Teoría de conjuntos según von Neumann

Antonio Montalbán

19 de agosto de 2004

Resumen

Probamos que, dentro de la teoría de von Neumann (VN), hay un modelo natural de la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF) sin el axioma de fundación y vemos que ni el axioma de fundación ni su negación son teoremas en ese modelo. Por último obtenemos que la consistencia de VN está implicada por la consistencia de ZF + (*elección*) + ($\exists$*cardinal inaccesible*).

1. Introducción

En este articulo estudiamos la teoría axiomática de conjuntos que propuso von Neumann en [Neu25]. Es una axiomática muy diferente de la de Zermelo-Fraenkel. Aunque la teoría de von Neumann tiene ideas nuevas con respecto a la teoría de Zermelo-Fraenkel, la primera tiene dentro de ella un modelo natural de ZFC^- y probablemente fue pensada para garantizar la existencia de este modelo. Un estudio comparativo de la teoría de von Neumann con respecto a la teoría de Zermelo-Fraenkel se puede encontrar en [Mor98]. Una particularidad es que VN está basada en el concepto de función, mientras que ZF está basada en el concepto de pertenencia. Esto no crea diferencias profundas, ya que un conjunto se puede expresar cómo una función característica y una función se puede expresar cómo un conjunto de pares. Una de las cualidades de esta axiomática es que tiene una cantidad finita de axiomas (de hecho tiene dieciocho), mientras que ZF no es finitamente axiomatizable. Otra ventaja es que se pueden manejar clases dentro de la teoría. Estas ventajas se conservaron en la teoría, hoy llamada NGB (von Neumann, Gödel, Bernays), la cual es usada actualmente. Los fundamentos básicos de esta teoría están desarrollados, por ejemplo, en [Men97].

En la sección 2 presentamos formalmente a la teoría de von Neumann y demostramos algunos teoremas en ella. Demostramos el teorema de reducción normal que nos permitirá representar cierto tipo de formulas del lenguaje con objetos de la teoría.

En la sección 3 mostramos un modelo natural ($\mathbf{I}$) de la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección y sin el de fundación (ZFC^-) dentro de la teoría de von Neumann. Esto nos muestra que en VN podemos hacer, por lo menos, todo lo que podemos hacer en ZFC^-. Hay quienes piensan que a partir de ZFC^- se puede desarrollar toda la matemática, por lo tanto, toda la matemática se podría desarrollar en VN.

En la sección 4 empezamos construyendo, en la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección y con el que afirma la existencia de algun cardinal inaccesible, un modelo de la teoría de von Neumann. De donde obtendremos que si esta extención de la teoría de Zermelo-Fraenkel es consistente entonces tambinén VN lo es. Una pregunta que es natural hacerse es si se puede demostrar el axioma de fundación en el modelo $\mathbf{I}$ de $\widetilde{ZFC^-}$ dentro de VN, que analizamos en la sección 3. Para esto construiremos, en ZFC, dos modelos de VN usando el modelo que ya habíamos construido. En uno de ellos se verificará fundación y en el otro se verificará su negación, obteniendo así que ni fundación ni su negación son demostrables en la estructura $\mathbf{I}$ dentro de VN.

Todo lo que presentamos en este artículo esta detalladamente explicado en [Mon00].

2. Teoría de conjuntos de von Neumann

Desarrollamos la teoría de conjuntos de von Neumann en el cálculo de predicados de primer orden con igualdad. El lenguaje, que notaremos con $\mathcal{L}^{VN}$, contiene un símbolo de predicado $\mathbf{I}(\cdot)$, dos símbolos de constante $\perp$ y $\top$, y dos símbolos de función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\cdot[\cdot]$. Cuando escribimos $\mathbf{I}(x)$ decimos "x es un uno-objeto". Intuitivamente estos uno-objetos van a ser los argumentos y los resultados de las funciones, y también van a ser funciones. Los objetos que no son uno-objetos se caracterizan por ser, en cierto sentido, muy grandes, como por ejemplo lo son las clases propias en la teoría de conjuntos usual. Llamamos *bottom* y *top* a los símbolos de constantes $\perp$ y $\top$, que representan falso y verdadero respectivamente. Cuando escribimos $\langle x, y\rangle$ decimos "el par x y" y lo interpretamos como el par ordenado formado por x e y. Cuando escribimos $x[y]$ decimos "y aplicado a x" o "x evaluado en y", a y le llamamos el *argumento* de la aplicación, y lo interpretamos como la función x evaluada en el valor y.

Los axiomas de la teoría de conjuntos de von Neumann están divididos en cinco grupos:

$VN.I$: axiomas introductorios
$VN.II$: axiomas de construcciones aritméticas
$VN.III$: axiomas de construcciones lógicas
$VN.IV$: axioma sobre los uno-objetos
$VN.V$: axiomas de infinitud.

Describimos a continuación cada uno de los grupos de axiomas.

2.1. Grupo I. Axiomas introductorios

Utilizamos $\forall^{\mathbb{M}} x\, \varphi$ en lugar de $\forall x(\mathbb{M}(x) \to \varphi)$ y $\exists^{\mathbb{M}} x \varphi$ en lugar de $\exists x(\mathbb{M}(x) \wedge \varphi)$.

$VN.I{,}1 : \mathbf{I}(\perp) \wedge \mathbf{I}(\top) \wedge \perp \neq \top$
$VN.I{,}2 : \forall f \forall^{\mathbf{I}} x(\mathbf{I}(f[x]))$
$VN.I{,}3 : \forall^{\mathbf{I}} xy(\mathbf{I}\langle x, y\rangle)$
$VN.I{,}4 : \forall fg(\forall^{\mathbf{I}} x(f[x] = g[x]) \to f = g)$

Se podría decir que los primeros tres axiomas se dedican a definir "el tipo" de las funciones del lenguaje. El cuarto axioma caracteriza la igualdad: dos elementos son iguales si son iguales como funciones. Este axioma es el que nos permite pensar a los objetos como funciones, y al símbolo de función $\cdot[\cdot]$ como la aplicación. El segundo y el cuarto axioma permiten decir que todos los objetos son funciones que van desde los uno-objetos a los uno-objetos.

En todos los axiomas de la teoría, cada vez que aparece una aplicación su segunda entrada es un uno-objeto y cada vez que aparece un par sus dos entradas son uno-objetos. Esto implica que en ningún resultado relevante de la teoría aparecerán aplicaciones o pares fuera de estas condiciones. Para la definición de estos términos consideraremos un conjunto de variables X y definiremos la clase de los términos que están, en el sentido de la oración anterior, bien formados cuando suponemos que todos los elementos de X son uno-objetos.

La definición formal de esta clase de términos es la siguiente:

Definición 2.1. Sea X un conjunto de variables, definimos por inducción al conjunto de términos *bien formados sobre* X ($tbf(X)$):

- $\bot$ y $\top$ son $tbf(X)$ para cualquier conjunto de variables X.
- x es un $tbf(X)$ si $x \in X$.
- $\langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \rangle$ y $\mathfrak{u}_1[\mathfrak{u}_2]$ son $tbf(X)$ si $\mathfrak{u}_1$ y $\mathfrak{u}_2$ son $tbf(X)$.
- $y[\mathfrak{u}]$ es un $tbf(X)$ si $\mathfrak{u}$ es un $tbf(X)$ e y es una variable cualquiera.

Teorema 2.2. Dado $\mathfrak{u}$ un $tbf(\{x_1, \ldots, x_n\})$, tenemos que

$$VN.I \vdash \forall^{\mathbf{I}} x_1 \ldots x_n \mathbf{I}(\mathfrak{u})$$

DEMOSTRACIÓN: Se demuestra fácilmente por inducción en $\mathfrak{u}$, un $tbf(X)$. $\square$

Observemos que todo término es bien formado sobre su conjunto de variables, pero lo interesante es que un término puede ser bien formado sobre conjuntos menores.

2.2. Grupo II. Axiomas de construcciones aritméticas

$VN.II,1 : \exists a(\forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = x))$
$VN.II,2 : \forall^{\mathbf{I}} u \exists a \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = u)$
$VN.II,3 : \exists a \forall^{\mathbf{I}} xy(a[\langle x, y\rangle] = x)$
$VN.II,4 : \exists a \forall^{\mathbf{I}} xy(a[\langle x, y\rangle] = y)$
$VN.II,5 : \exists a \forall^{\mathbf{I}} xy(a[\langle x, y\rangle] = x[y])$
$VN.II,6 : \forall ab \exists c \forall^{\mathbf{I}} x(c[x] = \langle a[x], b[x]\rangle)$
$VN.II,7 : \forall ab \exists c \forall^{\mathbf{I}} x(c[x] = a[b[x]])$

El grupo II de axiomas asegura la existencia de ciertas funciones que son la base para construir -como veremos más adelante- muchas otras. Estos axiomas aseguran la existencia de las funciones: identidad, constante igual a u para cada uno-objeto u, las funciones proyección que aplicadas a un par devuelven una de sus componentes, la función aplicación que dado un par de uno-objetos da la primera componente aplicada a la segunda, las funciones que devuelven pares dando las funciones coordenadas y la función compuesta de dos funciones.

