esta isla, las 100 personas, todas, tienen ojos celestes. Pero nadie sabe su propio color de ojos, por lo que la vida en la isla transcurre tranquilamente. Ninguno se consideraba enviado por el demonio, por lo que no se sentía obligado a tirarse en el volcán. Esto hasta que un mediodía, cuando estaban todos reunidos, llega un extranjero que les dice públicamente: "Al menos uno de ustedes tiene ojos celestes."

Pregunta

¿Qué pasa en la isla a partir de ese día? Uno pensaría que el extranjero no les dijo nada que no supieran de antes. Pero sorprendentemente, la acción del extranjero sí tiene un efecto sobre los habitantes de la isla. Algo que hay que tener en cuenta para imaginar el efecto sobre los habitantes de la isla, es que todos son buenos matemáticos y muy lógicos en su forma de pensar. También son respetuosos de su religión por lo que sí, a través de su razonamiento, descubren que su propio color de ojos es celeste, van a ir a saltar adentro del volcán.

Segunda pregunta

Suponga ahora que esa noche el extranjero se pone a pensar y se da cuenta del lío que armó y que tiene que solucionarlo. Al mediodía siguiente decide volver a la isla y decirles a todos que no lo tomen en serio, que lo que había dicho el día anterior era mentira, que había tomado unos tragos de más y que no sabía lo que decía. ¿Qué pasa en la isla a partir de este momento?

Solución:

Lo que hace este problema interesante es que, en un comienzo, parecería que la intervención del extranjero no les da ninguna información que no tenían. Esto no es así. La diferencia es que ahora todos saben que es conocimiento común que hay al menos una persona con ojos celestes.

Empecemos analizando el caso en el que hay solamente dos personas con ojos celestes y 98 con ojos marrones. En este caso todos ya sabían que hay al menos una persona con ojos celestes. Esto incluye a las dos personas con ojos celestes que se ven entre sí.

Supongamos que yo soy una de las dos personas con ojos celestes; ¿Cuál sería mi razonamiento? En principio, yo veo a la otra persona con ojos celestes, por lo tanto lo que dijo el extranjero no es nada nuevo para mí, y por el momento no tengo la necesidad de tomar ninguna acción. Llamémosle C (de Carlos) a la otra persona con ojos celestes para poder referirnos a ella. Lo que yo sé ahora, y que antes no sabía, es que C sabe que hay al menos una persona con ojos celestes.

Al día siguiente voy a saber si C saltó al volcán o no, ya que todos nos juntamos al mediodía. Esto me va a dar nueva información. Si él fuera la única persona con ojos celestes habría visto que los demás todos tienen ojos marrones, por lo que él habría sabido que el extranjero se refería a él cuando dijo que alguien tenía ojos celestes. Eso significa que, en este caso, C habría saltado al volcán la primera noche.

Por otro lado, si yo tuviera ojos celestes, C me habría visto a mí, y no habría asumido que el extranjero se refería a él, por lo que no tenía porque tirarse al volcán la primera noche. Esto implica que, el segundo día, cuando yo vea que C no saltó al volcán, voy a saber que es porque C me ve a mí con ojos celestes. O sea que en ese momento yo sé, sin lugar a dudas, que tengo ojos celestes. Respetando a mi religión, debo ir y saltar al volcán la segunda noche. Como C haría el mismo razonamiento que yo, él también saltaría al volcán la segunda noche. Resumiendo: en el caso en que hay 2 personas con ojos celestes, ambos saltan al volcán en la segunda noche.

Tres personas con ojos celestes

Analícemos ahora el caso en que hay 3 personas con ojos celestes y 97 con ojos marrones. Supongamos, de vuelta, que yo soy una de las personas con ojos celestes. Si yo tuviera ojos marrones, pensaría que estamos en el caso anterior, en el que hay solamente dos personas con ojos celestes. Por lo tanto, esperararía que en la segunda noche ambos salten al volcán. Al tercer día, cuando vea que esto no ocurrió, voy a saber que no estábamos en el caso anterior y que somos 3 las personas con ojos celestes. O sea que yo también tengo los ojos celestes y debo saltar al volcán esa misma noche. El mismo razonamiento lo harían las otras dos personas con ojos celestes, por lo que los 3 saltaríamos al volcán la tercera noche.

Cien personas con ojos celestes

Ahora podemos continuar con este proceso analizando los casos con 4 personas con ojos celestes, con 5 personas, con 6, etc., hasta llegar al caso en el que hay 100 personas con ojos celestes. En este último caso, las 100 personas con ojos celestes saltan al volcán en la noche número 100.

Inducción completa

Si quisiéramos ser más rigurosos matemáticamente, deberíamos analizar todos estos casos uno por uno, o hacer una demostración por inducción.

Por ejemplo, queremos demostrar lo siguiente:

(*) Si hay n personas con ojos celestes y $100-n$ personas con ojos marrones, entonces las n personas con ojos celestes saltan al volcán en la n -ésima noche.

Ya hemos demostrado que esto es así en los casos $n=2$ y $n=3$. La idea de una demostración por inducción es que para demostrar el caso n , suponemos que anteriormente ya hemos demostrado el caso $n-1$. Como ya hemos demostrado el caso $n=3$, esto nos demostraría el caso $n=4$, y luego el caso $n=5$, y así consecutivamente.

Aquí está la prueba:

Queremos demostrar la proposición (*) es decir el caso n para un valor cualquiera de n (puede ser 28, 32, o 100 o cualquier otro), y asumimos demostrado el caso $n-1$ (en este ejemplo sería 27, 31 o 99 etc.).

En el caso n hay n personas con ojos celestes. Supongamos que yo soy uno de ellos. Bueno, si yo tuviera ojos marrones, pensaría que estamos en el caso en que hay $n-1$ personas con ojos celestes, que son las que veo. Como estamos asumiendo que ya demostramos la proposición (*) para el caso de $n-1$ yo esperararía que todos los que tienen ojos celestes salten al volcán en la $(n-1)$ -ésima noche. Como no lo hacen, al día siguiente, día n , yo sabré que yo también tengo ojos celestes, por lo que debo saltar al volcán esa misma noche, la n -ésima noche. Este sería el mismo razonamiento que tendrían las otras $n-1$ personas con ojos celestes, por lo tanto los n saltaríamos todos al volcán esa misma noche.

Solución segunda pregunta

En el caso en que el extranjero vuelve al día siguiente a retirar lo que dijo ocurre lo mismo: las 100 personas saltan al volcán en la noche número 100. Dejamos al lector que trate de explicar por qué esto es así.

* Antonio Montalbán es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de la República y PhD de la Universidad de Cornell (Estados Unidos). Actualmente trabaja como investigador y docente en la Universidad de Chicago (Estados Unidos).

