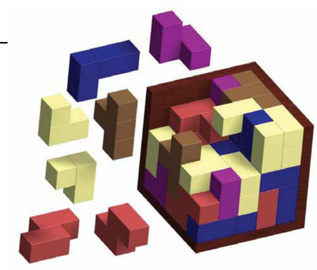
Rompecabezas matemáticos



*Por Antonio Montalbán**

Continuando con la serie de problemas que se proponen en estas páginas, se plantea uno nuevo y se da la solución explicada al problema de la mesa redonda y las monedas planteado en el número anterior.

Nuevo problema: Sombrero rojo o azul

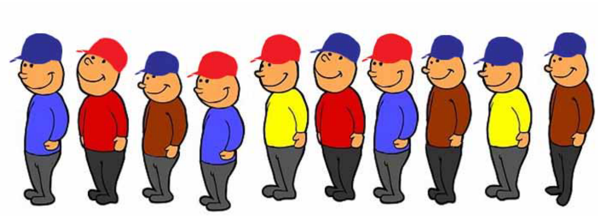
Planteo:

Imaginemos un juego que es parte de un programa de televisión que da grandes premios a los ganadores. El juego es jugado por un equipo de 10 personas. Se les indica pararse en fila india, y a cada uno se le asigna un sombrero de color rojo o azul.

Los participantes no ven el color de su propio sombrero, solo ven los sombreros de los participantes que están delante de ellos en la fila.

Uno a uno, y comenzando por el último de la fila, cada participante debe decir en voz alta el color de su propio sombrero. Si todos adivinan, el equipo gana el premio. Si alguno se equivoca, nadie gana nada.

Los miembros del equipo pueden ponerse de acuerdo



en alguna estrategia antes de comenzar a jugar, pero durante el juego no se pueden comunicar entre ellos; solo ven a los jugadores que tienen en frente y escuchan las respuestas de los que tienen atrás.

Pregunta:

¿Cuál es la mejor estrategia a aplicar? es decir ¿cuál es la estrategia que les ofrece mayor probabilidad de ganar?

Pista:

No es difícil ver que no hay ninguna estrategia que les haga ganar siempre. El primer jugador, por ejemplo, no tiene información exterior que le ayude a adivinar el color de su sombrero. Tiene una probabilidad de acertar de 1/2 (50%). Si tanto él como los demás tratan de adivinar su color al azar, cada jugador tiene 1/2 de posibilidades de acertar, y por lo tanto la probabilidad de que todos acierten es $1/2^{10} \approx 0{,}001$. Esta es claramente una muy mala estrategia.

Problema: La mesa redonda y las monedas

Planteo:

Consideremos el siguiente juego entre dos jugadores:

Supongamos que tenemos una mesa redonda y un montón de monedas, todas iguales. El juego comienza sin nada sobre la mesa. Alternadamente los jugadores van colocando monedas en la mesa.

Las monedas deben ser colocadas acostadas sobre la mesa, y no se pueden poner una encima de otra ni paradas sobre el borde, ni cambiando de lugar a las monedas previamente colocadas. En algún momento la mesa estará llena de monedas y no habrá más lugar para otra. Pierde el juego el primer jugador que no pueda colocar su moneda.

Pregunta:

Suponiendo que los jugadores juegan de la mejor manera posible. ¿Cuál jugador gana: el primero o el segundo? En otras palabras: ¿Es posible que uno de los dos jugadores, si juega inteligentemente, gane siempre independiente de lo que el otro jugador haga?

Respuesta:

Si el primer jugador juega inteligentemente puede ganar siempre. La estrategia que debe aplicar es la siguiente:

Llamemos J_1 al primer jugador y J_2 al segundo jugador. J_1 comienza por colocar la primera moneda en el centro de la mesa. En las siguientes jugadas coloca su moneda en la posición simétricamente opuesta a la de la moneda que colocó J_2. Nos referimos a una simetría central con respecto al centro de la mesa.

Demostraremos ahora que si J_1 juega de acuerdo con esta regla, ganará siempre. Observemos que después de cada jugada de J_1 (si J_1 sigue su estrategia) la posición de las monedas en la mesa es totalmente simétrica. Claramente esto ocurre luego de la primera jugada, y esta simetría se mantiene a lo largo del juego. Por lo tanto, si J_2 encuentra un lugar vacío para colocar una moneda, el lugar simétricamente opuesto también estará vacío, por lo que J_1 puede jugar ahí. Esto implica que J_1 siempre tiene lugar para jugar y por lo tanto nunca pierde. Por lo que es J_2 quien eventualmente se quedará sin lugar para jugar y perderá.

****Antonio Montalbán** es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de la República (UR) y PhD de la Universidad de Cornell (Estados Unidos). Actualmente es profesor titular en la Universidad de Chicago (Estados Unidos).*