De los axiomas $VN.II,3$ y $VN.II,4$ se deduce que dos pares son iguales si y solo si sus componentes lo son. Esto nos permite pensar a $\langle x, y\rangle$ como lo que usualmente es el par ordenado x y.

Definiremos un símbolo de función o de constante para cada axioma del grupo II. Estos axiomas nos permiten definir estos símbolos sin agregar nada nuevo a la teoría . Luego definiremos, como si programáramos en un lenguaje de programación funcional, nuevas funciones a partir de las ya obtenidas. Recordamos que para definir un símbolo de función f tal que $\forall x \forall a(a = \mathsf{f}(x) \leftrightarrow \varphi(x, a))$ es necesario tener probado $\forall x \exists! a \varphi(x, a)$. Para definir un símbolo de constante c tal que $\forall a(a = \mathsf{c} \rightarrow \varphi(a))$ sólo es necesario tener probado $\exists a \varphi(a)$.

Definición 2.3. Definimos los símbolos de función id, $\mathsf{cte}(\cdot)$, $\mathsf{par}(\cdot, \cdot)$ y $\mathsf{comp}(\cdot, \cdot)$ y los símbolos de constantes pr_1, pr_2 y ap tales que satisfacen:

- $\forall a(a = \mathsf{id} \leftrightarrow \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = x))$
- $\forall^{\mathbf{I}} u \forall a(a = \mathsf{cte}(u) \leftrightarrow \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = u))$
- $\forall^{\mathbf{I}} xy(\mathsf{pr}_1[\langle x, y\rangle] = x)$
- $\forall^{\mathbf{I}} xy(\mathsf{pr}_2[\langle x, y\rangle] = y)$
- $\forall^{\mathbf{I}} xy(\mathsf{ap}[\langle x, y\rangle] = x[y])$
- $\forall bc \forall a(a = \mathsf{par}(b, c) \leftrightarrow \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = \langle b[x], c[x]\rangle))$
- $\forall bc \forall a(a = \mathsf{comp}(b, c) \leftrightarrow \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = b[c[x]]))$

A continuación fijamos algunas notaciones que nos permitirán considerar n-uplas y funciones de n argumentos.

Definición 2.4.
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$
$a[x_1, \ldots, x_n] := a[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$

Un importante resultado que se deduce a partir de $VN.I, II$ es que dada una expresión $\mathfrak{u}(y_1, \ldots, y_n)$ construida a partir de las variables $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$, de las constantes $\perp$ y $\top$ y usando las funciones $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\cdot[\cdot]$, tenemos que existe un objeto a tal que, para cualesquiera uno-objetos $y_1, \ldots, y_n$, $\mathfrak{u}(y_1, \ldots, y_n) = a[y_1, \ldots, y_n]$. Este término $\mathfrak{u}$ tiene que estar formado correctamente.

Teorema de Reducción 2.5. Dado $\mathfrak{u}$, un *tbf*$(\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n\})$ tenemos que:

$$VN.I, II \vdash \forall^{\mathbf{I}} y_1 \ldots y_m \exists a \forall^{\mathbf{I}} x_1 \ldots x_n (a[x_1, \ldots, x_n] = \mathfrak{u})$$

Demostración: La demostración se hace por inducción en $\mathfrak{u}$, un *tbf* y usando las funciones que definimos en 2.3 □

2.3. Grupo III. Axiomas de construcciones lógicas

$VN.III,1 : \exists a \forall^{\mathbf{I}} xy(a[\langle x, y\rangle] \neq \perp \leftrightarrow x = y)$
$VN.III,2 : \forall b \exists a \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] \neq \perp \leftrightarrow \forall^{\mathbf{I}} y(b[\langle x, y\rangle] = \perp))$
$VN.III,3 : \forall b \exists a \forall^{\mathbf{I}} x(\exists!^{\mathbf{I}} y(b[\langle x, y\rangle] \neq \perp) \rightarrow b[\langle x, a[x]\rangle] \neq \perp)$

Los axiomas del grupo III nos aseguran la existencia de funciones que nos permiten asignar a cada frase un objeto que se comporte de la misma forma. Para interpretar estos axiomas pensemos que bottom significa falso y ser distinto de bottom verdadero. El primer axioma asegura la existencia de una función que dice si dos elementos son iguales o no. El segundo asegura la existencia de una función que se comporta como un “para todo no”. Finalmente, el tercero permite que el y que obtenemos por una condición implícita $b[\langle x, y\rangle] \neq \perp$ se obtenga explícitamente como $y = a[x]$. Así como los axiomas del grupo II, los del grupo III nos permiten introducir nuevos símbolos de función. Por ejemplo, el axioma $VN.III,1$ nos permite definir al símbolo de constante ig de *igualdad* que satisface: $\forall^{\mathbf{I}} xy(x = y \leftrightarrow \mathsf{ig}[x, y] \neq \perp)$

Antes de ver que se deduce de este grupo definiremos algunos predicados.

Definición 2.6.

$x \,\epsilon\, a := \mathbf{I}(x) \wedge a[x] \neq \perp$	$a \sqsubseteq b := \forall^{\mathbf{I}} x(x \,\epsilon\, a \rightarrow x \,\epsilon\, b)$
$clase(a) := \forall^{\mathbf{I}} x(a[x] = \perp \vee a[x] = \top)$	$a \sim b := a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a$
$conj(a) := \mathbf{I}(a) \wedge clase(a)$	$a \sqsubset b := a \sqsubseteq b \wedge \neg a \sim b$

La definición de $x \,\epsilon\, a$ significa intuitivamente que x está en el dominio de a, y $a \sqsubseteq b$ significa que el domino de a está incluido en el de b. Decimos que un objeto es una clase si solamente toma valores bottom o top, lo que estamos haciendo es representar las clases con su función característica. Y un objeto es un conjunto si su función característica es un uno-objeto.

Demostraremos que para una cierta clase de fórmulas existe una clase (en el sentido de la definición 2.6) que contiene a todos los uno-objetos que satisfacen dicha fórmula.

A continuación definimos el conjunto de fórmulas que podremos representar con objetos de la teoría.

Definición 2.7. Definimos por inducción al conjunto de fórmulas **I**-*reducibles sobre* X, donde X es un conjunto de variables:

- $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$ es **I**-reducible sobre X si $\mathfrak{u}_1$ y $\mathfrak{u}_2$ son *tbf*(X).
- $\mathbf{I}(\mathfrak{u})$ es **I**-reducible sobre X si $\mathfrak{u}$ es un *tbf*(X).
- $\varphi \vee \psi$ es **I**-reducible sobre X si φ y ψ son **I**-reducibles sobre X.
- $\neg\varphi$ es **I**-reducible sobre X si φ es **I**-reducible sobre X.
- Si φ es **I**-reducible sobre X, entonces $\exists^{\mathbf{I}} x\varphi$ es **I**-reducible sobre $X \setminus \{x\}$.

Obsérvese que toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}^{VN}$ relativizada a la clase **I** es **I**-reducible sobre *FreeVars*(φ), el conjunto de variables libres de φ, pero también puede serlo sobre algún conjunto menor.

Teorema de reducción normal 2.8. Dada φ una fórmula **I**-reducible sobre el conjunto de variables $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n\}$ se tiene que:

$$VN.I, II, III \vdash \forall^{\mathbf{I}} y_1 \ldots y_m \exists a \forall^{\mathbf{I}} x_1, \ldots, x_n (a[x_1, \ldots, x_n] \neq \bot \leftrightarrow \varphi)$$

Demostración: La demostración se hace por inducción en φ, fórmula **I**-reducible, usando el teorema de reducción. Además hay que usar la función ig para las fórmulas de las formas $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$ o $\psi \vee \chi$ y la función que define el axioma $VN.III$,2 para las fórmulas de las formas $\neg\psi$ o $\exists^{\mathbf{I}} x\psi$. □

Para el próximo teorema usaremos el axioma $VN.III$,3, que no ha sido usado hasta ahora.

Teorema 2.9. Dada φ una fórmula **I**-reducible sobre el conjunto de variables $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n, y\}$ se tiene que:

$$\begin{gathered} VN.I, II, III \vdash \forall^{\mathbf{I}} y_1 \ldots y_m (\forall^{\mathbf{I}} x_1, \ldots, x_n \exists!^{\mathbf{I}} y(\varphi)) \rightarrow \\ \exists a \forall^{\mathbf{I}} x_1, \ldots, x_n, y(a[x_1, \ldots, x_n] = y \leftrightarrow \varphi) \end{gathered}$$

Demostración: Notamos con $\vec{x}$ a $x_1, \ldots, x_n$ y sean $y_1, \ldots, y_m$ uno-objetos.

Por el teorema anterior tenemos que existe b tal que$\forall^{\mathbf{I}} \vec{x}, y(b[\vec{x}, y] \neq \bot \leftrightarrow \varphi)$. Por la hipótesis tenemos que $\forall^{\mathbf{I}} \vec{x} \exists!^{\mathbf{I}} y(b[\vec{x}, y] \neq \bot)$, luego usando el axioma $VN.III$,3 tenemos que existe a tal que $\forall^{\mathbf{I}} \vec{x}, y(a[\vec{x}] = y \leftrightarrow b[\vec{x}, y] \neq \bot)$. Ese a es el requerido. □

Corolario 2.10. $VN.I, II, III \vdash \forall a \exists! \bar{a} \forall^{\mathbf{I}} x((\bar{a}[x] = \bot \leftrightarrow a[x] = \bot) \wedge (\bar{a}[x] = \top \leftrightarrow a[x] \neq \bot))$

Demostración: Como $\bar{a}[x]$ está definido para cualquier uno-objeto x, la unicidad está dada por el axioma $VN.I$,4. Para la existencia consideremos la fórmula $\varphi(x, y)$: $(y = \bot \leftrightarrow a[x] = \bot) \wedge (y = \top \leftrightarrow a[x] \neq \bot)$. Como necesariamente $a[x] = \bot \vee a[x] \neq \bot$ tenemos que $\forall^{\mathbf{I}} x \exists!^{\mathbf{I}} y(\varphi(x, y))$, luego $\bar{a}$ esta dada por el teorema. □

Dado un objeto a, pensamos a su dominio como la clase de todos los uno-objetos x tales que $a[x] \neq \bot$. Este corolario nos permite definir al dominio de una función de la siguiente manera:

Definición 2.11. El símbolo de función unario $\mathsf{Dom}(\cdot)$ se define tal que:

$$\forall a \forall^{\mathbf{I}} x((\mathsf{Dom}(a)[x] = \bot \leftrightarrow a[x] = \bot) \wedge (\mathsf{Dom}(a)[x] = \top \leftrightarrow a[x] \neq \bot))$$

Ya que de las definiciones de Dom y *clase* se obtiene que:

$$\forall a(clase(\mathsf{Dom}(a)) \wedge \forall^{\mathbf{I}} x(x \,\epsilon\, \mathsf{Dom}(a) \leftrightarrow a[x] \neq \bot)),$$

queda claro que lo que hace $\mathsf{Dom}(a)$ es darnos el dominio de la función a.

El siguiente teorema nos asegura la existencia de una clase a de n-uplas de uno-objetos que satisfacen una propiedad φ.

Teorema 2.12. Dada φ una fórmula **I**-reducible sobre el conjunto de variables $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n\}$, se tiene que:

$$VN.I, II, III \vdash \forall^{\mathbf{I}} y_1 \ldots y_m \exists!^{clase} a \forall^{\mathbf{I}} z(z \epsilon a \leftrightarrow \exists^{\mathbf{I}} \vec{x}(z = \langle \vec{x} \rangle \wedge \varphi))$$

DEMOSTRACIÓN: Como $a[z]$ esta definido para cualquier uno-objeto z, el axioma $VN.I$,4 garantiza la unicidad. Por el teorema de reducción normal 2.8 tenemos que existe b tal que $\forall^{\mathbf{I}} z(z \epsilon b \leftrightarrow \exists^{\mathbf{I}} \vec{x}(z = \langle \vec{x} \rangle \wedge \varphi))$. Alcanza con tomar $a := \mathsf{Dom}(b)$, luego $x \epsilon a \leftrightarrow x \epsilon b \leftrightarrow \varphi$ y $clase(a)$. $\square$

Definición 2.13. Llamamos a esa clase $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$, o sea que $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$ es tal que $clase([\![\varphi]\!]_{\vec{x}})$ y $\forall^{\mathbf{I}} \vec{x}(\langle \vec{x} \rangle \epsilon [\![\varphi]\!]_{\vec{x}} \leftrightarrow \varphi(\vec{x}))$. Escribimos simplemente $[\![\varphi]\!]$ si esta claro cuales son $\vec{x}$.

Ahora el trabajo con clases y conjuntos se torna mucho más simple.

Definición 2.14. Notamos $[\![\mathbf{I}]\!]$ a $[\![\mathbf{I}(x)]\!]_x$, la clase de todos los uno-objetos. Va a cumplir que $\forall^{\mathbf{I}} x(x \epsilon [\![\mathbf{I}]\!])$.

Definimos $\mathsf{Im}(b, a) := [\![\exists^{\mathbf{I}} y(y \epsilon a \wedge b[y] = x)]\!]_x$

2.4. Grupo IV. Uno-objetos

$VN.IV,1 : \forall a(\neg \mathbf{I}(a) \leftrightarrow \exists b \forall^{\mathbf{I}} x \exists^{\mathbf{I}} y(a[y] \neq \perp \wedge b[y] = x))$

El axioma $VN.IV$,1 es muy importante en la teoría ya que nos da una condición necesaria y suficiente para que un objeto sea o no un uno-objeto. Intuitivamente dice que un objeto, mirado como función, es un uno-objeto si y sólo si su dominio no es demasiado grande.

Escribamos el axioma del grupo IV usando los símbolos de función que definimos:

$$VN.IV,1 : \ \forall a(\neg \mathbf{I}(a) \leftrightarrow \exists b(\mathsf{Im}(b, a) = [\![\mathbf{I}]\!]))$$

Lo que dice es que a no es un uno-objeto si y sólo si existe una función $b : a \to [\![\mathbf{I}]\!]$ que sea sobreyectiva, que se puede interpretar como que el cardinal de a (o de $\mathsf{Dom}(a)$) es igual al de la clase de todos los uno-objetos.

2.5. Grupo V. Axiomas de infinitud

$VN.V,1 : \exists^{\mathbf{I}} a(\exists^{\mathbf{I}} x(x \epsilon a) \wedge \forall^{\mathbf{I}} x(x \epsilon a \to \exists^{\mathbf{I}} y(x \sqsubset y \wedge y \epsilon a)))$
$VN.V,2 : \forall^{\mathbf{I}} b \exists^{\mathbf{I}} a \forall^{\mathbf{I}} x(\exists^{\mathbf{I}} y(x \epsilon y \wedge y \epsilon b) \to x \epsilon a)$
$VN.V,3 : \forall^{\mathbf{I}} b \exists^{\mathbf{I}} a \forall^{\mathbf{I}} x(x \sqsubseteq b \to \exists^{\mathbf{I}} y(y \sim x \wedge y \epsilon a))$

El primer axioma asegura la existencia de un uno-objeto con dominio infinito. El segundo asegura la existencia de un uno-objeto que está relacionado con la unión usual de conjuntos, es un uno-objeto cuyo dominio es la unión de los dominios de los elementos que están en el dominio de un cierto uno-objeto. El tercero asegura la existencia de un uno-objeto que está relacionado con el conjunto de partes usual de un conjunto.

3. Relación con la teoría de Zermelo-Fraenkel

El objetivo de esta sección es mostrar como existe un modelo natural de la teoría de Zermelo-Fraenkel dentro de la teoría de von Neumann.

Empezamos enunciando los axiomas de ZFC. Luego demostramos que los axiomas de ZFC^- se verifican en el modelo construido de donde deducimos un resultado de consistencia.

3.1. Teoría de Zermelo-Fraenkel

La axiomática de Zermelo-Fraenkel, que escribimos ZF, es una de las que más se usa en la actualidad. En este sección veremos un variación de ZF, que escribimos $\widetilde{ZF}$, en la cual se permite la existencia de urelementos[*], usaremos ZF en la última sección.

Desarrollamos la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel en el cálculo de predicados de primer orden con igualdad. El lenguaje, que notamos con $\mathcal{L}^{\widetilde{ZF}}$, contiene dos símbolos de predicados: $\cdot \in \cdot$ que es un predicado de aridad dos que llamamos pertenece, y un símbolo un-ario $\mathfrak{conj}$ que nos servirá para identificar a los elementos que son conjuntos.

Escribamos los axiomas:

$\widetilde{ZF}$,0 : $\exists x(x = x)$
$\widetilde{ZF}$,1 :*Extensionalidad:* $\forall^{\mathfrak{conj}} xy(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
$\widetilde{ZF}$,2 :*Fundación:* $\forall^{\mathfrak{conj}} x(\exists y \in x \to \exists y \in x \forall z \in x(z \notin y))$[**]
$\widetilde{ZF}$,3_φ :*Comprensión:* $\forall^{\mathfrak{conj}} a \exists^{\mathfrak{conj}} z \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in a \wedge \varphi)$[***]
$\widetilde{ZF}$,4 : *Pareo:* $\forall xy \exists^{\mathfrak{conj}} z(x \in z \wedge y \in z)$
$\widetilde{ZF}$,5 :*Unión:* $\forall^{\mathfrak{conj}} x(\forall y \in x(\mathfrak{conj}(y)) \to \exists^{\mathfrak{conj}} u \forall y \in x(y \subset u))$
$\widetilde{ZF}$,6_φ :*Reemplazo:* $\forall^{\mathfrak{conj}} a((\forall x \in a \exists! y \varphi(x, y)) \to \exists^{\mathfrak{conj}} b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y))$
$\widetilde{ZF}$,7 :*Infinito:* $\exists^{\mathfrak{conj}} x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$
$\widetilde{ZF}$,8 :*Potencia:* $\forall^{\mathfrak{conj}} a \exists^{\mathfrak{conj}} b \forall^{\mathfrak{conj}} y(y \subset a \to y \in b)$
$\widetilde{AC}$:*Elección:* $\forall^{\mathfrak{conj}} a \exists R(R \text{ bien ordena } a)$

En los axiomas $\widetilde{ZF}$,5, $\widetilde{ZF}$,7 y $\widetilde{ZF}$,8 aparecen los símbolos $\subset$, S y $\emptyset$ que no son parte del lenguaje. Definimos $x \subset y$ como una abreviación de $\forall w \in x(w \in y)$. De los axiomas $\widetilde{ZF}$,0, 1, 3 se demuestra que $\exists!^{\mathfrak{conj}} c \forall x(x \notin c)$, a este c le llamamos *conjunto vacío* y lo notamos con $\emptyset$. De los axiomas $\widetilde{ZF}$,1, 3, 4, 5 se demuestra que podemos definir $S(x) := \{x\} \cup x$.

Al axioma de elección no lo escribimos como fórmula del lenguaje porque es muy complicado de escribir y entender.

Notamos con $\widetilde{ZFC}^-$ a los axiomas de $\widetilde{ZF}$ sin el axioma 2 y con el axioma $\widetilde{AC}$.

La única diferencia entre ZF y $\widetilde{ZF}$ es que en ZF no aparece el símbolo de predicado $\mathfrak{conj}$. O se podría decir que sí aparece, pero que cumple que $\forall x(\mathfrak{conj}(x))$, por lo tanto se trivializa y no es necesario ponerlo. Dicho de otra forma:

$$ZF = \widetilde{ZF} + \forall x(\mathfrak{conj}(x))$$

3.2. $\widetilde{ZF}$ en VN

Sea $\mathbf{I}$ la estructura $< \mathbf{I}(\cdot), conj, \epsilon >$ para $\mathcal{L}^{\widetilde{ZF}}$, es decir que $\mathbf{I}$ es la estructura que tiene como dominio a los uno-objetos y que interpreta a los símbolos $\mathfrak{conj}$ y $\in$ con los predicados $conj$ y ϵ que definimos en 2.6. Probaremos que es un modelo de $\widetilde{ZFC}^-$ en VN. Obsérvese la simplicidad de la estructura $\mathbf{I}$. El hecho de que $\mathbf{I}$ es un modelo de $\widetilde{ZFC}^-$ ya había sido enunciado por von Neumann en [Neu25] y es de suponer que él armó la teoría para que esto ocurra.

Teorema 3.1. $\mathbf{I}$ es un modelo de $\widetilde{ZFC}^-$ en VN.

[*]Se le llama *urelementos* a los objetos de la teoría que no son conjuntos.

[**]Escribimos $\exists x \in a\varphi$ en lugar de $\exists x(x \in a \wedge \varphi)$ y escribimos $\forall x \in a\varphi$ en lugar de $\forall x(x \in a \to \varphi)$.

[***]Comprensión, al igual que Reempazo, no es un axioma solo sino que es una familia de axiomas. Hay un axioma por cada fórmula del lenguaje.

Demostración: Para probar este teorema tenemos que probar, en VN, la relativización a $\mathbf{I}$ de cada uno de los axiomas de $\widetilde{ZFC^-}$.

El axioma de extensionalidad relativizado a $\mathbf{I}$, que notamos $\widetilde{ZF},1^{\mathbf{I}}$, queda

$$\forall^{conj} xy(\forall^{\mathbf{I}} z(x[z] \neq \perp \leftrightarrow y[z] \neq \perp) \to x = y)$$

lo cual se deduce del axioma $VN.I$,4.

Para probar pareo hay que definir la clase $[\![z = x \vee z = y]\!]_z$ y probar que es un uno-objeto.

Las familias de axiomas Comprensión y Reemplazo se deducen de $VN.IV$,1 y de los teoremas 2.12 y 2.9.

Potencia, Unión e Infinito se deducen de los axiomas del quinto grupo. Las formulaciones de estos axiomas no son exactamente las mismas que las formulaciones de los axiomas de Potencia, Unión e Infinito de la teoría de von Neumann, por lo tanto también va a ser necesario usar la teoría que tenemos desarollada en VN y la que conocemos a partir de los axiomas de $\widetilde{ZF}$ que ya probamos.

La prueba de $\widetilde{AC}^{\mathbf{I}}$ es la más interesante: La teoría de ordinales se puede desarrollar en VN sin ninguna dificultad. Si notamos con ON a la clase (clase segun la definición 2.6) de todos los ordinales, la paradoja de Buralli-Forti nos dice $\neg conj(ON)$ y por lo tanto $\neg\mathbf{I}(ON)$. Ahora del axioma $VN.IV$,1 se deduce que existe un objeto b que como función restringida a ON es sobreyectiva sobre $[\![\mathbf{I}]\!]$. Esto nos permite definir función $a : [\![\mathbf{I}]\!] \to ON$ inyectiva y de esta forma tenemos un buen orden en $[\![\mathbf{I}]\!]$ y por lo tanto en todos sus subconjuntos. □

Corolario 3.2. $CON(VN) \Rightarrow CON(\widetilde{ZFC^-})$

Se prueba que $< \mathbb{WF}, \mathfrak{conj}, \in >$ es un modelo de ZFC dentro de $\widetilde{ZFC^-}$, donde $\mathbb{WF}$ es la clase de los conjuntos bien formados (ver [Kun80], Ch.IV §4). Por tanto $CON(\widetilde{ZFC^-}) \Rightarrow CON(ZFC)$. Si juntamos este resultado con el corolario anterior obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3. $CON(VN) \Rightarrow CON(ZFC)$

4. Modelos de la teoría de von Neumann

En esta sección demostraremos algunos resultados de consistencia relativa. Usaremos, al igual que en la sección anterior, el método de relativización.

En todo la sección trabajaremos en la teoría ZFC.

4.1. Algunas definiciones

En esta sección presentaremos algunas definiciones y demostraremos algunas proposiciones en ZFC que nos serán de utilidad más adelante.

Usaremos los cardinales inaccesibles [Kun80] para construir modelos que contengan objetos grandes como clases propias. Recordamos que en la sección 2.4 dijimos que, intuitivamente, un objeto es un uno-objeto si y sólo si su dominio no es demasiado grande, usaremos a los cardinales inaccesibles para modelar la noción de "demasiado grande".

Definición 4.1.

- Decimos que un conjunto A es *acotado* en un cardinal κ si existe un ordinal $\alpha < \kappa$ tal que $A \subset \alpha$.

- Un cardinal κ es *regular* si para todo $A \subset \kappa$ tal que $\|A\| < \kappa$, A es acotado en κ.
- Un cardinal κ es *límite fuerte* si $\forall^{\mathbb{ON}}\alpha < \kappa(\|\mathcal{P}(\alpha)\| < \kappa)$
- Decimos que un cardinal es *(fuertemente) inaccesible* si es regular, límite fuerte y no numerable.
- Notamos con EI a la frase $\exists\kappa(\kappa$ inaccesible$)$.

Observación 4.2.

1. Un cardinal infinito κ es regular sii para todo conjunto A tal que $\|A\| < \kappa$ y $\forall x \in A(\|x\| < \kappa)$ se tiene que $\|\bigcup A\| < \kappa$.
2. Un cardinal κ es límite fuerte sii para todo conjunto A tal que $\|A\| < \kappa$ se tiene que $\|\mathcal{P}(A)\| < \kappa$.

A estos cardinales se los llama inaccesibles porque no se pueden construir a partir de cardinales menores usando la potenciación o la unión. De hecho, se puede probar que la existencia de estos cardinales no se deduce de ZFC (el lector puede encontrar una demostración usando métodos de relativización en [Kun80], pág. 133). También se sabe que no se puede encontrar una prueba, expresable en ZFC,[****] de $CON(ZFC) \Rightarrow CON(ZFC+EI)$ (En [Kun80], pág 145, hay una demostración que usa fuertemente el teorema de Incompletitud de Gödel). A pesar de esto, en general, los matemáticos creen en la consistencia de $ZFC + EI$.

Ahora definiremos al conjunto de funciones κ-casi nulas. La idea de considerar el soporte de las funciones y de definir funciones casi nulas es bastante común en muchas áreas de la matemática.

Definición 4.3.

- $\mathcal{F}(A, B) := \{f \subset A \times B; f \text{ función con dominio } A \text{ y codominio } B\}$
- Dada $f \in \mathcal{F}(A, B)$ llamamos *soporte* de f a $sop(f) := \{x \in A : f(x) \neq \emptyset\}$.
- Decimos que $f \in \mathcal{F}(A, B)$ es *κ-casi nula* si $\|sop(f)\| < \kappa$. Notamos $\mathcal{F}_\kappa(A, B)$ al conjunto de las funciones κ-casi nulas de $\mathcal{F}(A, B)$

Proposición 4.4. Para todo κ inaccesible, $\|\mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa)\| = \kappa$

Demostración: El hecho de que $\kappa \leq \|\mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa)\|$ es fácil de probar. Probaremos que $\|\mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa)\| \leq \kappa$. Si tenemos $A, B \subset \kappa$ y $f \in \mathcal{F}(A, B)$ definimos $\overline{f} \in \mathcal{F}(\kappa, \kappa)$ de la siguiente forma:

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \in \kappa \setminus A \end{cases}$$

Observemos que si $f \in \mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa)$, existe un ordinal $\lambda < \kappa$ tal que $f|_\lambda \in \mathcal{F}(\lambda, \lambda)$ y $\overline{f|_\lambda} = f$. Esto es porque: como $f \in \mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa)$, tenemos que $\|sop(f)\| < \kappa$ y como κ es regular existe $\lambda_1 < \kappa$ tal que $sop(f) \subset \lambda_1$, y también tenemos que $\|\{f(x) : x \in sop(f)\}\| \leq \|sop(f)\| < \kappa$ y como κ es regular existe $\lambda_2 < \kappa$ tal que $\{f(x) : x \in sop(f)\} \subset \lambda_2$. Sea $\lambda := max(\lambda_1, \lambda_2)$, luego tenemos que $f|_\lambda \in \mathcal{F}(\lambda, \lambda)$ y que $\overline{f|_\lambda} = f$. Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{F}_\kappa(\kappa, \kappa) = \bigcup_{\lambda \in \kappa}\{\overline{f} : f \in \mathcal{F}(\lambda, \lambda)\}$. Como la unión esta tomada sobre κ, alcanza con demostrar que $\|\mathcal{F}(\lambda, \lambda)\| \leq \kappa$ para todo $\lambda < \kappa$, lo cual es inmediato de que κ es límite fuerte y de que $\|\mathcal{F}(\lambda, \lambda)\| = \|\mathcal{P}(\lambda)\|$. $\square$

[****] Todos los elementos del cálculo de predicados se pueden expresar codificados en ZFC, por lo tanto también podemos expresar resultados y demostraciones en la metateoría en ZFC.

4.2. El Modelo $M(\mathcal{K}, \sigma)$

En esta sección construimos la estructura $M(\mathcal{K}, \sigma)$ en $ZFC + EI$ y probamos que es un modelo de VN.

Sea κ un cardinal inaccesible, sea $\mathcal{K}$ un conjunto de cardinal κ que contenga a $\emptyset$,[*****] sea $\ll\cdot,\cdot\gg : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ inyectiva y T un elemento de $\mathcal{K}$ distinto de $\emptyset$. De la proposición 4.4 deducimos que existe una función $\sigma : \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{K}, \mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ biyectiva. Usaremos estos objetos para construir $M(\mathcal{K}, \sigma)$. Notaremos con $modelo(\mathcal{K}, \sigma, \ll, \gg, T)$ al predicado: "$\|\mathcal{K}\| = \kappa$ es un *cardinal inaccesible*, $\sigma : \mathcal{F}_\kappa \to \mathcal{K}$ *biyectiva*, $\ll\cdot,\cdot\gg : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *inyectiva*, $\emptyset \in \mathcal{K}$, $T \in \mathcal{K}$ y $T \neq \emptyset$". Tenemos que EI implica que existen $\mathcal{K}$, σ, $\ll, \gg$ y T tales que $(modelo(\mathcal{K}, \sigma, \ll, \gg, T))$. Notamos $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ y $\mathcal{F}_\kappa := \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

En la teoría de von Neumann todos los objetos se comportan como funciones y los uno-objetos se comportan, además, como argumentos y resultados de esas funciones. El hecho de tener una biyección entre $\mathcal{F}_\kappa$ y $\mathcal{K}$ nos permite identificar a los elementos de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ con los de $\mathcal{K}$, o sea que podemos pensar a las funciones de $\mathcal{F}_\kappa$ como argumentos o resultados de las funciones de $\mathcal{F}$ (y de $\mathcal{F}_\kappa$). Siguiendo esta idea construimos el modelo $M(\mathcal{K}, \sigma)$ de VN en $ZFC + EI$. Lo que hacemos es considerar $\mathcal{F}$ como nuestro universo de elementos de VN. Incluido en $\mathcal{F}$ está $\mathcal{F}_\kappa$, que usamos para representar a los uno-objetos. Representamos a bottom y top con los elementos de $\mathcal{F}_\kappa$ que se corresponden mediante σ con $\emptyset$ y con T. Para definir el pareo de elementos de $\mathcal{F}_\kappa$ usamos $\ll\cdot,\cdot\gg : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ y para definir la aplicación de un elemento de $\mathcal{F}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ sobre un elemento de $\mathcal{F}_\kappa$ usamos la identificación entre los elementos de $\mathcal{F}_\kappa$ y los de $\mathcal{K}$. La definición formal es la siguiente:

Definición 4.5. Definimos la estructura

$$M(\mathcal{K}, \sigma, \ll, \gg, T) :=< \mathcal{F},\ \mathbf{I}^M(\cdot), \perp^M, \top^M, \langle\cdot,\cdot\rangle^M, \cdot[\cdot]^M >$$

de la siguiente forma:

- $\mathbf{I}^M(x) := \quad x \in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{K}, \mathcal{K})$
- $\perp^M := \sigma^{-1}(\emptyset)$
- $\top^M := \sigma^{-1}(T)$
- $\langle x, y\rangle^M := \sigma^{-1}(\ll\sigma(x), \sigma(y)\gg)$
- $x[y]^M := \sigma^{-1}(x(\sigma(y)))$

Eliminamos $\ll, \gg$ y T de la notación y escribimos $M(\mathcal{K}, \sigma)$, simplemente M cuando es claro quienes son $\mathcal{K}$ y σ.

Estamos definiendo $\langle x, y\rangle^M$ sólo para $x, y \in \mathcal{F}_\kappa$ y $x[y]^M$ para $x \in \mathcal{F}$ y $y \in \mathcal{F}_\kappa$ cuando deberíamos definirlos para todos $x, y \in \mathcal{F}$. Solamente nos interesaran estos casos, por lo tanto alcanza con definir a las funciones $\langle\cdot,\cdot\rangle^M$ y $\cdot[\cdot]^M$ de forma arbitraria en el resto de los casos.

Es fácil verificar que en todas las definiciones σ y σ^{-1} están aplicadas a objetos de su dominio. Para definir $M(\mathcal{K}, \sigma)$ como estructura tenemos que verificar que $\perp^M \in \mathcal{F}$, $\top^M \in \mathcal{F}$, $\langle x, y\rangle^M \in \mathcal{F}$ para todos $x, y \in \mathcal{F}_\kappa$ y que $x[y]^M \in \mathcal{F}$ para $x \in \mathcal{F}$ e $y \in \mathcal{F}_\kappa$, lo cual se prueba observando que $ran(\sigma^{-1}) = \mathcal{F}_\kappa \subset \mathcal{F}$.

Al relativizar la teoría VN se relativizan los símbolos de predicado y de función que definimos en ella. Notamos a los símbolos relativizados agregándole el supraíndice M. Por ejemplo, $conj(x)$ significa $\mathbf{I}(x) \wedge \forall^{\mathbf{I}} z(x[z] = \perp \vee x[z] = \top)$ luego $conj^M(x)$ significa $x \in \mathcal{F}_\kappa \wedge \forall^{\mathcal{F}_\kappa} z(x[z]^M = \perp^M \vee x[z]^M = \top^M)$ que es equivalente a $x \in \mathcal{F}_\kappa \wedge \forall^{\mathcal{K}} w(x(w) = \emptyset \vee x(w) = T)$.

De la misma forma obtenemos que $x \epsilon^M y$ es equivalente a $\sigma(x) \in sop(y)$.

[*****] Podríamos no pedir que $\emptyset \in \mathcal{K}$, elegir un elemento de $\mathcal{K}$ y usarlo en lugar de $\emptyset$ en la definición de función casi nula.

Teorema 4.6. $M(\mathcal{K},\sigma)$ es un modelo de VN en $ZFC + modelo(\mathcal{K},\sigma,\ll,\gg,T)$.

Demostración: Para probar este teorema tenemos que probar, en ZFC, las frases que resultan de relativizar los axiomas de VN y de usar las definiciones de los símbolos $\bot^M, \top^M, \langle\cdot,\cdot\rangle^M, \cdot[\cdot]^M, \mathbf{I}^M(\cdot)$.

Para probar $VN.I,1^{M(\mathcal{K},\sigma)}$, $VN.I,2^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ y $VN.I,3^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ sólo hay que observar que la imagen de σ^{-1} es $\mathcal{F}_\kappa$ y σ es biyectiva. Mientras que para probar $VN.I,4^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ hay que usar que dos funciones iguales sii lo son punto a punto.

Todos los axiomas del grupo II , relativizados a $M(\mathcal{K},\sigma)$, enuncian la existencia de ciertas funciones de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}$. En todos los casos es obvio que estas funciones existen en $\mathcal{F}$. Con los axiomas del tercer grupo ocurre lo mismo que con las del segundo.

$VN.IV,1^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ es $\forall^{\mathcal{F}}a(a \notin \mathcal{F}_\kappa \leftrightarrow \exists^{\mathcal{F}}b\forall^{\mathcal{F}_\kappa}x\exists^{\mathcal{F}_\kappa}y(\sigma(y) \in sop(a) \wedge b(\sigma(y)) = \sigma(x)))$ que es equivalente a $\forall^{\mathcal{F}}a(\neg(\|sop(a)\| < \kappa) \leftrightarrow \exists^{\mathcal{F}}b(\{b(x) : x \in sop(a)\} = \mathcal{K}))$. Es claro que si $\|sop(a)\| < \kappa$ entonces $\forall^{\mathcal{F}}b\ \|\{b(x) : x \in sop(a)\}\| \leq \|sop(a)\| < \kappa = \|\mathcal{K}\|$, luego es imposible que $\{b(x) : x \in sop(a)\} = \mathcal{K}$. Por otro lado, si $\|sop(a)\| = \kappa = \|\mathcal{K}\|$, existe una biyección $b \in \mathcal{F}$ tal que $\{b(x) : x \in sop(a)\} = \mathcal{K}$

Las fórmulas $VN.V,1^{M(\mathcal{K},\sigma)}$, $VN.V,2^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ y $VN.V,3^{M(\mathcal{K},\sigma)}$ se deducen de que κ es no numerable, regular y límite fuerte respectivamente. $\square$

Lo importante de este teorema es que de él se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.7. $CON(ZFC + EI) \Rightarrow CON(VN)$

Demostración: Sabemos que en $ZFC + EI$ existen $\mathcal{K}$, σ, $\ll,\gg$ y T tales que $modelo(\mathcal{K},\sigma,\ll,\gg,T)$. Luego podemos construir el modelo $M(\mathcal{K},\sigma)$ de VN en $ZFC + EI$. $\square$

Tenemos probado que la consistencia de VN "está entre" la de ZFC y la de $ZFC+EI$, es decir $CON(ZFC+EI) \Rightarrow CON(VN)$ y $CON(VN) \Rightarrow CON(ZFC)$.

4.3. Sobre el axioma de fundación en la teoría de von Neumann

Recordamos que en la sección 3.2 probamos que $VN\vdash \widetilde{ZFC^-}^{\mathbf{I}}$, o sea que probamos que $\mathbf{I}$ es un modelo de $\widetilde{ZFC^-}$, pero no se hizo nada sobre si $\widetilde{ZF},2$ se satisface o no en ese modelo, donde $\widetilde{ZF},2$ es el axioma de fundación. En esta sección construimos dos modelos de VN y luego estudiamos al modelo $\mathbf{I}$ dentro de los modelos de VN, en uno de ellos se satisface $\neg\widetilde{ZF},2$ y en el otro se satisface $\widetilde{ZF},2$. De aquí deducimos que si $ZFC + EI$ es consistente, entonces ni $\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$ ni $\neg\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$ son demostrables en VN.

4.3.1. Consistencia de $VN + \neg\mathbf{I}$

Para probar que $\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$ no se deduce de VN usaremos como modelo un caso particular de $M(\mathcal{K},\sigma)$. Lo que hacemos es cambiar la biyección σ de forma que exista algún conjunto que se pertenezca a si mismo.

Teorema 4.8. Dados κ un cardinal inaccesible, $\mathcal{K}$ tal que $\|\mathcal{K}\| = \kappa$ y $\emptyset \in \mathcal{K}$, $\ll\cdot,\cdot\gg : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ inyectiva y $T \in \mathcal{K}$ distinto de $\emptyset$ existe $\widetilde{\sigma} : \mathcal{F}_\kappa \to \mathcal{K}$ biyectiva tal que existe $x \in \mathcal{F}_\kappa$ que verifica $conj^{\widetilde{M}}(x) \wedge x \epsilon^{\widetilde{M}} x$. Donde escribimos $\widetilde{M}$ en lugar de $M(\mathcal{K},\widetilde{\sigma})$.

Demostración: Sea $\sigma : \mathcal{F}_\kappa \to \mathcal{K}$ una función biyectiva que sabemos que existe por 4.4. Sean $x, y \in \mathcal{F}_\kappa$, distintos de $\bot^M$ y de $\top^M$, tales que $conj^M(x)$ y $y \,\epsilon^M\, x$.

Sea $\tau : \mathcal{F}_\kappa \to \mathcal{F}_\kappa$ tal que $\tau(y) = x$, $\tau(x) = y$ y $\tau(z) = z$ si $z \neq x \wedge z \neq y$. Ahora definimos $\widetilde{\sigma} : \mathcal{F}_\kappa \to \mathcal{K}$, $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ \tau$, luego, para todo $z \in \mathcal{F}_\kappa$:

$$x[z]^{\widetilde{M}} = \widetilde{\sigma}^{-1}(x(\widetilde{\sigma}(z))) = \tau^{-1}(\sigma^{-1}(x(\sigma(\tau(z))))) = \tau(x[\tau(z)]^M)$$

Como $\bot^{\widetilde{M}} = \tau(\bot^M) = \bot^M$, $\top^{\widetilde{M}} = \tau(\top^M) = \top^M$ y $\forall^{\mathcal{F}_\kappa} y(x[y]^M = \bot^M \text{ o } \top^M)$ tenemos que $\forall^{\mathcal{F}_\kappa} y(x[y]^{\widetilde{M}} = \bot^{\widetilde{M}} \text{ o } \top^{\widetilde{M}})$, y como $\mathbf{I}^{\widetilde{M}}(x)$ tenemos que $conj^{\widetilde{M}}(x)$. Como $\tau(x) = y$, $x[y]^M = \top^M$ y $\tau(\top^M) = \top^{\widetilde{M}}$ tenemos que $x[x]^{\widetilde{M}} = \top^{\widetilde{M}}$, luego $x \,\epsilon^{\widetilde{M}}\, x$. $\square$

Corolario 4.9. $CON(ZFC + EI) \Rightarrow CON(VN + \neg\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}})$

Demostración: Es claro que $\exists^{conj} x(x \,\epsilon\, x) \to \neg\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$. Entonces $ZFC + EI$ podemos construir el modelo $M(\mathcal{K}, \widetilde{\sigma})$ como en el teorema, tal que se puede probar $(VN + \neg\widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}})^{M(\mathcal{K},\widetilde{\sigma})}$. $\square$

Corolario 4.10. Suponiendo que $ZFC + EI$ es consistente,

$$VN \nvdash \widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$$

De aquí también se deduce un resultado conocido de la teoría de conjuntos que dice que el axioma de fundación no se deduce de los demás:

Corolario 4.11. $CON(ZFC + EI) \Rightarrow CON(\widetilde{ZFC}^- + \neg\widetilde{ZF},2)$

Demostración: En $ZFC + EI$ tenemos la estructura $M(\mathcal{K}, \widetilde{\sigma})$ y dentro tenemos la estructura $\mathbf{I}$. Como $VN \vdash \widetilde{ZFC}^{-\mathbf{I}}$, tenemos probado $((\widetilde{ZFC}^- + \neg\widetilde{ZF},2)^{\mathbf{I}})^{M(\mathcal{K},\widetilde{\sigma})}$, entonces obtenemos lo que queríamos. $\square$

4.3.2. Consistencia de $VN + \widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$

En esta sección construimos, en $ZFC + EI$, un modelo de $VN + \widetilde{ZF},2^{\mathbf{I}}$. La idea de esta construcción es parecida a la de la construcción de la clase $\mathbb{WF}$ (Well Founded) (Ver [Kun80].).

Definición 4.12.

- Sean $\mathbb{\bot} := \emptyset$, $\mathbb{T} := \{\emptyset\}$ y $\mathbb{T}' := \{\prec\mathbb{\bot}, \mathbb{T}\succ\}$.
- Notamos con $\mathcal{F}^P(A, B)$ al conjunto de las *funciones parciales* de A en B, es decir $\mathcal{F}^P(A, B) := \bigcup_{X \subset A} \mathcal{F}(X, B)$.
- Definamos al conjunto $\mathcal{D}_\alpha$ por recursión en $\alpha \in \mathbb{ON}$:
  - $\mathcal{D}_0 := \{\mathbb{\bot}\}$
  - $\mathcal{D}_{\beta+1} := \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_\beta, \mathcal{D}_\beta \setminus \{\mathbb{\bot}\}) \cup \{\mathbb{T}\} \setminus \{\mathbb{T}'\}$
  - $\mathcal{D}_\alpha := \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{D}_\xi$ en el caso α ordinal límite.

Los elementos de $\mathcal{D}_{\alpha+1}$ son las funciones parciales que se pueden construir con elementos de $\mathcal{D}_\alpha$ sin $\mathbb{\bot}$ en la imagen, y sustituyendo $\mathbb{T}'$ por $\mathbb{T}$. En realidad lo que queremos es $\mathbb{T} = \{\prec\mathbb{\bot}, \mathbb{T}\succ\}$, lo cual es imposible en ZFC, por eso definimos $\mathbb{T}' = \{\prec\mathbb{\bot}, \mathbb{T}\succ\}$ y luego cada vez que aparece $\mathbb{T}'$ lo sustituimos por $\mathbb{T}$.

Si calculamos $\mathcal{D}_1$ obtenemos $\{\mathbb{\bot}, \mathbb{T}\}$, ya que $\mathbb{\bot} = \emptyset$ es la función vacía que es una función parcial de A en B para todo A y B. Es fácil ver que $\mathcal{D}_2$ es

$$\{\ \mathbb{\bot},\ \mathbb{T},\ \{\prec\mathbb{T}, \mathbb{T}\succ\},\ \{\prec\mathbb{\bot}, \mathbb{T}\succ, \prec\mathbb{T}, \mathbb{T}\succ\}\ \}$$

no explicitamos $\mathcal{D}_3$ porque tiene 256 elementos.

Empezamos demostrando que los conjuntos $\mathcal{D}_\alpha$ forman una sucesión estrictamente creciente.

Lema 4.13. $\forall \xi < \alpha (\mathcal{D}_\xi \subsetneq \mathcal{D}_\alpha)$.

Demostración: Demostraremos $\forall \xi < \alpha(\mathcal{D}_\xi \subset \mathcal{D}_\alpha)$ por inducción en $\alpha \in \mathbb{ON}$.

Es claro cuando $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o α es ordinal límite. Veamos el caso $\alpha = \beta + 1$ con $\beta \geq 1$. Sea $x \in \mathcal{D}_\beta$, si $x = \mathbb{T}$ luego $x \in \mathcal{D}_\alpha$, si no $x \in \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_\xi, \mathcal{D}_\xi \setminus \{\perp\}) \setminus \{\mathbb{T}'\}$ para algún $\xi < \beta$ (si β es sucesor, entonces $\xi = \beta - 1$ y si es límite ξ es tal $x \in \mathcal{D}_{\xi+1}$), por hipótesis inductiva $\mathcal{D}_\xi \subset \mathcal{D}_\beta$, luego $x \in \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_\beta, \mathcal{D}_\beta \setminus \{\perp\}) \setminus \{\mathbb{T}'\} \subset \mathcal{D}_\alpha$. De donde concluimos que $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}_\alpha$, entonces para todo $\xi < \alpha$: $\mathcal{D}_\xi \subset \mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}_\alpha$.

Ahora demostremos $\forall \xi < \alpha(\mathcal{D}_\xi \neq \mathcal{D}_\alpha)$ por inducción en α.

Es trivial cuando $\xi = 0$, así que consideremos $0 < \xi < \alpha$. Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}_\xi, \mathcal{D}_\xi \setminus \{\perp\})$, tal que $f(x) = \mathbb{T}$ para todo $x \in \mathcal{D}_\xi$. Supongamos que $f \in \mathcal{D}_\xi$, luego existe $\xi\prime < \xi$ tal que $f \in \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_{\xi\prime}, \mathcal{D}_{\xi\prime} \setminus \{\perp\})$, luego $\mathcal{D}_\xi = dom(f) \subset \mathcal{D}_{\xi\prime} \subset \mathcal{D}_\xi$, pero por hipótesis inductiva $\mathcal{D}_{\xi\prime} \neq \mathcal{D}_\xi$. Concluimos que $f \in \mathcal{D}_\alpha \setminus \mathcal{D}_\xi$, luego $\mathcal{D}_\xi \neq \mathcal{D}_\alpha$. □

Este lema nos induce a hacer la siguiente definición:

Definición 4.14. Sea $Rank : \mathcal{D}_\kappa \to \kappa$ definida de la siguiente forma:

$$Rank(x) := min\{\alpha \in \kappa : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$$

Observación 4.15.

- $Rank(\perp) = 0$ y $Rank(\mathbb{T}) = 1$.
- $\mathcal{D}_\alpha = \{x \in \mathcal{D}_\kappa : Rank(x) \leq \alpha\}$
- $Rank(x)$ nunca es un ordinal límite.

Demostración: Para la primera parte hay que observar que $\mathcal{D}_0 = \{\perp\}$ y que $\mathcal{D}_1 = \{\perp, \mathbb{T}\}$. En la segunda parte las dos inclusiones son fáciles de demostrar. Para la tercera parte hay que observar que si $x \in \mathcal{D}_\alpha$ con α ordinal límite, entonces existe $\xi < \alpha$ tal que $x \in \mathcal{D}_\xi$. □

En el siguiente lema estudiamos la cardinalidad de $\mathcal{D}_\alpha$

Lema 4.16. Para todo $\alpha < \kappa$, $\|\alpha\| \leq \|\mathcal{D}_\alpha\| < \kappa$ y $\|\mathcal{D}_\kappa\| = \kappa$.

Demostración: Los conjuntos $\mathcal{D}_{\xi+1} \setminus \mathcal{D}_\xi$ con $\xi < \alpha$ son disjuntos y no vacíos por el lema anterior, luego $\|\mathcal{D}_\alpha\| = \|\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{D}_{\xi+1} \setminus \mathcal{D}_\xi\| \geq \|\alpha\|$.

Ahora probaremos $\|\mathcal{D}_\alpha\| < \kappa$ por inducción en $\alpha \in \kappa$. Si $\alpha = 0$ es trivial. Si $\alpha = \beta + 1$ y $\|\mathcal{D}_\beta\| < \kappa$ luego $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{P}(\mathcal{D}_\beta \times \mathcal{D}_\beta) \cup \{\mathbb{T}\}$, como κ es límite fuerte y $\|\mathcal{D}_\beta\| < \kappa$ tenemos que $\kappa > \|\mathcal{P}(\mathcal{D}_\beta \times \mathcal{D}_\beta) \cup \{\mathbb{T}\}\| \geq \|\mathcal{D}_\alpha\|$. Si α es ordinal límite, de la observación 4.2 y de la hipótesis inductiva obtenemos que $\|\bigcup_{\xi\in\alpha} \mathcal{D}_\xi\| < \kappa$.

Para probar la última afirmación tenemos que observar que $\|\mathcal{D}_\kappa\| = sup\{\|\mathcal{D}_\alpha\| : \alpha < \kappa\}$ y que para todo $\alpha < \kappa$ tenemos que $\|\alpha\| \leq sup\{\|\mathcal{D}_\xi\| : \xi < \kappa\} \leq \kappa$. De donde concluimos $\|\mathcal{D}_\kappa\| = \kappa$. □

Ahora veremos que hay una forma natural de identificar a las funciones κ-casi nulas de $\mathcal{D}_\kappa \to \mathcal{D}_\kappa$ con los elementos de $\mathcal{D}_\kappa$. Considerar esta biyección particular, en la creación del modelo de VN, es lo que nos va a permitir probar $\widetilde{ZF}$,2.

Definición 4.17. Dada $f \in \mathcal{D}_\kappa$, definimos $\bar{f} \in \mathcal{F}(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$ tal que dado $x \in \mathcal{D}_\kappa$

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f \neq \mathbb{T} \text{ y } x \in dom(f) \\ \perp & \text{si } f \neq \mathbb{T} \text{ y } x \in \mathcal{D}_\kappa \setminus dom(f) \\ \mathbb{T} & \text{si } f = \mathbb{T} \text{ y } x = \perp \\ \perp & \text{si } f = \mathbb{T} \text{ y } x \neq \perp \end{cases}$$

Definimos $\overline{\mathcal{D}_\kappa} := \{\bar{f} : f \in \mathcal{D}_\kappa\}$.

Observemos que $\emptyset = \bot\!\!\!\bot \in \mathcal{D}_\kappa$ luego podemos hablar de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$. Y también observemos que $sop(\bar{f}) = dom(f)$.

Es fácil verificar que la función de $\mathcal{D}_\kappa \to \overline{\mathcal{D}_\kappa}$ que lleva a f en $\bar{f}$ es biyectiva y su inversa es la función ϱ que se obtiene restringiendo a las funciones de $\overline{\mathcal{D}_\kappa}$ a su soporte. Hay que tener cuidado con la identificación que hicimos de $\mathbb{T}$ con $\mathbb{T}'$, la definición de $\varrho : \overline{\mathcal{D}_\kappa} \to \mathcal{D}_\kappa$ es:

$$\varrho(g) = \begin{cases} g|_{sop(g)} & \text{si } g|_{sop(g)} \neq \mathbb{T}' \\ \mathbb{T} & \text{si } g|_{sop(g)} = \mathbb{T}' \end{cases}$$

Lema 4.18. $\overline{\mathcal{D}_\kappa} = \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$.

Demostración: ($\overline{\mathcal{D}_\kappa} \subset \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$): Dada $f \in \mathcal{D}_\kappa$, $\bar{f} \in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$ porque $\|sop(\bar{f})\| = \|dom(f)\| \leq \|\mathcal{D}_\alpha\| < \kappa$ con $\alpha < \kappa$.

($\overline{\mathcal{D}_\kappa} \supset \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$): Si $g \in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$, sea $f = \varrho(g)$, o sea que $g = \bar{f}$. Si $f = \mathbb{T}$, $g = \bar{f} \in \overline{\mathcal{D}_\kappa}$. Supongamos ahora que $f \neq \mathbb{T}$ y probemos que $f \in \mathcal{D}_\kappa$. Consideramos $\{Rank(x); x \in dom(f)\} \subset \kappa$, como κ es regular y $\|\{Rank(x); x \in dom(f)\}\| \leq \|dom(f)\| = \|sop(g)\| < \kappa$ tenemos que $\exists \lambda_1 \in \kappa$ tal que $\{Rank(x); x \in dom(f)\} \subset \kappa \subset \lambda_1$, o sea que $dom(f) \subset \mathcal{D}_{\lambda_1}$. De la misma forma probamos que existe $\lambda_2 \in \kappa$ tal que $ran(f) \subset \mathcal{D}_{\lambda_2}$. Sea $\lambda = max(\lambda_1, \lambda_2)$. Tenemos que $f \in \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{D}_\lambda \setminus \{\bot\!\!\!\bot\}) \setminus \{\mathbb{T}'\} \subset \mathcal{D}_{\lambda+1} \subset \mathcal{D}_\kappa$ y $g = \bar{f} \in \overline{\mathcal{D}_\kappa}$. □

Sea $\ll\cdot,\cdot\gg : \mathcal{D}_\kappa \times \mathcal{D}_\kappa \to \mathcal{D}_\kappa$ una función inyectiva cualquiera. Del lema anterior y del comentario anterior al lema concluimos que ϱ es una biyección de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa) \to \mathcal{D}_\kappa$, luego tenemos $modelo(\mathcal{D}_\kappa, \varrho, \ll, \gg, \mathbb{T})$. Por lo tanto, por el teorema 4.6, tenemos que se verifica $VN^{M(\mathcal{D}_\kappa,\varrho)}$, sólo nos queda probar $(\widetilde{ZF}, 2^{\mathbf{I}})^{M(\mathcal{D}_\kappa,\varrho)}$. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.19. Si $f, g \in \mathcal{D}_\kappa$ y $\bar{f}(g) \neq \bot\!\!\!\bot$, entonces $Rank(g) < Rank(f)$

Demostración: Sea $\alpha = Rank(f)$, entonces $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta + 1$. Si $\alpha = 0$, luego $f = \bot\!\!\!\bot = \emptyset$ y para todo $g \in \mathcal{D}_\kappa$, $\bar{f}(g) = \bot\!\!\!\bot$. Entonces $\alpha = \beta + 1$. Si $f = \mathbb{T}$, como $\bar{f}(g) \neq \bot\!\!\!\bot$, tenemos que $g = \bot\!\!\!\bot$ y $Rank(g) = 0 < \alpha$. Supongamos que $f \neq \mathbb{T}$, entonces $f \in \mathcal{F}^P(\mathcal{D}_\beta, \mathcal{D}_\beta \setminus \{\bot\!\!\!\bot\})$, luego $g \in dom(f) \subset \mathcal{D}_\beta$, de donde obtenemos $Rank(g) \leq \beta < \alpha$. □

Teorema 4.20. En $ZFC + EI$ se prueba $(VN + \widetilde{ZF}, 2^{\mathbf{I}})^{M(\mathcal{D}_\kappa,\varrho)}$.

Demostración: Ya sabemos $VN^{M(\mathcal{D}_\kappa,\varrho)}$. Notaremos $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$ y $\mathcal{F}_\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)$.

La fórmula $(\widetilde{ZF}, 2^{\mathbf{I}})^{M(\mathcal{K},\varrho)}$ es:

$$\forall^{conj^M} x(\exists^{\mathcal{F}_\kappa} y \,\epsilon^M\, x \to \exists^{\mathcal{F}_\kappa} y \,\epsilon^M\, x \forall z \,\epsilon^M\, x(z \not\epsilon^M\, y))$$

Sea $x \in \mathcal{F}_\kappa$ tal que $conj^M(x)$ y tal que $\exists^{\mathcal{F}_\kappa} y \,\epsilon^M\, x$. Sea $y \in \{\varrho^{-1}(w); w \in sop(x)\}$, o lo que es lo mismo $y \,\epsilon^M\, x$, tal que $Rank(\varrho(y)) = min\{Rank(w); w \in sop(x)\}$. Sea $z \,\epsilon^M\, x$, probaremos que $z \not\epsilon^M\, y$. Tenemos que $Rank(\varrho(z)) \geq Rank(\varrho(y))$, luego, del lema anterior , deducimos que $\neg(y(\varrho(z)) \neq \bot\!\!\!\bot)$, aplicando ϱ^{-1} en ambos lados de la desigualdad obtenemos $\neg(y[z]^M \neq \bot\!\!\!\bot^M)$, o sea que $z \not\epsilon^M\, y$. □

Corolario 4.21. $CON(ZFC + EI) \Rightarrow CON(VN + \widetilde{ZF}, 2^{\mathbf{I}})$

Corolario 4.22. Suponiendo que $ZFC + EI$ es consistente:

$$VN \nvdash \neg\widetilde{ZF}, 2^{\mathbf{I}}$$

Agadecimientos

Quiero agradecer a Paula Severi y a Walter Ferrer que, además de haberme ayudado con este trabajo, fueron muy importantes en lo que va de mi carrera.

Referencias

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[Men97] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman y Hall, Londres, fourth edition, 1997.

[Mon00] Antonio Montalbán. Teoría de conjuntos según von Neumann, 2000. Monografía de licenciatura orientada por Paula Severi. UDELAR, Montevideo.

[Mor98] Walter Moreira. Comentarios sobre la teoría axiomática de conjuntos. Trabajo monográfico para la materia Epistemología, 1998.

[Neu25] John von Neumann. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154:219–240, 1925. Traducido al inglés en [**?**], 393-413.